# 几何与拓扑讲义

## 第一册　几何空间与点集拓扑基础

第一章讨论仿射空间、内积、正交分解与等距映射。第二章讨论度量空间中的开集、闭包、序列、完备性与稠密集。第三章讨论拓扑、基与子基、聚点以及子空间。第四章讨论连续映射、同胚、嵌入、有限积、立体投影与拓扑和。第五章讨论分离公理、可数性及一般空间中序列判据的边界。第六章讨论紧性、有限积、全有界性及其度量刻画。第七章讨论连通分支、道路、局部连通性及两个平面反例。第八章讨论商拓扑、粘合、环面、莫比乌斯带、球面与实射影空间。

第一至八章阶段稿　2026 年 11 月 1 日

# 目录

**记号与写法** **iii**

**1 仿射空间与欧氏空间** **1**
1.1 点、向量与仿射作用 . . . 1
1.2 仿射组合与重心坐标 . . . 3
1.3 仿射坐标与仿射映射 . . . 6
1.4 内积与长度 . . . 8
1.5 角度、正交基与 Gram 矩阵 . . . 11
1.6 正交投影与距离的最小性 . . . 14
1.7 正交变换与反射 . . . 17
1.8 例子与范数比较 . . . 19

**2 度量空间、邻域与收敛** **21**
2.1 度量空间与基本例子 . . . 21
2.2 开球、闭球与相对邻域 . . . 22
2.3 内部、闭包与边界 . . . 25
2.4 序列与度量收敛 . . . 28
2.5 度量空间中的柯西列 . . . 29
2.6 完备性、闭子空间与等价度量 . . . 31
2.7 嵌套闭集与完备性的几何判据 . . . 34
2.8 稠密子集 . . . 35

**3 拓扑空间、基与子空间** **37**
3.1 拓扑与开集族 . . . 37
3.2 邻域与局部判别 . . . 39
3.3 基与生成拓扑 . . . 40
3.4 子基与最小拓扑 . . . 43
3.5 内部、闭包与边界 . . . 44
3.6 聚点、孤立点与稠密集 . . . 47
3.7 子空间拓扑 . . . 49
3.8 有限空间的最小邻域 . . . 51

**4 连续映射与空间的组合** **53**
4.1 逆像与连续性 . . . 53
4.2 复合、限制与粘贴 . . . 54
4.3 同胚、开映射与闭映射 . . . 56
4.4 嵌入与像上的拓扑 . . . 58
4.5 有限积拓扑 . . . 59
4.6 图像嵌入与实坐标运算 . . . 63
4.7 球面的立体投影 . . . 64
4.8 拓扑和与分片定义 . . . 66

**5 分离、可数性与序列的边界** **68**
5.1 点的分离与 Hausdorff 性 . . . 68
5.2 正则、正规与距离函数 . . . 70
5.3 第一可数、第二可数与可分性 . . . 72
5.4 第一可数空间中的序列判据 . . . 74
5.5 余可数拓扑与序列的边界 . . . 75
5.6 可数性的进一步保持性质 . . . 76
5.7 下限直线与不可逆的可数性蕴含 . . . 77
5.8 Lindelöf 性与闭集分离 . . . 79

**6 紧性及其度量刻画** **82**
6.1 开覆盖与紧子空间 . . . 82
6.2 有限交性质与嵌套紧集 . . . 83
6.3 紧集与 Hausdorff 分离 . . . 84
6.4 管状引理、有限积与闭投影 . . . 86
6.5 全有界性与有限网 . . . 87
6.6 度量空间中紧性的三个等价条件 . . . 89
6.7 欧氏空间中的 Heine–Borel 定理 . . . 91
6.8 连续函数的极值与一致控制 . . . 92
6.9 有限维范数空间的紧性 . . . 94

**7 连通、道路连通与局部性质** **95**
7.1 分离与连通性的判据 . . . 95
7.2 实直线中的连通集与中间值 . . . 96
7.3 连通集的并、闭包与有限积 . . . 96
7.4 连通分支 . . . 98
7.5 道路与道路连通性 . . . 98
7.6 局部连通与局部道路连通 . . . 100
7.7 欧氏空间中的线段与折线 . . . 101
7.8 拓扑学家的正弦曲线 . . . 102
7.9 道路连通但不局部连通的梳状空间 . . . 105

**8 商空间与粘合构造** **107**
8.1 等价类、饱和集与商拓扑 . . . 107
8.2 通过商空间定义连续映射 . . . 108
8.3 商映射的充分条件与限制 . . . 109
8.4 把区间端点粘成圆周 . . . 110
8.5 商空间的分离性 . . . 111
8.6 方形的粘合：圆柱面与环面 . . . 113
8.7 反向粘合与莫比乌斯带 . . . 114
8.8 压缩闭子集与球面 . . . 116
8.9 沿映射粘合两个空间 . . . 118
8.10 实射影空间的商模型与坐标 . . . 119

# 记号与写法

第一章中，$V$ 表示有限维实向量空间，$\mathcal{A}$ 表示以 $V$ 为平移向量空间的仿射空间。点用大写字母 $P, Q, R$ 表示，向量用小写字母 $u, v, w$ 表示。选定 $O \in \mathcal{A}$ 后，点 $P$ 的位置向量为 $\overrightarrow{OP}$。第二章中，$(X, d)$ 表示度量空间，$A^c = X \setminus A$ 表示相对于 $X$ 的补集。$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$，集合的闭包和内部均相对于所在空间取；涉及子空间时会另行标明。

涉及 $\mathbb{R}^n$ 的坐标公式时约定 $n \geq 1$。本册使用实数的完备性、阿基米德性质及有限维线性代数的基本结论。内积、正交投影和度量、拓扑空间中的结论在正文中证明。第七章的正弦曲线例子和第八章的圆周参数化另使用三角函数的基本实分析性质，并在相应节中说明。

# 1 仿射空间与欧氏空间

仿射空间由点集和位移向量组成。选定参考点后，每个点对应一个位置向量；改变参考点时，位置向量随之改变，点间的位移不变。在平移向量空间上给定内积后，可以定义点间距离，并讨论正交投影与等距映射。

## 1.1 点、向量与仿射作用

**定义 1.1** (向量空间)**.** 一个实向量空间是一个集合 $V$，配有加法

$$(u, v) \longmapsto u + v$$

和数乘

$$(t, u) \longmapsto tu, \qquad t \in \mathbb{R},\ u \in V,$$

满足加法交换群公理以及数乘对加法、数乘和单位元的相容性：

$$t(u+v) = tu + tv, \qquad (s+t)u = su + tu, \qquad s(tu) = (st)u, \qquad 1u = u.$$

**定义 1.2** (仿射空间)**.** 设 $V$ 是实向量空间。一个以 $V$ 为平移向量空间的仿射空间，是一个非空集合 $\mathcal{A}$ 和一个作用

$$\mathcal{A} \times V \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad (P, v) \longmapsto P + v,$$

满足：

1. $P + 0 = P$；
2. $(P + u) + v = P + (u + v)$；
3. 对任意 $P, Q \in \mathcal{A}$，存在唯一的 $v \in V$ 使 $P + v = Q$。

这个唯一的向量记为

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

第三条同时包含存在性和唯一性。存在性说任意点都能由另一个点平移得到，唯一性说同一对点之间只有一个位移向量。这里的 $Q - P$ 是记号，不是把两个点当作向量相减。

**命题 1.3** (位移向量的基本恒等式)**.** *对任意 $P, Q, R \in \mathcal{A}$ 和 $u \in V$，有*

$$\overrightarrow{PP} = 0, \qquad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP},$$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}, \qquad \overrightarrow{P+u, Q+u} = \overrightarrow{PQ}.$$

*证明.* 由于 $P + 0 = P$，唯一性给出 $\overrightarrow{PP} = 0$。由 $P + \overrightarrow{PQ} = Q$，再平移 $-\overrightarrow{PQ}$，得到

$$Q - \overrightarrow{PQ} = P.$$

因此 $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$。

又

$$P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R.$$

从 $P$ 到 $R$ 的位移向量具有唯一性，所以 $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$。最后，

$$(P + u) + \overrightarrow{PQ} = Q + u,$$

故平移后的两点差仍为 $\overrightarrow{PQ}$。 □

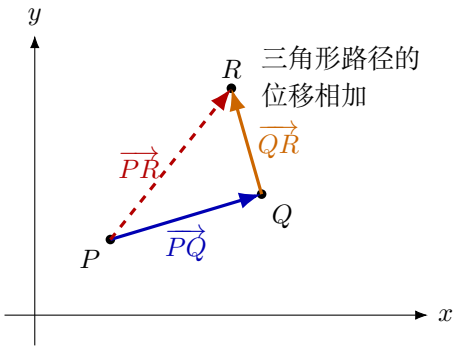



图 1.1: 点沿两段位移移动时，两段有向位移的和等于从起点到终点的直接位移；虚线表示合成后的直接位移。

**命题 1.4** (选定原点后的坐标表示)**.** 固定 $O \in \mathcal{A}$。映射

$$\Phi_O : \mathcal{A} \longrightarrow V, \qquad \Phi_O(P) = \overrightarrow{OP}$$

是双射，且

$$\Phi_O(P + v) = \Phi_O(P) + v.$$

若改选 $O' \in \mathcal{A}$，则

$$\Phi_{O'}(P) = \Phi_O(P) - \overrightarrow{OO'}.$$

证明. 对任意 $v \in V$，点 $O + v$ 满足 $\Phi_O(O + v) = v$，所以 $\Phi_O$ 满射。若 $\Phi_O(P) = \Phi_O(Q)$，则

$$O + \overrightarrow{OP} = P = O + \overrightarrow{OQ} = Q,$$

故 $\Phi_O$ 单射。

平移相容性来自

$$O + \overrightarrow{OP} + v = P + v.$$

再由位移的三角恒等式，

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP}.$$

这就是改变原点后坐标整体平移的公式。 □

**注 1.5.** 坐标原点改变时，点的坐标改变；同一位移向量不改变。长度、平行性、共线性等几何性质必须写成对原点变换相容的形式，不能把某一组坐标误认为对象本身。

## 1.2 仿射组合与重心坐标

**定义 1.6** (仿射组合)**.** 给定点 $P_1,\dots,P_m\in\mathcal{A}$ 和实数 $t_1,\dots,t_m$，若

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = 1,$$

则形式表达式

$$P=\sum_{i=1}^{m} t_iP_i$$

称为这些点的仿射组合。其严格定义是：任取参考点 $O\in\mathcal{A}$，令

$$\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{m} t_i\overrightarrow{OP_i}.$$

定义中看似使用了参考点 $O$，但结果不依赖 $O$。这是系数和等于 1 的关键作用。

**定理 1.7** (仿射组合与原点无关)**.** *上面的仿射组合定义与参考点的选择无关。若 $O'$ 是另一参考点，则由 $O'$ 得到的同一组合仍为 $P$。*

*证明.* 记

$$v_i=\overrightarrow{OP_i},\qquad w_i=\overrightarrow{O'P_i},\qquad a=\overrightarrow{OO'}.$$

由位移恒等式，

$$w_i=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP_i}=-a+v_i.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m} t_iw_i=\sum_{i=1}^{m} t_i(v_i-a)=\sum_{i=1}^{m} t_iv_i-\left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right)a=\sum_{i=1}^{m} t_iv_i-a.$$

另一方面，若 $v=\sum_i t_iv_i$，则

$$\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}=-a+v.$$

所以

$$\overrightarrow{O'P}=\sum_i t_iw_i.$$

由点与位移的唯一性，两个参考点得到的点相同。 □

**定义 1.8** (仿射直线)**.** 若 $P_0\in\mathcal{A}$、$u\in V\setminus\{0\}$，集合

$$P_0+\mathbb{R}u=\{P_0+tu : t\in\mathbb{R}\}$$

称为仿射直线。向量空间 $\mathbb{R}u$ 称为该直线的方向空间。

**推论 1.9** (两点组合与线)**.** *对 $P,Q\in\mathcal{A}$，集合*

$$L(P,Q)=\{(1-t)P+tQ : t\in\mathbb{R}\}$$

*等于*

$$\{P+tu : t\in\mathbb{R}\},\qquad u=\overrightarrow{PQ}.$$

*若 $P\neq Q$，则 $L(P,Q)$ 是唯一经过 $P,Q$ 的仿射直线。*

证明. 由 $Q = P + u$，仿射组合给出

$$(1-t)P + tQ = P + t(Q-P) = P + tu.$$

当 $t = 0$ 和 $t = 1$ 时分别得到 $P, Q$。

设另一条仿射直线写成 $P_0 + \mathbb{R}v$，并包含 $P, Q$。于是

$$P = P_0 + sv, \qquad Q = P_0 + tv.$$

若 $s = t$，则 $P = Q$，与假设矛盾。因此

$$\overrightarrow{PQ} = (t-s)v.$$

于是 $v$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 共线，且两条直线的点集相同。 □

**定义 1.10** (仿射子空间与仿射包)**.** 设 $W \le V$ 是线性子空间，$P_0 \in \mathcal{A}$。集合

$$P_0 + W = \{P_0 + w : w \in W\}$$

称为由 $P_0$ 经过方向空间 $W$ 的仿射子空间。对非空集合 $S \subseteq \mathcal{A}$，若存在包含 $S$ 且包含于其他所有这类仿射子空间的仿射子空间，则称它为 $S$ 的仿射包，记为 $\mathrm{Aff}(S)$。以下命题证明它存在。

**命题 1.11** (仿射子空间的内在刻画)**.** 非空集合 $B \subseteq \mathcal{A}$ 是仿射子空间，当且仅当对任意 $P, Q \in B$ 和任意 $t \in \mathbb{R}$，都有

$$(1-t)P + tQ \in B.$$

证明. 若 $B = P_0 + W$，写 $P = P_0 + u$、$Q = P_0 + v$，则

$$(1-t)P + tQ = P_0 + \big((1-t)u + tv\big) \in P_0 + W.$$

反过来，取 $P_0 \in B$，定义

$$W = \{Q - P_0 : Q \in B\} \subseteq V.$$

首先 $0 = P_0 - P_0 \in W$。设 $u = Q - P_0 \in W$，即 $Q = P_0 + u \in B$。对任意 $r \in \mathbb{R}$，闭性条件直接给出

$$P_0 + ru = (1-r)P_0 + rQ \in B,$$

所以 $ru \in W$，从而 $W$ 对数乘封闭。

再设 $u = Q - P_0 \in W$、$v = R - P_0 \in W$。先分别取 $t = 2$，得到

$$P_0 + 2u = (1-2)P_0 + 2Q \in B, \qquad P_0 + 2v = (1-2)P_0 + 2R \in B.$$

对这两个点取 $t = \frac{1}{2}$，得到

$$M = \frac{1}{2}(P_0 + 2u) + \frac{1}{2}(P_0 + 2v) = P_0 + u + v \in B.$$

因此 $u + v \in W$，即 $W$ 也对加法封闭。故 $W \le V$。由定义，$B \subseteq P_0 + W$；反过来，若 $w \in W$，则 $w = Q - P_0$ 对某个 $Q \in B$，于是 $P_0 + w = Q \in B$，所以 $P_0 + W \subseteq B$。因此 $B = P_0 + W$。 □

**命题 1.12** (仿射包的存在与表示)**.** 设 $S \neq \varnothing$，取 $P_0 \in S$，并令

$$W = \operatorname{span}\{\overrightarrow{P_0Q} : Q \in S\}.$$

则

$$\operatorname{Aff}(S) = P_0 + W.$$

它也等于 $S$ 中有限多个点的全部仿射组合所成的集合。

证明. 集合 $P_0 + W$ 是仿射子空间。对 $Q \in S$，$\overrightarrow{P_0Q} \in W$，故 $Q = P_0 + \overrightarrow{P_0Q}$ 属于该子空间。因此 $S \subseteq P_0 + W$。

若 $B = R + U$ 是另一个包含 $S$ 的仿射子空间，由 $P_0 \in B$，可写 $P_0 = R + u_0$，其中 $u_0 \in U$。因为 $U$ 是线性子空间，

$$R + U = P_0 + U.$$

具体地，$R + u = P_0 + (u - u_0)$，且 $P_0 + u = R + (u_0 + u)$，这给出两个包含关系。每个 $Q \in S$ 都在 $P_0 + U$ 中，所以 $\overrightarrow{P_0Q} \in U$。由线性子空间对有限线性组合封闭，$W \subseteq U$，故 $P_0 + W \subseteq P_0 + U = B$。这证明了最小性。若有两个最小者，它们相互包含，因而相等；所以仿射包唯一，并不依赖选取的 $P_0$。

任意 $w \in W$ 可写为 $w = \sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{P_0Q_j}$，其中 $Q_j \in S$。于是

$$P_0 + w = \left(1 - \sum_{j=1}^{m} a_j\right) P_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j Q_j,$$

右端系数和为 $1$，是 $S$ 中点的仿射组合。反过来，若 $\sum_i t_i = 1$ 且 $Q_i \in S$，以 $P_0$ 为参考点，

$$\sum_i t_i Q_i = P_0 + \sum_i t_i \overrightarrow{P_0Q_i} \in P_0 + W.$$

因此这两种描述相同。 □

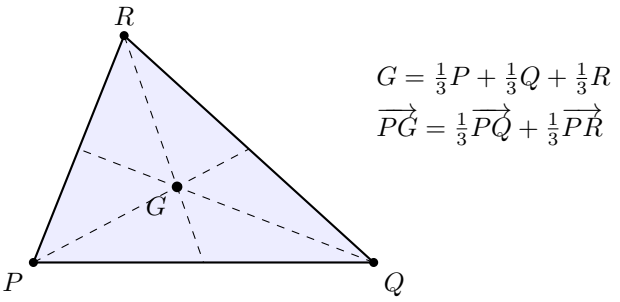



图 1.2: 取 $P = (0, 0)$、$Q = (4.5, 0)$、$R = (1.2, 3)$，则等权仿射组合为 $G = (1.9, 1)$。虚线连接顶点与对边中点；例如以 $P$ 为参考点，$G$ 的位移是两个边向量之和的三分之一。

**定义 1.13** (凸组合与重心坐标)**.** 若仿射组合的系数还满足 $t_i \geq 0$，则称其为凸组合。三点不共线时，满足

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

的三元组 $(\alpha, \beta, \gamma)$ 称为相对于三角形 $PQR$ 的重心坐标；当三者非负时，对应点位于闭三角形

$$\operatorname{conv}\{P, Q, R\} = \{\alpha P + \beta Q + \gamma R : \alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

**命题 1.14** (仿射独立与坐标唯一性)**.** 点 $P_0,\dots,P_k$ 称为仿射独立，如果向量

$$\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_k}$$

线性无关。若它们仿射独立，则每个仿射包中的点都有唯一表示

$$P=\sum_{i=0}^{k} t_iP_i,\qquad \sum_{i=0}^{k} t_i=1.$$

*证明.* 由命题 1.12，仿射包中的任意点可写成

$$P=P_0+\sum_{i=1}^{k} s_i\overrightarrow{P_0P_i}.$$

令 $t_i=s_i$（$i\ge 1$）并令 $t_0=1-\sum_{i=1}^{k}s_i$，即得到所需表示。

若还有另一表示 $P=\sum_i r_iP_i$，两式相减并以 $P_0$ 为参考点，得到

$$\sum_{i=1}^{k}(t_i-r_i)\overrightarrow{P_0P_i}=0.$$

线性无关性给出 $t_i=r_i$（$i\ge 1$），再由系数和为 1 得 $t_0=r_0$。 □

## 1.3 仿射坐标与仿射映射

**定义 1.15** (仿射框架)**.** 设 $\dim V=n$。取 $O\in\mathcal{A}$ 及一组线性基 $e_1,\dots,e_n$；二元组

$$(O;e_1,\dots,e_n)$$

称为一个仿射框架。每个点 $P$ 的仿射坐标是唯一的 $(x_1,\dots,x_n)$ 满足

$$\overrightarrow{OP}=\sum_{j=1}^{n} x_je_j.$$

**命题 1.16** (框架变换公式)**.** 设 $(O;e_1,\dots,e_n)$ 与 $(O';e'_1,\dots,e'_n)$ 是两个仿射框架。若 $x$ 和 $x'$ 分别是点 $P$ 的坐标列向量，则存在可逆矩阵 $A$ 与列向量 $b$，使

$$x=Ax'+b.$$

*证明.* 因为 $e'_j$ 是旧基的线性组合，存在矩阵 $A$ 使

$$e'_j=\sum_{i=1}^{n} A_{ij}e_i.$$

又存在 $b\in\mathbb{R}^n$ 使

$$\overrightarrow{OO'}=\sum_{i=1}^{n} b_ie_i.$$

于是

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=\sum_i b_ie_i+\sum_j x'_je'_j=\sum_i (Ax'+b)_ie_i.$$

坐标唯一性给出 $x = Ax' + b$。若 $Ac = 0$，则

$$\sum_j c_j e'_j = \sum_i (Ac)_i e_i = 0.$$

因 $e'_1, \dots, e'_n$ 线性无关，$c = 0$。所以 $A$ 的核为零；它是 $n \times n$ 方阵，由秩与零化度公式，$A$ 可逆。 □

**定义 1.17** (仿射映射)**.** 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 分别以 $V, W$ 为平移向量空间。映射 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 称为仿射映射，如果存在 $P_0 \in \mathcal{A}$ 和线性映射 $L : V \to W$，使

$$F(P_0 + v) = F(P_0) + L(v).$$

**命题 1.18** (仿射映射的表示与复合)**.** *若 $F$ 仿射，则对任意 $P, Q \in \mathcal{A}$，*

$$F(Q) - F(P) = L(Q - P),$$

*其中 $L$ 与 $P_0$ 的选择无关。若 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 也仿射，线性部分分别为 $L_F, L_G$，则 $G \circ F$ 的线性部分为 $L_G \circ L_F$。*

*证明.* 按定义，存在 $P_0$，使 $F(P_0 + v) = F(P_0) + L(v)$ 对每个 $v$ 成立。写 $P = P_0 + u$、$Q = P_0 + v$，则

$$F(Q) - F(P) = L(v) - L(u) = L(v - u) = L(Q - P).$$

若还存在另一线性映射 $L'$ 给出同一 $F$，取任意 $w \in V$ 及点 $P$，令 $Q = P + w$，便有 $L(w) = F(Q) - F(P) = L'(w)$。所以线性部分唯一。

另取 $P_1 = P_0 + u$，对任意 $v \in V$，有

$$F(P_1 + v) = F(P_0) + L(u + v) = F(P_1) + L(v).$$

故同一公式在每个参考点都成立。若 $G$ 的线性部分为 $L_G$，则

$$G(F(P + v)) = G(F(P) + L_F(v)) = G(F(P)) + L_G(L_F(v)),$$

证明复合的线性部分为 $L_G \circ L_F$。 □

**命题 1.19** (仿射映射保持仿射组合)**.** *若 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 仿射且 $\sum_i t_i = 1$，则*

$$F\left(\sum_i t_i P_i\right) = \sum_i t_i F(P_i).$$

*若 $F$ 的线性部分 $L$ 可逆，则 $F$ 是双射。*

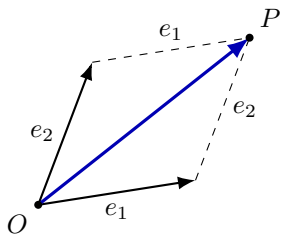
*证明.* 取 $P_0 \in \mathcal{A}$，写 $P_i = P_0 + v_i$。以 $P_0$ 为参考点，$\sum_i t_i P_i = P_0 + \sum_i t_i v_i$，所以

$$F\left(\sum_i t_i P_i\right) = F(P_0) + L\left(\sum_i t_i v_i\right) = F(P_0) + \sum_i t_i L(v_i).$$

以 $F(P_0)$ 为参考点计算右端的仿射组合，也得到 $F(P_0) + \sum_i t_i L(v_i)$，故等式成立。若 $L$ 可逆，定义

$$H(R) = P_0 + L^{-1}\big(\overrightarrow{F(P_0)R}\big) \qquad (R \in \mathcal{B}).$$

对 $P = P_0 + v$，有 $H(F(P)) = P_0 + L^{-1}L(v) = P$。对任意 $R \in \mathcal{B}$，有 $F(H(R)) = F(P_0) + LL^{-1}(\overrightarrow{F(P_0)R}) = R$。所以 $H$ 是 $F$ 的逆映射。 □




$P = O + e_1 + e_2$
坐标为 $(1, 1)$

图 1.3: 非正交框架中的点 $P = O + e_1 + e_2$。两条虚线分别平行于 $e_2$ 和 $e_1$；它们组成向量加法的平行四边形。

## 1.4　内积与长度

**定义 1.20** (内积)**.** 向量空间 $V$ 上的内积是映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

满足对任意 $u, v, w \in V$ 和 $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle , \qquad \langle su + tv, w \rangle = s \langle u, w \rangle + t \langle v, w \rangle ,$$

以及正定性

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \qquad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0.$$

**例 1.21** (标准内积)**.** 在 $\mathbb{R}^n$ 上令

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

交换 $x, y$ 不改变各项乘积，故它对称；逐项展开 $\sum_i (ax_i + by_i) z_i = a \sum_i x_i z_i + b \sum_i y_i z_i$，得到第一变量的线性性。又 $\langle x, x \rangle = \sum_i x_i^2 \geq 0$；若它为零，每项平方都只能为零，所以 $x = 0$。故此式确实定义内积。

由对称性和第一变量的线性性，第二变量也线性:

$$\langle u, sv + tw \rangle = \langle sv + tw, u \rangle = s \langle v, u \rangle + t \langle w, u \rangle = s \langle u, v \rangle + t \langle u, w \rangle .$$

若仿射空间 $\mathcal{A}$ 的平移向量空间 $V$ 给定了内积，则称 $\mathcal{A}$ 为欧氏仿射空间；本章此后的距离均由该内积定义。

**定义 1.22** (范数)**.** 实向量空间上的函数 $N : V \to [0, \infty)$ 称为范数，如果

$$N(v) = 0 \iff v = 0, \qquad N(tv) = |t| N(v), \qquad N(u + v) \leq N(u) + N(v).$$

**定义 1.23** (内积诱导的长度与距离)**.** 由内积定义

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \qquad d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| .$$

对 $x \in V$ 和 $r > 0$，定义开球与闭球

$$B(x, r) = \{ y : \|y - x\| < r \}, \qquad \overline{B}(x, r) = \{ y : \|y - x\| \leq r \}.$$

**引理 1.24** (二次式非负判据)**.** 设 $a>0$，若

$$at^2+2bt+c\geq 0 \qquad (t\in\mathbb{R}),$$

则 $b^2\leq ac$。

证明. 配方得到

$$at^2+2bt+c=a\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}.$$

取 $t=-b/a$，非负性给出 $c-b^2/a\geq 0$。因 $a>0$，乘以 $a$ 得 $b^2\leq ac$。 □

**定理 1.25** (Cauchy–Schwarz 不等式)**.** 对任意 $u,v\in V$，有

$$|\langle u,v\rangle|\leq \|u\|\,\|v\|.$$

等号当且仅当 $u,v$ 线性相关。

证明. 若 $u=0$，两侧均为零，且 $u,v$ 线性相关。以下设 $u\neq 0$，于是 $a=\langle u,u\rangle>0$。对任意 $t\in\mathbb{R}$，正定性给出

$$0\leq \|v-tu\|^2=\langle v-tu,v-tu\rangle=\langle v,v\rangle-2t\langle u,v\rangle+t^2\langle u,u\rangle.$$

将

$$a=\langle u,u\rangle,\qquad b=-\langle u,v\rangle,\qquad c=\langle v,v\rangle$$

代入引理，得到

$$\langle u,v\rangle^2\leq\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle.$$

两侧开平方即得不等式。

若等号成立，则二次式 $\|v-tu\|^2$ 的最小值为零。取

$$t_0=\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle},$$

此时

$$\|v-t_0u\|^2=\|v\|^2-\frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}=0.$$

由正定性，$v=t_0u$。反过来，当 $u\neq 0$ 且 $u,v$ 线性相关时，存在 $t\in\mathbb{R}$ 使 $v=tu$，于是

$$|\langle u,v\rangle|=|t|\,\|u\|^2=\|u\|\;\|tu\|.$$

结合已处理的 $u=0$ 情形，得到全部等号条件。 □

**定理 1.26** (三角不等式与范数公理)**.** 对任意 $u,v\in V$，有

$$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|.$$

因此 $\|\cdot\|$ 是范数，且 $d$ 是度量。

证明. 先由内积双线性和对称性计算

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

两侧非负，开平方得到三角不等式。正定性给出 $\|u\| = 0 \iff u = 0$，绝对齐次性来自

$$\|tu\|^2 = t^2\|u\|^2.$$

对距离，非负性来自范数的非负性；而

$$d(P,Q) = 0 \iff \overrightarrow{PQ} = 0 \iff P = Q.$$

又由 $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$ 及绝对齐次性，$d(Q,P) = d(P,Q)$。三角不等式为

$$d(P,R) = \left\|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right\| \le d(P,Q) + d(Q,R).$$

□

**推论 1.27** (等号条件)**.** *若 $u, v \neq 0$，则*

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

*当且仅当存在 $t \ge 0$ 使 $v = tu$。*

证明. 将所给等式两侧平方，并用 $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$，消去相同项，得到 $\langle u,v\rangle = \|u\|\,\|v\|$。由 Cauchy–Schwarz 等号条件，存在 $t \in \mathbb{R}$ 使 $v = tu$。代入上式得 $t\|u\|^2 = |t|\,\|u\|^2$。因为 $\|u\|^2 > 0$，所以 $t = |t|$，即 $t \ge 0$。反过来，若 $v = tu$、$t \ge 0$，则

$$\|u+v\| = \|(1+t)u\| = (1+t)\|u\| = \|u\| + \|tu\| = \|u\| + \|v\|.$$

□

**命题 1.28** (平行四边形恒等式与极化公式)**.** *对任意 $u, v \in V$，*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

*并且*

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big).$$

证明. 展开两项：

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2,$$
$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2.$$

相加和相减分别得到两个公式。 □

## 1.5　角度、正交基与 Gram 矩阵

**定义 1.29** (正交)**.** 若 $\langle u, v\rangle = 0$，称 $u, v$ 正交，记作 $u \perp v$。

**定义 1.30** (向量的夹角)**.** 设 $u, v \neq 0$。由 Cauchy–Schwarz 不等式，

$$-1 \le \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \le 1.$$

因此可以定义

$$\angle(u, v) = \arccos\!\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right) \in [0, \pi].$$

若 $P, Q, R$ 满足 $P \neq Q$、$R \neq Q$，则点角 $\angle PQR$ 定义为 $\angle(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR})$。

**命题 1.31** (特殊夹角的判别)**.** 对非零向量 $u, v$，有

$$\angle(u, v) = 0 \iff v = tu,\ \text{其中} t > 0;$$

$$\angle(u, v) = \pi \iff v = tu,\ \text{其中} t < 0;$$

$$\angle(u, v) = \pi/2 \iff u \perp v.$$

*证明.* 因 $\cos$ 在 $[0, \pi]$ 上单射，且在 $0, \pi, \pi/2$ 处的值分别为 $1, -1, 0$，按夹角定义，这三个条件分别等价于

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|, \qquad \langle u, v\rangle = -\|u\|\,\|v\|, \qquad \langle u, v\rangle = 0.$$

第三个等价关系就是正交的定义。对前两个，Cauchy–Schwarz 的等号条件给出 $v = tu$，且 $v \neq 0$ 保证 $t \neq 0$。此时

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{t\,\|u\|^2}{|t|\,\|u\|^2} = \frac{t}{|t|}.$$

它等于 $1$ 当且仅当 $t > 0$，等于 $-1$ 当且仅当 $t < 0$。这也同时验证了两个反向蕴含。 □

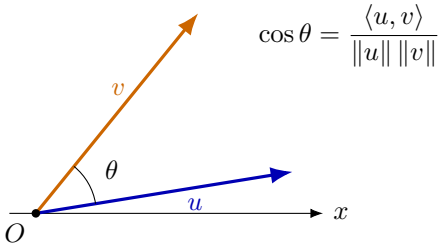



图 1.4: 夹角由内积的归一化值决定；箭头方向决定夹角取值在 $0$ 与 $\pi$ 之间的位置。

**命题 1.32** (勾股恒等式与正交的判别)**.** 对任意 $u, v \in V$，以下命题等价：

1. $u \perp v$；
2. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$；
3. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$。

证明. 由展开式

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2,$$

所以 $u \perp v$ 当且仅当第二条成立。将 $v$ 换成 $-v$，得到

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2,$$

故第一条也当且仅当第三条成立。 □

**定义 1.33** (正交族与正交标准族)**.** 向量族 $u_1, \dots, u_k$ 称为正交族，如果

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0 \qquad (i \neq j).$$

若每个 $u_i$ 还满足 $\|u_i\| = 1$，则称为正交标准族。

**命题 1.34** (正交族的线性无关性)**.** 非零正交族必线性无关。

证明. 若

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0,$$

固定 $j$，与 $u_j$ 取内积，得到

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i u_i, u_j \right\rangle = a_j \|u_j\|^2,$$

因为 $u_i \perp u_j$ $(i \neq j)$。由于 $u_j \neq 0$，$\|u_j\|^2 > 0$，故 $a_j = 0$。对每个 $j$ 重复此论证即得所有系数均为零。 □

**定理 1.35** (Gram–Schmidt 正交化)**.** 设 $v_1, \dots, v_k$ 是内积空间中的线性无关向量。递归定义

$$u_1 = v_1, \qquad u_m = v_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, u_j\rangle}{\|u_j\|^2} u_j \quad (2 \le m \le k).$$

则 $u_1, \dots, u_k$ 是正交族，且

$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) \quad (1 \le m \le k).$$

特别地，令 $e_m = u_m / \|u_m\|$，就得到同一子空间的正交标准基。

证明. 先证递归中的每个 $u_m$ 都非零。假设 $u_1, \dots, u_{m-1}$ 已经构造并且 $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_{m-1}) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{m-1})$。若 $u_m = 0$，则递推公式给出

$$v_m = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, u_j\rangle}{\|u_j\|^2} u_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{m-1}),$$

这与 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关矛盾。因此 $\|u_m\| > 0$。

对任意 $1 \le \ell < m$，由正交性归纳假设，

$$\begin{aligned} \langle u_m, u_\ell\rangle &= \langle v_m, u_\ell\rangle - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, u_j\rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_\ell\rangle \\ &= \langle v_m, u_\ell\rangle - \frac{\langle v_m, u_\ell\rangle}{\|u_\ell\|^2} \|u_\ell\|^2 = 0. \end{aligned}$$

所以 $u_m$ 与此前每个 $u_\ell$ 正交。

递推公式还给出 $u_m \in \operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)$，故 $\operatorname{span}(u_1,\dots,u_m) \subseteq \operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)$。反过来，

$$v_m = u_m + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, u_j\rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

说明 $v_m \in \operatorname{span}(u_1,\dots,u_m)$，从而得到反向包含。归纳完成后，$e_m = u_m/\|u_m\|$ 保持正交性并具有单位长度。 □

**推论 1.36** (有限维空间的正交标准基)**.** *每个 $n$ 维内积空间都有正交标准基。若 $e_1,\dots,e_n$ 是正交标准基，则每个 $v \in V$ 唯一表示为*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle\, e_i, \qquad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle^2 .$$

*证明.* 取 $V$ 的任意线性基，应用 Gram–Schmidt 定理即可得到正交标准基。对 $v$ 的坐标表示 $v = \sum_i a_i e_i$ 与 $e_j$ 取内积，得

$$\langle v, e_j\rangle = \sum_i a_i \langle e_i, e_j\rangle = a_j,$$

所以 $a_j = \langle v, e_j\rangle$。再计算

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \left\langle \sum_i a_i e_i, \sum_j a_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_i a_i^2 + \sum_{i\neq j} a_i a_j \cdot 0 = \sum_i \langle v, e_i\rangle^2 .\end{aligned}$$

其中对角项使用了 $\langle e_i, e_i\rangle = 1$，非对角项使用了 $\langle e_i, e_j\rangle = 0$。 □

**命题 1.37** (Gram 矩阵与坐标内积)**.** *给定 $v_1,\dots,v_k \in V$，定义 Gram 矩阵*

$$G = (\langle v_i, v_j\rangle)_{1\le i,j\le k}.$$

*它是对称半正定矩阵；若 $v_1,\dots,v_k$ 线性无关，则 $G$ 正定。反过来，每个对称正定矩阵 $G \in \mathbb{R}^{k\times k}$ 都定义 $\mathbb{R}^k$ 上的内积*

$$\langle x, y\rangle_G = x^{\mathsf T} G y.$$

*证明.* 由内积的对称性，

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \langle v_j, v_i\rangle = G_{ji},$$

所以 $G^{\mathsf T} = G$。对任意 $a = (a_1,\dots,a_k)^{\mathsf T}$，

$$a^{\mathsf T} G a = \sum_{i,j} a_i a_j \langle v_i, v_j\rangle = \left\| \sum_i a_i v_i \right\|^2 \ge 0.$$

若 $v_i$ 线性无关且 $a \neq 0$，则 $\sum_i a_i v_i \neq 0$，从而上式严格为正，故 $G$ 正定。反过来，设 $G$ 为对称正定矩阵。对实数 $a, b$ 及向量 $x, y, z$，

$$(ax + by)^{\mathsf T} G z = a\, x^{\mathsf T} G z + b\, y^{\mathsf T} G z.$$

这给出第一变量的线性性。又因为 $x^{\mathsf{T}}Gy$ 是实数，它等于自身的转置，故

$$x^{\mathsf{T}}Gy = (x^{\mathsf{T}}Gy)^{\mathsf{T}} = y^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}x = y^{\mathsf{T}}Gx.$$

这给出对称性。若 $x \neq 0$，正定性给出 $\langle x, x\rangle_G = x^{\mathsf{T}}Gx > 0$；若 $x = 0$，此值为零。因此它满足内积的全部公理。 □

## 1.6 正交投影与距离的最小性

**定义 1.38** (点到集合的距离)**.** 在欧氏仿射空间中，对点 $P$ 和非空集合 $B \subseteq \mathcal{A}$，定义

$$d(P, B) = \inf\{d(P, Q) : Q \in B\}.$$

右端集合非空且以 0 为下界，故由实数的下确界性质，此值存在。若某个 $Q_0 \in B$ 满足 $d(P, Q_0) = d(P, B)$，则称 $Q_0$ 为 $P$ 在 $B$ 中的最近点。下确界不必由集合中的点达到；例如在实直线上，$d(0, (0, 1)) = 0$，而 $(0, 1)$ 中没有距 0 为零的点。事实上，距离都为正，但对任意 $\varepsilon > 0$，取 $q = \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$，便有 $q \in (0, 1)$ 且 $q < \varepsilon$。

**定义 1.39** (正交补)**.** 若 $W \leq V$，定义正交补

$$W^{\perp} = \{z \in V : \langle z, w\rangle = 0 \text{ 对所有} w \in W\}.$$

**命题 1.40** (正交补的线性结构)**.** *若 $W \leq V$，则 $W^{\perp} \leq V$，并且*

$$W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}.$$

*证明.* 零向量与 $W$ 中每个向量正交，所以 $0 \in W^{\perp}$。若 $z_1, z_2 \in W^{\perp}$、$a, b \in \mathbb{R}$，则对任意 $w \in W$，

$$\langle az_1 + bz_2, w\rangle = a\langle z_1, w\rangle + b\langle z_2, w\rangle = 0.$$

故 $az_1 + bz_2 \in W^{\perp}$，这证明了 $W^{\perp}$ 是线性子空间。若 $w \in W$、$z \in W^{\perp}$，对称性给出 $\langle w, z\rangle = \langle z, w\rangle = 0$，所以 $w \in (W^{\perp})^{\perp}$。 □

**定理 1.41** (有限维正交分解)**.** *设 $W \leq V$ 且 $\dim W = m < \infty$。取 $W$ 的正交标准基 $e_1, \ldots, e_m$，定义*

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^{m} \langle v, e_j\rangle\, e_j, \qquad v_{\perp} = v - P_W(v).$$

*则*

$$v = P_W(v) + v_{\perp}, \qquad P_W(v) \in W, \qquad v_{\perp} \in W^{\perp}.$$

*而且这是唯一具有此性质的分解；对于仿射子空间 $P_0 + W$，$P_0 + P_W(\overrightarrow{P_0P})$ 是 $P$ 在该仿射子空间上的唯一最近点。*

*证明.* 每个 $e_j \in W$，而 $W$ 对线性组合封闭，故 $P_W(v) \in W$。对任意 $i$，由正交标准性，

$$\langle v_{\perp}, e_i\rangle = \langle v, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle v, e_j\rangle\langle e_j, e_i\rangle = \langle v, e_i\rangle - \langle v, e_i\rangle = 0.$$

因为 $e_1, \ldots, e_m$ 张成 $W$，线性性说明 $v_{\perp} \perp w$ 对所有 $w \in W$ 成立，即 $v_{\perp} \in W^{\perp}$。

若 $v = w + z$，其中 $w \in W$、$z \in W^\perp$，则 $w - P_W(v) \in W$，并且对每个 $e_i$，

$$\langle w - P_W(v), e_i\rangle = \langle v - z, e_i\rangle - \langle P_W(v), e_i\rangle = \langle v, e_i\rangle - 0 - \langle v, e_i\rangle = 0.$$

令 $a = w - P_W(v)$。因 $a \in W$，写 $a = \sum_i a_i e_i$。取内积得 $a_i = \langle a, e_i\rangle = 0$，故 $a = 0$。因此 $w = P_W(v)$，进而 $z = v_\perp$。当 $W = \{0\}$ 时，取空基并约定空和为零，分解为 $v = 0 + v$，唯一性也成立。

令 $v = \overrightarrow{P_0P}$。任意 $Q \in P_0 + W$ 都可写成 $Q = P_0 + w$，于是

$$\overrightarrow{QP} = v - w = v_\perp + \big(P_W(v) - w\big),$$

其中两项分别属于 $W^\perp$ 与 $W$，彼此正交。因此

$$d(P, Q)^2 = \|v_\perp\|^2 + \|P_W(v) - w\|^2 \geq \|v_\perp\|^2,$$

等号当且仅当 $w = P_W(v)$。这给出唯一最近点 $P_0 + P_W(v)$。 □

**推论 1.42** (正交投影的性质)**.** *正交投影 $P_W$ 不依赖所取的正交标准基，并且*

$$P_W^2 = P_W, \quad \operatorname{im} P_W = W, \quad \ker P_W = W^\perp, \quad \|P_W v\| \leq \|v\|.$$

*此外，$V = W \oplus W^\perp$，且 $(W^\perp)^\perp = W$。*

*证明.* 若另取 $W$ 的正交标准基，得到的投影仍将 $v$ 分解为一个 $W$ 中的向量和一个 $W^\perp$ 中的向量。分解唯一，所以两种投影相同。由有限和公式及内积的线性性，对实数 $a, b$，

$$P_W(av + bu) = \sum_j (a\langle v, e_j\rangle + b\langle u, e_j\rangle)e_j = aP_W v + bP_W u.$$

故投影是线性映射。若 $w \in W$，分解 $w = w + 0$ 的唯一性给出 $P_W w = w$。因此投影的像恰为 $W$，且 $P_W(P_W v) = P_W v$。若 $v \in W^\perp$，分解 $v = 0 + v$ 给出 $P_W v = 0$；反过来，若 $P_W v = 0$，则 $v = v - P_W v \in W^\perp$。故核恰为 $W^\perp$。由正交分解及勾股恒等式，

$$\|v\|^2 = \|P_W v\|^2 + \|v - P_W v\|^2 \geq \|P_W v\|^2.$$

开平方给出所需估计。

分解的存在性说明 $V = W + W^\perp$。若 $z \in W \cap W^\perp$，则 $\langle z, z\rangle = 0$，故 $z = 0$，所以该和为直和。已知 $W \subseteq (W^\perp)^\perp$。若 $v \in (W^\perp)^\perp$，写 $v = w + z$，其中 $w \in W$、$z \in W^\perp$。于是

$$0 = \langle v, z\rangle = \langle w, z\rangle + \langle z, z\rangle = \|z\|^2.$$

故 $z = 0$、$v = w \in W$，证明反向包含。 □

**命题 1.43** (投影到一条直线)**.** *设 $u \neq 0$。对任意 $v \in V$，令*

$$\operatorname{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} u, \qquad v_\perp = v - \operatorname{proj}_u(v).$$

*则*

$$v = \operatorname{proj}_u(v) + v_\perp, \qquad v_\perp \perp u.$$

*并且 $\operatorname{proj}_u(v)$ 是 $v$ 到直线 $\mathbb{R}u$ 的唯一最近点。*

证明. 记 $p = \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2}u$。则

$$\langle v-p,u\rangle = \langle v,u\rangle - \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2}\langle u,u\rangle = 0.$$

所以 $v-p \perp u$，第一组结论成立。

对任意 $t\in\mathbb{R}$，将 $v-tu$ 写成

$$v-tu = (v-p)+(p-tu).$$

第一项正交于第二项，故由展开式

$$\|v-tu\|^2 = \|v-p\|^2 + \|p-tu\|^2 \geq \|v-p\|^2.$$

当且仅当 $p-tu=0$，即 $tu=p$ 时取等号。由于 $u\neq 0$，此时 $t$ 唯一。 □

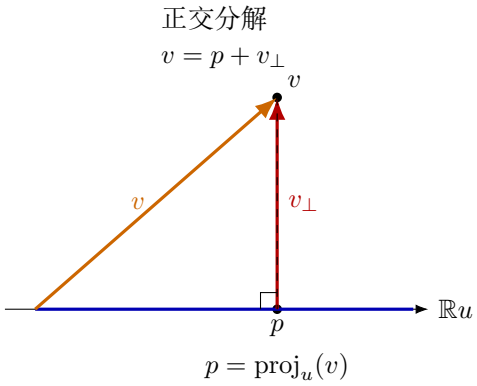



图 1.5: 投影公式把 $v$ 分解为沿 $\mathbb{R}u$ 的部分和垂直部分。垂线的长度给出到该直线的最短距离。

**推论 1.44** (直线与超平面的距离公式). 设 $P_0\in\mathcal{A}$、$u\neq 0$。点 $P$ 到直线

$$L = P_0 + \mathbb{R}u$$

的距离为

$$d(P,L) = \left\| \overrightarrow{P_0P} - \frac{\left\langle \overrightarrow{P_0P}, u\right\rangle}{\|u\|^2}u \right\|.$$

若 $n\neq 0$，则超平面

$$H = \{P_0 + v : \langle v,n\rangle = 0\}$$

满足

$$d(P,H) = \frac{|\left\langle \overrightarrow{P_0P}, n\right\rangle|}{\|n\|}.$$

证明. 第一式是投影命题应用于 $v=\overrightarrow{P_0P}$。对第二式，把 $v$ 分解为

$$v = v_0 + \frac{\langle v,n\rangle}{\|n\|^2}n, \qquad v_0\perp n.$$

记 $\alpha = \langle v, n\rangle / \|n\|^2$。对任意 $Q = P_0 + w \in H$，有 $w \perp n$，于是 $v_0 - w \perp n$。勾股恒等式给出

$$d(P,Q)^2 = \|v - w\|^2 = \|v_0 - w\|^2 + \alpha^2 \|n\|^2 \geq \alpha^2 \|n\|^2 .$$

取 $w = v_0$ 时达到等号，故最近点为 $P_0 + v_0$，最短距离为

$$\left\| \frac{\langle v, n\rangle}{\|n\|^2} n \right\| = \frac{|\langle v, n\rangle|}{\|n\|}.$$

□

## 1.7 正交变换与反射

**定义 1.45** (正交变换与等距仿射映射)**.** 线性映射 $Q : V \to V$ 称为正交变换，如果

$$\langle Qu, Qv\rangle = \langle u, v\rangle \qquad (u, v \in V).$$

仿射映射 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 称为等距，如果

$$d(F(P), F(Q)) = d(P, Q) \qquad (P, Q \in \mathcal{A}).$$

**命题 1.46** (正交变换的等价刻画)**.** *对线性映射 $Q : V \to V$，以下命题等价：*

1. *$Q$ 是正交变换；*
2. *$\|Qu\| = \|u\|$ 对所有 $u \in V$ 成立；*
3. *在任意一组正交标准基下，$Q$ 的矩阵 $M$ 满足 $M^{\mathsf{T}} M = I$。*

*证明.* (1) 蕴含 (2) 直接由

$$\|Qu\|^2 = \langle Qu, Qu\rangle = \langle u, u\rangle .$$

若 (2) 成立，对任意 $u, v$ 使用极化公式：

$$\langle Qu, Qv\rangle = \frac{1}{4}\big(\|Q(u+v)\|^2 - \|Q(u-v)\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big) = \langle u, v\rangle .$$

所以得到 (1)。

在正交标准基 $e_1, \dots, e_n$ 下，令 $M$ 为 $Q$ 的矩阵。其第 $j$ 列是 $Qe_j$ 的坐标，所以

$$(M^{\mathsf{T}} M)_{ij} = \langle Qe_i, Qe_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

其中 $\delta_{ij}$ 在 $i = j$ 时为 1，在 $i \neq j$ 时为 0。这说明 (1) 蕴含 (3)。反过来，设矩阵 $M$ 满足 $M^{\mathsf{T}} M = I$。若 $u, v$ 在该正交标准基下的坐标分别为 $a, b$，则 $Qu, Qv$ 的坐标为 $Ma, Mb$，于是

$$\langle Qu, Qv\rangle = (Ma)^{\mathsf{T}}(Mb) = a^{\mathsf{T}} M^{\mathsf{T}} M b = a^{\mathsf{T}} b = \langle u, v\rangle .$$

所以得到 (1)。 □

**命题 1.47** (仿射等距映射的基本形式)**.** *固定 $O \in \mathcal{A}$。若 $Q : V \to V$ 正交、$b \in V$，则*

$$F(P) = O + \big(Q(\overrightarrow{OP}) + b\big)$$

*是等距仿射映射。每个等距仿射映射均有此形式。它是双射，且*

$$F^{-1}(R) = O + Q^{-1}\big(\overrightarrow{OR} - b\big).$$

证明. 定义式给出 $F(P+v)=F(P)+Qv$，所以 $F$ 仿射。对任意 $P,R$，

$$\overrightarrow{F(P)F(R)}=Q(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP})=Q(\overrightarrow{PR}),$$

故

$$d(F(P),F(R))=\left\|Q(\overrightarrow{PR})\right\|=\left\|\overrightarrow{PR}\right\|=d(P,R).$$

反过来，设 $F$ 是等距仿射映射，线性部分为 $L$，令 $b=\overrightarrow{OF(O)}$。则 $F(P)=O+(L(\overrightarrow{OP})+b)$。对每个 $v\in V$，等距性给出

$$\|Lv\|=d(F(O+v),F(O))=d(O+v,O)=\|v\|.$$

由命题 1.46，$L$ 正交。

若 $Qv=0$, 则 $\|v\|=\|Qv\|=0$, 故 $v=0$, 所以 $Q$ 单射。因 $V$ 有限维且定义域和值域相同，秩与零化度公式给出 $\dim Q(V)=\dim V$，故 $Q$ 也满射。对上式中的 $R$，令 $v=Q^{-1}(\overrightarrow{OR}-b)$，则 $F(O+v)=O+(Qv+b)=R$。反向代入也有 $Q^{-1}(\overrightarrow{QOP}+b-b)=\overrightarrow{OP}$，所以所给公式确为逆映射。 □

**定义 1.48** (关于超平面的反射)**.** 设 $n\neq 0$，且

$$H=\{v\in V:\langle v,n\rangle=0\}.$$

定义

$$\sigma_H(v)=v-2\frac{\langle v,n\rangle}{\|n\|^2}n.$$

**命题 1.49** (反射公式)**.** $\sigma_H$ 是正交变换，满足

$$\sigma_H(v)=v\quad(v\in H),\qquad \sigma_H(n)=-n,\qquad \sigma_H^2=I.$$

证明. 内积对 $v$ 线性，故

$$\sigma_H(av+bw)=av+bw-2\frac{a\langle v,n\rangle+b\langle w,n\rangle}{\|n\|^2}n=a\sigma_H(v)+b\sigma_H(w).$$

所以 $\sigma_H$ 是线性映射。将 $v$ 分解为

$$v=v_0+\alpha n,\qquad v_0\perp n,\qquad \alpha=\frac{\langle v,n\rangle}{\|n\|^2}.$$

则

$$\sigma_H(v)=v_0-\alpha n.$$

因为 $v_0\perp n$，勾股恒等式给出

$$\|\sigma_H(v)\|^2=\|v_0\|^2+\alpha^2\|n\|^2=\|v\|^2.$$

由命题 1.46, 它是正交变换。若 $v\in H$, 则 $\alpha=0$, 所以 $\sigma_H(v)=v$; 对 $v=n$ 有 $\sigma_H(n)=-n$; 再次应用公式把 $\alpha$ 变为 $-\alpha$，于是 $\sigma_H^2(v)=v$。 □

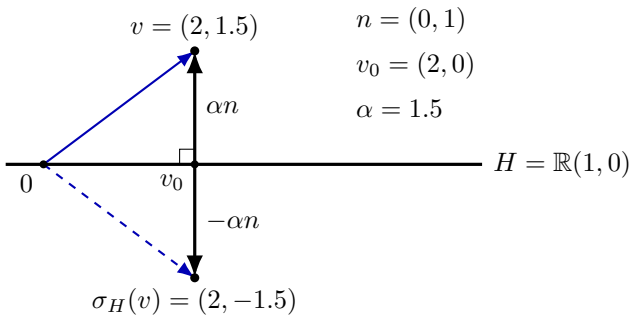



图 1.6: 在 $\mathbb{R}^2$ 中取 $H=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$。反射保留 $v_0$，将法向分量 $\alpha n$ 变为 $-\alpha n$。

## 1.8　例子与范数比较

**例 1.50** (系数和不为一时原点依赖)**.** 在实直线上取两个点 $P,Q$，考虑

$$P+Q$$

这一形式。若原点从 $O$ 改为 $O'=O+a$，两个位置向量分别减少 $a$，因此形式表达式的坐标减少 $2a$。所以它不定义一个与原点无关的点。相反，对系数和为一的表达式

$$\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}Q,$$

坐标总变化为

$$-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)a=-a,$$

正好是同一坐标点从 $O$ 改到 $O'$ 时应有的变化。

**例 1.51** (正定性不可省略)**.** 若只要求双线性和对称性而不要求正定性，则

$$B((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1-x_2y_2$$

是对称双线性型，但

$$B((1,1),(1,1))=0$$

而 $(1,1)\neq 0$。由它定义的“长度”会把非零向量判为零，也无法得到度量。

**命题 1.52** (三个坐标范数)**.** 在 $\mathbb{R}^n$ 上，

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\qquad \|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2},\qquad \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

都是范数。

*证明.* 三者均非负。若其中任一个为零，则每个 $|x_i|$ 都为零，故 $x=0$；当 $x=0$ 时三者也都为零。对任意实数 $t$，

$$\sum_i|tx_i|=|t|\sum_i|x_i|,\quad \left(\sum_i t^2x_i^2\right)^{1/2}=|t|\left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2},\quad \max_i|tx_i|=|t|\max_i|x_i|.$$

这给出绝对齐次性。欧氏范数的三角不等式已在定理 1.26 中证明。其余两个分别满足

$$\|x+y\|_1 = \sum_i |x_i + y_i| \le \sum_i (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1 ,$$

以及对每个 $i$，

$$|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

在最后一式左端对 $i$ 取最大值，得到最大范数的三角不等式。 □

**命题 1.53** (有限维坐标中的范数比较)**.** *对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，三个坐标范数满足*

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2 \le n\, \|x\|_\infty .$$

*证明.* 第一不等式因为 $\|x\|_2^2$ 包含每个 $|x_i|^2$，故 $\|x\|_2 \ge |x_i|$ 对每个 $i$ 成立，取最大值得到。第二不等式由

$$\left(\sum_i |x_i|\right)^2 = \sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} |x_i||x_j| \ge \sum_i x_i^2 .$$

第三不等式是 Cauchy–Schwarz 应用于 $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ 与 $(1, \dots, 1)$：

$$\|x\|_1 \le \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_i 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\, \|x\|_2 .$$

最后

$$\|x\|_2^2 = \sum_i x_i^2 \le n\, \|x\|_\infty^2 .$$

□

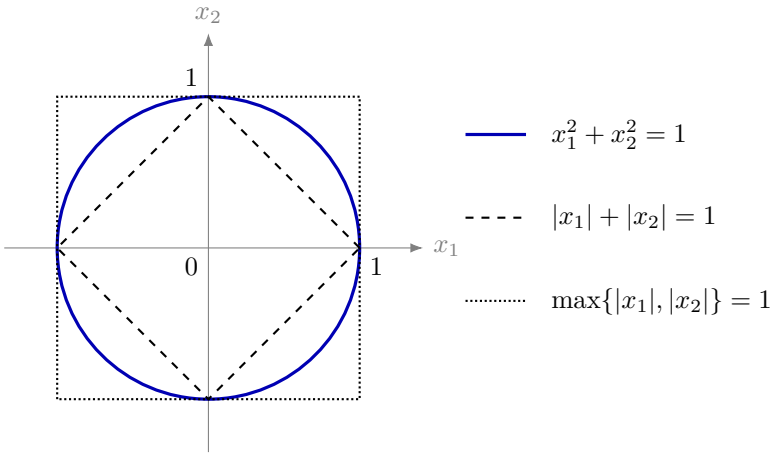



图 1.7: 三个坐标范数的单位球面。实线圆、虚线菱形和点线正方形都通过 $(1,0)$、$(0,1)$、$(-1,0)$ 和 $(0,-1)$。各自围成的闭区域为相应的闭单位球。从内到外，闭单位球依次为菱形、圆盘和正方形。

**注 1.54.** 这些不等式中的常数与 $x$ 无关。例如 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$。第二章的推论 2.43 将用这一估计比较三种度量的开集与完备性。

# 2 度量空间、邻域与收敛

第一章在仿射空间上由内积产生距离。本章只保留距离的三条公理，不使用点的加法、坐标或线性结构。由开球定义开集、内部、闭包和边界，再用序列描述收敛与完备性。

## 2.1 度量空间与基本例子

**定义 2.1** (度量空间)**.** 设 $X$ 是集合。映射

$$d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

称为 $X$ 上的度量，如果对任意 $x, y, z \in X$ 满足：

1. $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；
2. $d(x, y) = d(y, x)$；
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。

二元组 $(X, d)$ 称为度量空间。这里允许 $X = \varnothing$，此时三条公理没有待验证的点。

第一条把距离为零与点的相等联系起来；第二条说明方向不影响长度；第三条称为三角不等式。

**例 2.2** (欧氏度量与子空间度量)**.** 在 $\mathbb{R}^n$ 中，

$$d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

是欧氏度量。第一条和第二条直接来自平方和，第三条是第一章的三角不等式应用于 $x - y = (x - z) + (z - y)$。

若 $Y \subseteq X$，则

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2) \qquad (y_1, y_2 \in Y)$$

称为 $Y$ 的子空间度量。它不是重新选择一个距离，而是把原距离限制到 $Y \times Y$ 上；三条公理仍由 $X$ 中的三条公理逐项继承。

**例 2.3** (离散度量)**.** 在任意集合 $X$ 上定义

$$d_{\mathrm{disc}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

这是一个度量。三角不等式只有在 $x \neq z$ 时需要检查，此时左端为 1，而 $x \neq y$ 或 $y \neq z$ 至少有一个成立，故右端至少为 1。当 $0 < r \leq 1$ 时，条件 $d_{\mathrm{disc}}(x, y) < r$ 等价于 $y = x$。

**命题 2.4** (度量的有界化)**.** *若 $d$ 是 $X$ 上的度量，则*

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

*也是 $X$ 上的度量，并且 $0 \leq \rho(x, y) < 1$。*

证明. 非负性、对称性和 $\rho(x,y)=0 \iff d(x,y)=0 \iff x=y$ 是直接的。只需证明三角不等式。

令 $a=d(x,y)$、$b=d(y,z)$。对 $0\le s\le t$，有

$$\frac{t}{1+t}-\frac{s}{1+s}=\frac{t-s}{(1+t)(1+s)}\ge 0,$$

所以 $t\mapsto t/(1+t)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增。由 $d(x,z)\le a+b$，得到

$$\rho(x,z)\le \frac{a+b}{1+a+b}.$$

另一方面，

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{ab(a+b+2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}\ge 0.$$

于是

$$\rho(x,z)\le \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}=\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

□

**注 2.5.** 有界化把每个距离压缩到 $[0,1)$。它与原度量的开球、收敛列和柯西列之间的关系将在后面给出。

## 2.2 开球、闭球与相对邻域

**定义 2.6** (开球、闭球与球面)**.** 设 $(X,d)$ 是度量空间，$x\in X$、$r>0$。定义

$$B_d(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\},$$

$$\overline{B}_d(x,r)=\{y\in X: d(x,y)\le r\},\qquad S_d(x,r)=\{y\in X: d(x,y)=r\}.$$

分别称为以 $x$ 为中心、半径为 $r$ 的开球、闭球和球面。

**命题 2.7** (球的单调性与中心移动)**.** 对任意 $x\in X$ 和 $0<r<s$，有

$$B_d(x,r)\subseteq B_d(x,s),\qquad \overline{B}_d(x,r)\subseteq \overline{B}_d(x,s).$$

若 $y\in B_d(x,r)$，令 $\varepsilon=r-d(x,y)>0$，则

$$B_d(y,\varepsilon)\subseteq B_d(x,r).$$

证明. 前两条来自不等式 $d(x,z)<r<s$ 和 $d(x,z)\le r<s$。若 $z\in B_d(y,\varepsilon)$，则三角不等式给出

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)<d(x,y)+r-d(x,y)=r.$$

故 $z\in B_d(x,r)$。 □

**定义 2.8** (邻域与开集)**.** 集合 $N\subseteq X$ 称为点 $x\in X$ 的邻域，如果存在 $r>0$ 使

$$B_d(x,r)\subseteq N.$$

集合 $U\subseteq X$ 称为开集，如果 $U$ 是其中每一点的邻域，即

$$\forall x\in U\ \exists r_x>0,\qquad B_d(x,r_x)\subseteq U.$$

**定义 2.9** (闭集)**.** 集合 $F \subseteq X$ 称为闭集，如果 $X \setminus F$ 是开集。

**定理 2.10** (开球是开集)**.** 每个开球 $B_d(x,r)$ 都是开集。

证明. 取任意 $y \in B_d(x,r)$。由命题 2.7，令 $\varepsilon = r - d(x,y) > 0$，则

$$B_d(y,\varepsilon) \subseteq B_d(x,r).$$

因此开球中的每个点都拥有包含在该开球内的开球邻域，故 $B_d(x,r)$ 是开集。 □

**命题 2.11** (开集的运算)**.** 度量空间中的开集满足：

1. $\varnothing$ 与 $X$ 是开集；
2. 任意族开集的并是开集；
3. 有限个开集的交是开集。

证明. $\varnothing$ 中没有点需要验证，$X$ 对任意 $x$ 都包含 $B_d(x,1)$，所以二者开。

设 $U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$，取 $x \in U$。存在 $\alpha_0$ 使 $x \in U_{\alpha_0}$，再由 $U_{\alpha_0}$ 的开性取 $B_d(x,r) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq U$，故 $U$ 开。

设 $U = U_1 \cap \cdots \cap U_m$，取 $x \in U$。对每个 $j$ 取 $r_j > 0$ 使 $B_d(x,r_j) \subseteq U_j$，令 $r = \min_j r_j > 0$。则

$$B_d(x,r) \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} U_j = U,$$

所以有限交开。 □

**命题 2.12** (闭集的运算与闭球)**.** 任意族闭集的交是闭集，有限个闭集的并是闭集。每个闭球和每个单点集都是闭集。

证明. 设每个 $F_\alpha$ 都闭。由 De Morgan 等式，

$$X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (X \setminus F_\alpha).$$

右端是开集的并，故交集闭。对有限个闭集，

$$X \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_m) = (X \setminus F_1) \cap \cdots \cap (X \setminus F_m)$$

是有限个开集的交，故并集闭。空族交按约定为 $X$，空族并为 $\varnothing$，它们的补集也开。

固定闭球 $\overline{B}_d(x,r)$。若 $y$ 不在其中，则 $\delta = d(x,y) - r > 0$。当 $d(y,z) < \delta$ 时，由三角不等式 $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$，得到

$$d(x,z) \ge d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \delta = r.$$

因此 $B_d(y,\delta)$ 包含于闭球的补集，故闭球闭。

固定 $x \in X$。对 $y \neq x$，取 $r = d(x,y)/2 > 0$。因为 $d(y,x) = 2r$，有 $x \notin B_d(y,r)$，即 $B_d(y,r) \subseteq X \setminus \{x\}$。故单点集的补集开。 □

**例 2.13** (无限交与无限并)**.** 在 $\mathbb{R}$ 的通常度量下，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}.$$

点 0 属于每个区间；若 $x \neq 0$，由阿基米德性质可取 $n > 1/|x|$，这时 $x \notin (-1/n, 1/n)$。单点集 $\{0\}$ 不开，因为 $B(0,r) = (-r,r)$ 对每个 $r > 0$ 都含有非零点。因此无限个开集的交未必开。取补集得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \big((-\infty, -1/n] \cup [1/n, \infty)\big) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

这也说明无限个闭集的并未必闭。

**定义 2.14** (相对开球与相对邻域)**.** 设 $A \subseteq X$，在 $A$ 上使用子空间度量。对 $a \in A$，

$$B_A(a,r) = \{b \in A : d(a,b) < r\} = A \cap B_X(a,r).$$

集合 $U \subseteq A$ 称为 $A$ 中的相对开集，如果对每个 $a \in U$ 存在 $r_a > 0$ 使 $B_A(a, r_a) \subseteq U$。

**定理 2.15** (相对开集与相对闭集)**.** 设 $A \subseteq X$、$U, F \subseteq A$。则

$$U \text{ 在} A \text{ 中开} \quad \Longleftrightarrow \quad U = A \cap G, \text{ 其中} G \text{ 在} X \text{ 中开};$$

$$F \text{ 在} A \text{ 中闭} \quad \Longleftrightarrow \quad F = A \cap C, \text{ 其中} C \text{ 在} X \text{ 中闭}.$$

*证明.* 若 $U = A \cap G$ 且 $G$ 开，对任意 $a \in U$，取 $r > 0$ 使 $B_X(a,r) \subseteq G$。于是 $B_A(a,r) = A \cap B_X(a,r) \subseteq A \cap G = U$，故 $U$ 相对开。

若 $U$ 相对开，对每个 $a \in U$ 选取 $r_a > 0$ 使 $A \cap B_X(a, r_a) \subseteq U$。令

$$G = \bigcup_{a \in U} B_X(a, r_a).$$

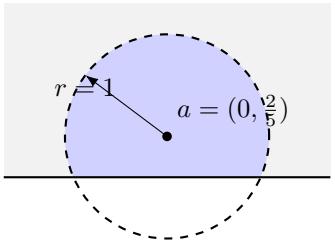
由开集的并仍开，$G$ 在 $X$ 中开。每个 $a \in U$ 都在自己的球内，所以 $U \subseteq A \cap G$。若 $b \in A \cap G$，则存在 $a \in U$ 使 $b \in A \cap B_X(a, r_a) \subseteq U$，故 $A \cap G \subseteq U$。当 $U = \varnothing$ 时，取 $G = \varnothing$ 仍成立。

按子空间中闭集的定义，$F$ 相对闭当且仅当 $A \setminus F$ 相对开。若 $A \setminus F = A \cap G$，其中 $G$ 在 $X$ 中开，则

$$F = A \setminus (A \cap G) = A \cap (X \setminus G),$$

其中 $X \setminus G$ 闭。反之，若 $F = A \cap C$ 且 $C$ 闭，则 $A \setminus F = A \cap (X \setminus C)$ 相对开，故 $F$ 相对闭。 □

**例 2.16** (相对开闭与环境空间有关)**.** 取 $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$。集合 $[0, 1/2)$ 在 $A$ 中开，因为它等于 $A \cap (-1, 1/2)$；它在 $\mathbb{R}$ 中不开，因为以 0 为中心的每个开区间都含有负数。集合 $F = (0,1]$ 在 $A' = (0,2)$ 中闭，因为 $F = A' \cap [0,1]$；它在 $\mathbb{R}$ 中不闭，因为其补集在 0 处不含任何开区间邻域。




$A = \{(x, y) : y \geq 0\}$

$B_A(a, 1) = A \cap B_{\mathbb{R}^2}(a, 1)$

阴影部分为相对开球

图 2.1: 半平面 $A$ 中的相对开球。虚线圆表示环境开球的球面，圆上点不属于开球。圆内且满足 $y \geq 0$ 的点属于相对开球，包括横轴上位于圆内的点。

## 2.3 内部、闭包与边界

**定义 2.17** (内部、闭包与边界)**.** 设 $A \subseteq X$。定义

$$A^\circ = \{x \in X : \exists r > 0,\ B_d(x, r) \subseteq A\},$$

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall r > 0,\ B_d(x, r) \cap A \neq \varnothing\},$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

分别称为 $A$ 的内部、闭包和边界。

**命题 2.18** (三种局部判别)**.** *对任意 $A \subseteq X$ 和 $x \in X$，有：*

$$\begin{aligned} x \in A^\circ &\iff \exists r > 0,\ B_d(x, r) \subseteq A, \\ x \in \overline{A} &\iff \forall r > 0,\ B_d(x, r) \cap A \neq \varnothing, \\ x \in \partial A &\iff \forall r > 0,\ B_d(x, r) \cap A \neq \varnothing \text{ 且 } B_d(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing. \end{aligned}$$

*证明.* 前两条就是定义。对第三条，若 $x \in \partial A$，则 $x \in \overline{A}$，所以每个球与 $A$ 相交。又因为 $x \notin A^\circ$，不存在球完全包含于 $A$，所以每个球都含有 $X \setminus A$ 中的点。反过来，若每个球都满足这两个相交条件，则第一个条件给出 $x \in \overline{A}$。第二个条件说明没有球能包含于 $A$，故 $x \notin A^\circ$。两者合起来给出 $x \in \partial A$。 □

**定理 2.19** (内部与闭包的基本性质)**.** *对 $A, B \subseteq X$，有：*

1. *$A^\circ$ 是开集，且 $A^\circ \subseteq A$；*
2. *$\overline{A}$ 是闭集，且 $A \subseteq \overline{A}$；*
3. *$A$ 开当且仅当 $A = A^\circ$；*
4. *$A$ 闭当且仅当 $A = \overline{A}$；*
5. *$A^\circ$ 是包含于 $A$ 的最大开集，$\overline{A}$ 是包含 $A$ 的最小闭集。*

*证明.* 若 $x \in A^\circ$，取 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \subseteq A$。对任意 $y \in B_d(x, r)$，由命题 2.7 可取 $\varepsilon > 0$ 使 $B_d(y, \varepsilon) \subseteq B_d(x, r) \subseteq A$。所以 $y \in A^\circ$，即 $A^\circ$ 开。包含关系由定义直接给出。

由闭包定义，$x \notin \overline{A}$ 当且仅当存在 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \cap A = \varnothing$，等价于 $B_d(x, r) \subseteq X \setminus A$。因此

$$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$$

是开集，故 $\overline{A}$ 闭。又 $A \subseteq \overline{A}$ 是因为 $x \in A$ 时任意球都含有 $x$。

第三条：若 $A$ 开，则按内部定义 $A \subseteq A^\circ$，与 $A^\circ \subseteq A$ 合并得到 $A = A^\circ$；反向由 $A = A^\circ$ 且 $A^\circ$ 开得到。第四条：若 $A$ 闭，则 $X \setminus A$ 开，从

$$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ = X \setminus A$$

得到 $A = \overline{A}$；反向由 $\overline{A}$ 闭得到。最后，若 $U \subseteq A$ 是开集，则每个 $x \in U$ 都有一个球包含于 $U \subseteq A$，所以 $x \in A^\circ$，即 $U \subseteq A^\circ$。若 $F$ 是包含 $A$ 的闭集，则 $X \setminus F$ 是开集且与 $A$ 不相交。对 $x \in X \setminus F$，存在 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \subseteq X \setminus F$，所以该球与 $A$ 不相交，$x \notin \overline{A}$。因此 $X \setminus F \subseteq X \setminus \overline{A}$，即 $\overline{A} \subseteq F$。 □

**命题 2.20** (内部与闭包的单调性及有限运算)**.** *若 $A \subseteq B \subseteq X$，则*

$$A^\circ \subseteq B^\circ, \qquad \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

*此外，*

$$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

*证明.* 若 $x \in A^\circ$，存在 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \subseteq A \subseteq B$，故 $x \in B^\circ$。若 $x \in \overline{A}$，任意 $r > 0$ 都有 $B_d(x, r) \cap A \neq \varnothing$。由 $A \subseteq B$，得到 $B_d(x, r) \cap B \neq \varnothing$，故 $x \in \overline{B}$。

若 $x \in A^\circ \cup B^\circ$，则存在一个以 $x$ 为中心的开球包含于 $A$ 或包含于 $B$。这个球包含于 $A \cup B$，所以 $x \in (A \cup B)^\circ$。

由 $A, B \subseteq A \cup B$ 及闭包的单调性，得到 $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$。反过来，若 $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$，则 $x \notin \overline{A}$ 且 $x \notin \overline{B}$。按闭包的定义，存在 $r_A, r_B > 0$ 使

$$B_d(x, r_A) \cap A = \varnothing, \qquad B_d(x, r_B) \cap B = \varnothing.$$

取 $r = \min\{r_A, r_B\} > 0$，则 $B_d(x, r) \cap (A \cup B) = \varnothing$，故 $x \notin \overline{A \cup B}$。取逆否命题得到 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$。

若 $x \in A^\circ \cap B^\circ$，存在 $r_A, r_B > 0$ 使 $B_d(x, r_A) \subseteq A$、$B_d(x, r_B) \subseteq B$。取两半径的最小值 $r > 0$，有 $B_d(x, r) \subseteq A \cap B$，所以 $x \in (A \cap B)^\circ$。反向包含由 $A \cap B \subseteq A, B$ 及内部的单调性得到。最后，同样由 $A \cap B \subseteq A, B$ 及闭包的单调性，分别得到

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}, \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}.$$

所以 $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$。 □

**例 2.21** (两处包含关系可以严格)**.** 在通常度量的实直线上，取 $A = (-1, 0]$、$B = (0, 1)$，则

$$A^\circ \cup B^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1), \qquad (A \cup B)^\circ = (-1, 1).$$

点 $0$ 属于右端而不属于左端。再取 $C = (-1, 0)$、$D = (0, 1)$，则 $C \cap D = \varnothing$，但

$$\overline{C} \cap \overline{D} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}.$$

这里的内部和闭包均可直接用开区间邻域判定：区间内的点有小区间留在原区间中，端点的每个邻域都遇到原区间，闭区间之外的点则有正距离避开该区间。

**推论 2.22** (补集关系与边界分解)**.** 有

$$(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}, \qquad \overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ,$$

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}, \qquad \overline{A} = A^\circ \sqcup \partial A.$$

证明. 第一式已在定理证明中得到。将第一式中的 $A$ 换成 $X \setminus A$, 并取补集, 得到第二式。由命题 2.18, 边界上的点恰好同时属于 $\overline{A}$ 和 $\overline{X \setminus A}$, 得到第三式; 最后一式来自 $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$。 □

**推论 2.23** (边界的闭性)**.** *$\partial A$ 是闭集, 且 $\partial A = \partial(X \setminus A)$。此外, $\partial A = \varnothing$ 当且仅当 $A$ 既开又闭。*

证明. 由上一推论, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$。两个闭集的交闭, 故边界闭。交换 $A$ 和 $X \setminus A$ 时右端不变, 故两者边界相同。若边界为空, 分解 $\overline{A} = A^\circ \sqcup \partial A$ 给出 $\overline{A} = A^\circ$。又 $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, 所以三者相等, 从而 $A$ 既开又闭。反过来, 若 $A$ 开且闭, 则 $A^\circ = A = \overline{A}$, 故 $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \varnothing$。 □

**命题 2.24** (闭球与开球闭包的区别)**.** *任意度量空间中都有*

$$\overline{B_d(x,r)} \subseteq \overline{B}_d(x,r).$$

*在欧氏空间中取 $r > 0$ 时等号成立; 在一般度量空间中可以严格包含。*

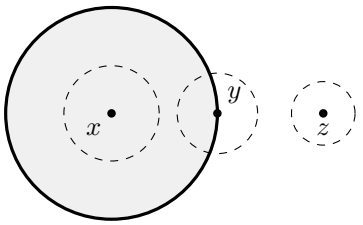
证明. 闭球是包含 $B_d(x,r)$ 的闭集。由闭包的最小性, $\overline{B_d(x,r)} \subseteq \overline{B}_d(x,r)$。

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 设 $\|y - x\|_2 \le r$, 定义

$$y_k = x + (1 - 1/k)(y - x) \qquad (k \ge 1).$$

有 $\|y_k - x\|_2 = (1 - 1/k)\|y - x\|_2 < r$, 且 $\|y_k - y\|_2 = \|y - x\|_2 / k \to 0$。给定 $\varepsilon > 0$, 取 $k > \|y - x\|_2 / \varepsilon$, 则 $y_k \in B_2(y,\varepsilon) \cap B_2(x,r)$。所以 $y$ 的每个球都与开球 $B_2(x,r)$ 相交, 即 $y \in \overline{B_2(x,r)}$, 这给出反向包含。

在至少含两个点的离散度量空间中, 取 $r = 1$, 有 $B_d(x,1) = \{x\}$。单点集闭, 故 $\overline{B_d(x,1)} = \{x\}$, 但 $\overline{B}_d(x,1) = X$。此时包含严格。 □




$A = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le 1\}$
$x \in A^\circ, \quad y \in \partial A$
$z \notin \overline{A}$

图 2.2: 闭单位圆盘的内部、边界和外部。取 $x = (0,0)$、$y = (1,0)$、$z = (2,0)$, 图中虚线圆分别以它们为中心。对任意 $r > 0$, 取 $0 < t < \min\{r, 1\}$, 则 $(1 - t, 0) \in A$、$(1 + t, 0) \notin A$, 且二者距 $y$ 均为 $t < r$。这验证了边界点的每个球都与两侧相交。

## 2.4 序列与度量收敛

**定义 2.25** (序列收敛)**.** 设 $(X,d)$ 是度量空间，$(x_n)_{n\ge 1}$ 是 $X$ 中的序列。若存在 $x\in X$，使得

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N,\qquad d(x_n,x)<\varepsilon,$$

则称 $(x_n)$ 收敛于 $x$，记为 $x_n\to x$。

**定理 2.26** (球语言与 $\varepsilon$-语言等价)**.** *对 $x_n,x\in X$，以下命题等价：*

1. $x_n\to x$；
2. *对每个 $r>0$，存在 $N$ 使 $n\ge N$ 时 $x_n\in B_d(x,r)$；*
3. *对每个 $r>0$，集合 $\{n: x_n\notin B_d(x,r)\}$ 是有限集。*

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)：在收敛定义中取 $\varepsilon=r$ 即得。

(2) $\Rightarrow$ (3)：若 $n\ge N$ 时 $x_n\in B_d(x,r)$，则不满足这一条件的 $n$ 只能属于有限集合 $\{1,\dots,N-1\}$。

(3) $\Rightarrow$ (1)：给定 $\varepsilon>0$，由第三条，$\{n: x_n\notin B_d(x,\varepsilon)\}$ 有限。若该集合为空，取 $N=1$；否则取其最大元加 1 为 $N$。于是 $d(x_n,x)<\varepsilon$ 对所有 $n\ge N$ 成立。 □

**定理 2.27** (度量空间中的极限唯一性)**.** *若 $x_n\to x$ 且 $x_n\to y$，则 $x=y$。*

证明. 若 $x\ne y$，令 $\varepsilon=d(x,y)/3>0$。由两个收敛条件，存在 $N_1,N_2$ 使

$$d(x_n,x)<\varepsilon\quad(n\ge N_1),\qquad d(x_n,y)<\varepsilon\quad(n\ge N_2).$$

取 $n\ge\max\{N_1,N_2\}$，三角不等式给出

$$d(x,y)\le d(x,x_n)+d(x_n,y)<2\varepsilon=\frac{2}{3}d(x,y),$$

矛盾。因此 $x=y$。 □

**命题 2.28** (距离函数对极限的稳定性)**.** *若 $x_n\to x$，则对任意固定 $y\in X$，有*

$$d(x_n,y)\longrightarrow d(x,y).$$

*更精确地，*

$$\bigl|d(x_n,y)-d(x,y)\bigr|\le d(x_n,x).$$

证明. 由三角不等式，

$$d(x_n,y)\le d(x_n,x)+d(x,y),$$

所以 $d(x_n,y)-d(x,y)\le d(x_n,x)$。交换 $x_n$ 与 $x$，得到

$$d(x,y)-d(x_n,y)\le d(x_n,x).$$

两式合并即得绝对值估计。右端趋于零，故左端趋于零。 □

**命题 2.29** (子列与尾列)**.** *若 $x_n\to x$，则：*

1. *任意子列 $x_{n_k}$ 都收敛于 $x$；*

*2. 删除有限项所得的尾列仍收敛于 $x$；*

*3. 若一个子列不收敛于 $x$，则原列不收敛于 $x$。*

证明. 子列指标满足 $n_k \geq k$，所以给定收敛定义中的 $N$，只要 $k \geq N$ 就有 $n_k \geq N$，从而 $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$。第二条是第一条应用于 $n_k = k + m$。第三条是第一条的逆否命题。 □

**定理 2.30** (闭集的序列判别). 集合 $F \subseteq X$ 闭，当且仅当：

$$x_n \in F,\quad x_n \to x \quad\Longrightarrow\quad x \in F.$$

证明. 先设 $F$ 闭。若 $x \notin F$，则 $X \setminus F$ 开，存在 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \subseteq X \setminus F$。若 $x_n \in F$，则所有 $n$ 都不属于这个球，因而不可能收敛于 $x$。故任意 $F$ 中收敛序列的极限仍在 $F$。

反过来，假设序列判别成立。若 $x \notin F$，我们证明存在球 $B_d(x, r)$ 与 $F$ 不相交。否则对每个 $n$ 都能选取 $x_n \in F \cap B_d(x, 1/n)$，于是 $x_n \to x$，由假设得到 $x \in F$，矛盾。因此 $X \setminus F$ 开，$F$ 闭。 □

**定理 2.31** (闭包的序列刻画). 对 $A \subseteq X$，

$$x \in \overline{A} \quad\Longleftrightarrow\quad 存在 a_n \in A \text{ 使 } a_n \to x.$$

证明. 若 $a_n \in A$ 且 $a_n \to x$，假设 $x \notin \overline{A}$，则存在 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \cap A = \varnothing$。但收敛性要求某个 $a_n \in B_d(x, r)$，矛盾。因此 $x \in \overline{A}$。

反过来，若 $x \in \overline{A}$，则对每个 $n$，$B_d(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing$。从中选择 $a_n \in B_d(x, 1/n) \cap A$，便有 $d(a_n, x) < 1/n \to 0$，所以 $a_n \to x$。 □

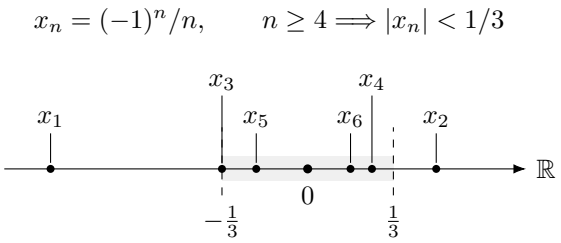



图 2.3: 交替序列在实直线上的位置。阴影表示开球 $B(0, 1/3) = (-1/3, 1/3)$，边界不计入。点 $x_3 = -1/3$ 仍在球外，从 $x_4$ 起所有项都在球内。一般地，取 $N > 1/\varepsilon$，便有 $n \geq N \Rightarrow |x_n| = 1/n < \varepsilon$。

## 2.5 度量空间中的柯西列

**定义 2.32** (柯西列). 度量空间 $(X, d)$ 中的序列 $(x_n)$ 称为柯西列，如果

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N, \qquad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

收敛要求所有后项靠近一个已经给定的点；柯西条件只比较后项之间的距离，不预先指定极限。收敛列必为柯西列；完备性讨论的是柯西列是否必有空间内的极限。

**定理 2.33** (收敛列是柯西列). 每个收敛序列都是柯西列。

证明. 设 $x_n \to x$。给定 $\varepsilon > 0$，取 $N$ 使

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geq N).$$

若 $m, n \geq N$，则

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 $(x_n)$ 是柯西列。 □

**定义 2.34** (有界集与有界序列)**.** 对非空集合 $A \subseteq X$，若存在 $a \in X$、$R > 0$ 使 $A \subseteq B_d(a, R)$，则称 $A$ 有界。另约定空集有界。若序列的值域 $\{x_n : n \geq 1\}$ 有界，则称该序列有界。

**命题 2.35** (柯西列的有界性与收敛子列)**.** 每个柯西列都有界。若柯西列 $(x_n)$ 有一个收敛于 $x$ 的子列，则 $x_n \to x$。

证明. 在柯西条件中取 $\varepsilon = 1$，得到 $N$，使 $m, n \geq N$ 时 $d(x_m, x_n) < 1$。特别地，$d(x_n, x_N) < 1$ 对 $n \geq N$ 成立。令

$$R = 1 + \max\big(\{1\} \cup \{d(x_i, x_N) : 1 \leq i < N\}\big).$$

所有前 $N-1$ 项及所有后项都在 $B_d(x_N, R)$ 中，所以序列有界。

设 $x_{n_k} \to x$。给定 $\varepsilon > 0$，先取 $N$ 使 $m, n \geq N$ 时 $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$。由子列收敛，可取足够大的 $k$，同时满足 $n_k \geq N$ 和 $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$。对每个 $n \geq N$，有

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

所以原列收敛于 $x$。 □

**定义 2.36** (完备度量空间)**.** 度量空间 $(X, d)$ 称为完备的，如果 $X$ 中每个柯西列都在 $X$ 中收敛。

**命题 2.37** (离散度量空间完备)**.** 任意离散度量空间都是完备的。

证明. 设 $(x_n)$ 是离散度量下的柯西列。取 $\varepsilon = 1/2$，存在 $N$ 使 $m, n \geq N$ 时 $d_{\text{disc}}(x_m, x_n) < 1/2$。由于离散距离只取 $0, 1$，这意味着 $x_m = x_n$ 对所有 $m, n \geq N$ 成立。因此序列从某一项开始恒定。若尾部恒定为 $a$，则对任意 $\varepsilon > 0$，取该尾部的起点 $N$，便有 $d_{\text{disc}}(x_n, a) = 0 < \varepsilon$ 对所有 $n \geq N$ 成立，所以序列收敛于 $a$。 □

**定理 2.38** ($\mathbb{R}^n$ 的完备性)**.** 在通常欧氏度量下，$\mathbb{R}^n$ 是完备的。

证明. 使用实数完备性：每个实数柯西列都收敛。设 $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的柯西列。对固定坐标 $j$，有

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(\ell)}| \leq \left\| x^{(m)} - x^{(\ell)} \right\|_2.$$

故 $(x_j^{(m)})_m$ 是实数柯西列，存在 $x_j \in \mathbb{R}$ 使 $x_j^{(m)} \to x_j$。令 $x = (x_1, \ldots, x_n)$。

给定 $\varepsilon > 0$，对每个 $j$ 取 $N_j$ 使

$$|x_j^{(m)} - x_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (m \geq N_j).$$

令 $N = \max_j N_j$，则 $m \ge N$ 时

$$\left\| x^{(m)} - x \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j|^2 < n \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 = \varepsilon^2.$$

所以 $x^{(m)} \to x$。 □

**例 2.39** ($\mathbb{Q}$ 的不完备性)**.** 将 $\mathbb{Q}$ 视为 $\mathbb{R}$ 的子空间。令

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n},$$

即把 $\sqrt{2}$ 的十进制展开截断到小数点后 $n$ 位。例如

$$a_1 = 1.4, \qquad a_2 = 1.41, \qquad a_3 = 1.414, \quad \dots$$

每个 $a_n$ 都是有理数。由整数部分满足 $t - 1 < \lfloor t \rfloor \le t$，有

$$0 \le \sqrt{2} - a_n < 10^{-n}.$$

故给定 $\varepsilon > 0$，取 $N$ 使 $2 \cdot 10^{-N} < \varepsilon$，则 $m, n \ge N$ 时

$$|a_m - a_n| \le |a_m - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - a_n| < 10^{-m} + 10^{-n} \le 2 \cdot 10^{-N} < \varepsilon.$$

因此 $(a_n)$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的柯西列。若它在 $\mathbb{Q}$ 中收敛于 $q$，则在 $\mathbb{R}$ 中也收敛于 $q$；但它在 $\mathbb{R}$ 中收敛于 $\sqrt{2}$，由极限唯一性 $q = \sqrt{2}$，与 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 矛盾。故 $\mathbb{Q}$ 不完备。

## 2.6 完备性、闭子空间与等价度量

**定理 2.40** (完备空间中的闭子空间)**.** *设 $(X, d)$ 完备，$F \subseteq X$ 使用子空间度量。则*

$$F \text{ 完备} \quad \Longleftrightarrow \quad F \text{ 在} X \text{ 中闭}.$$

*证明.* 先设 $F$ 闭。若 $(x_n)$ 是 $F$ 中的柯西列，它同时是 $X$ 中的柯西列，所以由 $X$ 完备，存在 $x \in X$ 使 $x_n \to x$。由于 $x_n \in F$ 且 $F$ 闭，定理 2.30 给出 $x \in F$，所以 $F$ 完备。

反过来设 $F$ 完备。若 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x$（极限在 $X$ 中），则 $(x_n)$ 是 $F$ 中的柯西列。由 $F$ 完备，存在 $y \in F$ 使 $x_n \to y$（使用子空间度量）。子空间度量与 $X$ 中的距离相同，故 $x_n \to y$ 也在 $X$ 中成立。极限唯一性给出 $x = y \in F$，再由闭集的序列判别，$F$ 闭。 □

**定义 2.41** (等价度量)**.** 集合 $X$ 上的两个度量 $d, \rho$ 称为拓扑等价，如果它们产生完全相同的开集。若存在常数 $c, C > 0$ 使

$$c\, d(x, y) \le \rho(x, y) \le C\, d(x, y) \qquad (x, y \in X),$$

则称 $d, \rho$ 双 Lipschitz 等价。

**定理 2.42** (双 Lipschitz 等价度量)**.** *若 $d, \rho$ 双 Lipschitz 等价，则它们产生相同的开集、相同的收敛列和相同的柯西列。因此 $(X, d)$ 完备当且仅当 $(X, \rho)$ 完备。*

证明. 对任意 $x \in X$、$r > 0$，不等式给出球的包含关系

$$B_d\Big(x, \frac{r}{C}\Big) \subseteq B_\rho(x, r) \subseteq B_d\Big(x, \frac{r}{c}\Big).$$

若 $U$ 是 $d$-开集，取 $x \in U$ 和 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \subseteq U$。由第二个包含关系，

$$B_\rho(x, cr) \subseteq B_d(x, r) \subseteq U,$$

所以 $U$ 是 $\rho$-开集。交换 $d, \rho$ 后得到反向包含，故开集相同。

若 $x_n \to x$ 在 $d$ 下成立，则 $\rho(x_n, x) \le C d(x_n, x) \to 0$，反向由 $d(x_n, x) \le c^{-1}\rho(x_n, x)$ 得到。若 $(x_n)$ 是 $d$-柯西列，给定 $\varepsilon > 0$，取 $N$ 使 $m, n \ge N$ 时 $d(x_m, x_n) < \varepsilon/C$。于是 $\rho(x_m, x_n) \le C d(x_m, x_n) < \varepsilon$，故它是 $\rho$-柯西列。若它是 $\rho$-柯西列，则取 $N$ 使 $\rho(x_m, x_n) < c\varepsilon$，有 $d(x_m, x_n) \le c^{-1}\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$，所以也为 $d$-柯西列。

若 $(X, d)$ 完备，一个 $\rho$-柯西列也是 $d$-柯西列，故对 $d$ 收敛于某个 $x \in X$，进而对 $\rho$ 也收敛于 $x$。这证明 $(X, \rho)$ 完备。交换两种度量，同样证明反向。 □

**推论 2.43** (三个坐标度量)**.** *在 $\mathbb{R}^n$ 上令 $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$，其中 $p = 1, 2, \infty$。三种度量的开集、收敛列和柯西列相同，且三者都完备。*

证明. 范数比较应用于 $x - y$，给出

$$d_2(x, y) \le d_1(x, y) \le \sqrt{n}\, d_2(x, y),$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} d_2(x, y) \le d_\infty(x, y) \le d_2(x, y).$$

所以 $d_1, d_\infty$ 各自与 $d_2$ 双 Lipschitz 等价。上一条定理给出开集、收敛列及柯西列相同；而 $d_2$ 完备，故另两者也完备。 □

**例 2.44** (拓扑等价未必保持完备性)**.** *在 $X = [1, \infty)$ 上取*

$$d(x, y) = |x - y|, \qquad \rho(x, y) = |1/x - 1/y|.$$

$\rho$ 是度量：绝对值给出对称性和三角不等式；由于 $x, y > 0$，$\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。这两个度量拓扑等价。事实上，对 $x, y \ge 1$，

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{xy} \le |x - y| = d(x, y).$$

给定 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\{1/(2x),\, \varepsilon/(2x^2)\} > 0$。若 $\rho(x, y) < \delta$，则

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{x} - \delta \ge \frac{1}{2x}, \qquad y < 2x,$$

从而

$$d(x, y) = xy\, \rho(x, y) < 2x^2 \delta \le \varepsilon.$$

因此 $B_d(x, r) \subseteq B_\rho(x, r)$，且每个 $d$-球 $B_d(x, \varepsilon)$ 都含一个 $\rho$-球 $B_\rho(x, \delta)$。若 $U$ 对任一种度量开，对其中每个点应用相应的球包含关系，便可找到另一种度量的球包含于 $U$，故两者开集相同。

集合 $X$ 在 $\mathbb{R}$ 中闭, 因为其补集 $(-\infty,1)$ 开。由闭子空间定理, $(X,d)$ 完备。但序列 $x_n=n$ 对 $\rho$ 为柯西列：给定 $\varepsilon>0$，取 $N>1/\varepsilon$，则 $m,n\geq N$ 时

$$\rho(x_m,x_n)=|1/m-1/n|\leq 1/N<\varepsilon.$$

它不能在 $X$ 中对 $\rho$ 收敛。若收敛于某个 $x\in X$，则 $|1/n-1/x|\to 0$，所以实数序列 $1/n$ 同时趋于 $1/x$ 与 $0$，由极限唯一性有 $1/x=0$，与 $x\geq 1$ 为有限实数矛盾。因此 $(X,\rho)$ 不完备。

**命题 2.45** (有界化度量的拓扑与柯西结构)**.** *对度量 $d$ 和 $\rho=d/(1+d)$，两者有相同的开集、收敛列和柯西列。*

*证明.* 对 $0<r<1$，有严格等价

$$\rho(x,y)<r \quad\Longleftrightarrow\quad d(x,y)<\frac{r}{1-r}.$$

因此，当 $0<r<1$ 时，

$$B_\rho(x,r)=B_d\left(x,\frac{r}{1-r}\right);$$

而当 $r\geq 1$ 时，$B_\rho(x,r)=X$。反过来，对每个 $s>0$，有

$$B_d(x,s)=B_\rho\left(x,\frac{s}{1+s}\right).$$

每个 $d$-开球是 $\rho$-开集，每个 $\rho$-开球也都是 $d$-开集，所以由开集的局部球判别，两种度量产生相同的开集。若 $x_n\to x$ 对 $d$ 成立，由 $\rho\leq d$ 得到对 $\rho$ 也成立。反过来，给定 $\varepsilon>0$，当 $\rho(x_n,x)<\varepsilon/(1+\varepsilon)$ 时就有 $d(x_n,x)<\varepsilon$，故对 $d$ 也收敛。

若 $(x_n)$ 是 $d$-柯西列，因为 $\rho\leq d$，它也是 $\rho$-柯西列。反过来，给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1/2,\varepsilon/2\}$。若 $\rho(x_m,x_n)<\delta$，则

$$d(x_m,x_n)=\frac{\rho(x_m,x_n)}{1-\rho(x_m,x_n)}<\frac{\delta}{1-\delta}\leq 2\delta\leq\varepsilon.$$

故 $\rho$-柯西列也是 $d$-柯西列。 □

**定理 2.46** (度量空间由收敛序列决定)**.** *设 $d,\rho$ 是同一集合 $X$ 上的两个度量。以下命题等价：*

1. *$d,\rho$ 产生相同的开集；*
2. *对任意序列 $(x_n)$ 和点 $x$，$x_n\to x$ 在 $d$ 下成立当且仅当在 $\rho$ 下成立。*

*证明.* (1) $\Rightarrow$ (2)。设 $x_n\to x$ 在 $d$ 下成立。若 $U$ 是点 $x$ 的任意 $\rho$-邻域，按邻域定义存在 $s>0$ 使 $B_\rho(x,s)\subseteq U$。球 $B_\rho(x,s)$ 是 $\rho$-开集，因两种度量的开集相同，它也是 $d$-开集。因此存在 $r>0$ 使 $B_d(x,r)\subseteq B_\rho(x,s)\subseteq U$。收敛性给出某个 $N$ 使 $n\geq N$ 时 $x_n\in B_d(x,r)\subseteq U$。这正说明 $x_n\to x$ 在 $\rho$ 下成立。交换两种度量得到反向。

(2) $\Rightarrow$ (1)。设 $U$ 是 $d$-开集。若 $U$ 不是 $\rho$-开集，则存在 $x\in U$，使得每个 $\rho$-开球 $B_\rho(x,r)$ 都不能包含于 $U$。特别地，对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都存在

$$x_n\in B_\rho(x,1/n)\setminus U.$$

于是 $x_n\to x$ 在 $\rho$ 下成立，按假设也在 $d$ 下成立。但 $U$ 是 $d$-开集，所以 $d$-收敛列最终必须落入 $U$，与 $x_n\notin U$ 矛盾。故 $U$ 是 $\rho$-开集；交换两种度量即可。 □

## 2.7 嵌套闭集与完备性的几何判据

**定义 2.47** (直径)**.** 对非空集合 $A \subseteq X$，定义

$$\operatorname{diam}_d(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \in [0, \infty].$$

**引理 2.48** (闭包不改变直径)**.** *若 $A \neq \varnothing$，则*

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A).$$

*证明.* 由 $A \subseteq \overline{A}$，左端不小于右端。若右端为无穷，则等式已经成立。以下设 $D = \operatorname{diam}(A) < \infty$。对 $p, q \in \overline{A}$ 和任意 $\delta > 0$，按闭包的定义，可取 $p', q' \in A$ 使 $d(p,p') < \delta$、$d(q,q') < \delta$。于是

$$d(p,q) \le d(p,p') + d(p',q') + d(q',q) < 2\delta + D.$$

若 $d(p,q) > D$，取 $\delta = (d(p,q) - D)/3$，便得到 $d(p,q) < D + 2(d(p,q) - D)/3 < d(p,q)$，矛盾。因此 $d(p,q) \le D$。对 $p, q$ 取上确界，得 $\operatorname{diam}(\overline{A}) \le D$，从而等式成立。 □

**定理 2.49** (Cantor 嵌套闭集定理)**.** *度量空间 $(X,d)$ 完备，当且仅当它满足以下性质：*

*若 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ 是非空闭集，且*

$$\operatorname{diam}_d(F_n) \longrightarrow 0,$$

*则*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

*恰好含有一个点。*

*证明.* 先设 $X$ 完备。对每个 $n$ 取 $x_n \in F_n$。给定 $\varepsilon > 0$，取 $N$ 使 $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$。若 $m, n \ge N$，不妨设 $m \ge n$，则 $x_m \in F_m \subseteq F_n \subseteq F_N$，且 $x_n \in F_N$，所以

$$d(x_m, x_n) \le \operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon.$$

因此 $(x_n)$ 是柯西列，存在 $x \in X$ 使 $x_n \to x$。固定 $N$，当 $n \ge N$ 时 $x_n \in F_N$，而 $F_N$ 闭，故 $x \in F_N$。这对每个 $N$ 成立，所以 $x \in \bigcap_N F_N$。

若 $x, y$ 都属于交集，任意 $N$ 都有 $x, y \in F_N$，于是

$$d(x,y) \le \operatorname{diam}(F_N) \longrightarrow 0.$$

所以 $x = y$，交集恰含一个点。

反过来，假设嵌套闭集性质成立。令 $(x_n)$ 是 $X$ 中的柯西列，并定义

$$F_N = \overline{\{x_n : n \ge N\}}.$$

每个 $F_N$ 非空闭，由闭包的单调性，$F_{N+1} \subseteq F_N$。柯西列由命题 2.35 有界，故存在 $a \in X$、$R > 0$ 使所有 $x_n \in B_d(a, R)$。于是 $d(x_m, x_n) < 2R$，以下上确界均为有限数：

$$D_N = \sup_{m,n \ge N} d(x_m, x_n).$$

给定 $\varepsilon>0$，柯西条件给出 $N_0$，使 $m,n\ge N_0$ 时 $d(x_m,x_n)<\varepsilon/2$。因此 $N\ge N_0$ 时 $D_N\le \varepsilon/2<\varepsilon$，即 $D_N\to 0$。由引理 2.48，

$$\operatorname{diam}(F_N)=\operatorname{diam}\{x_n : n\ge N\}=D_N\longrightarrow 0.$$

由假设，存在 $x\in\bigcap_N F_N$。给定 $\varepsilon>0$，取 $N$ 使 $\operatorname{diam}(F_N)<\varepsilon$。对 $n\ge N$，$x_n\in F_N$ 且 $x\in F_N$，故 $d(x_n,x)<\varepsilon$。因此 $x_n\to x$，$X$ 完备。 □

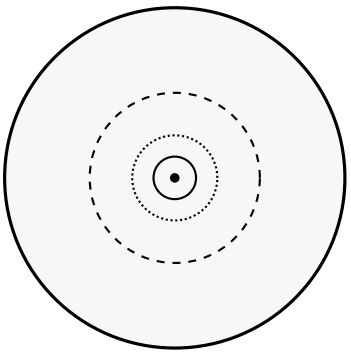



图 2.4: 欧氏平面中的嵌套闭圆盘。边界线从外到内对应 $n=1,2,3,4$，每次半径减半。若 $p$ 属于所有 $F_n$，则 $\|p\|_2\le 3/2^n$ 对所有 $n$ 成立，故 $p=0$；而 0 属于每个 $F_n$。

## 2.8 稠密子集

**定义 2.50** (稠密集)**.** 设 $D\subseteq X$。若

$$\overline{D}=X,$$

则称 $D$ 在 $X$ 中稠密。等价地，对任意 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，都有

$$B_d(x,\varepsilon)\cap D\neq\varnothing.$$

**命题 2.51** (稠密性的开集判别)**.** 集合 $D\subseteq X$ 稠密，当且仅当 $D$ 与每个非空开集相交。

证明. 若 $D$ 稠密，设 $U\subseteq X$ 非空且开。取 $x\in U$，由开性存在 $r>0$ 使 $B_d(x,r)\subseteq U$。因为 $x\in\overline{D}$，球 $B_d(x,r)$ 与 $D$ 相交，故 $U\cap D\neq\varnothing$。

反过来，假设 $D$ 与每个非空开集相交。任意取 $x\in X$ 和 $r>0$。开球 $B_d(x,r)$ 非空且开，所以存在 $y\in B_d(x,r)\cap D$。这说明每个 $x$ 的每个开球都与 $D$ 相交，$x\in\overline{D}$。因此 $\overline{D}=X$。 □

**定理 2.52** ($\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密)**.** 对通常距离，$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。

证明. 取 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$。由阿基米德性质，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $1/n<\varepsilon$。令 $m=\lfloor nx\rfloor$，即 $m\le nx<m+1$。整数部分确实存在：由阿基米德性质取正整数 $M>|nx|+1$，有限集 $\{k\in\mathbb{Z}:-M\le k\le M,\ k\le nx\}$ 非空。取其最大元 $m$，有 $m\le nx$；若 $nx\ge m+1$，则 $m+1\le M$ 也在该有限集中，与最大性矛盾。因此

$$0\le x-\frac{m}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

取 $q=m/n\in\mathbb{Q}$，便有 $|x-q|<\varepsilon$。所以每个 $x$ 的每个开球都含有有理数，$\mathbb{Q}$ 稠密。 □

**定理 2.53** ($\mathbb{Q}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密)**.** 在欧氏度量下，$\mathbb{Q}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密。

证明. 取 $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon>0$。由定理 2.52，对每个 $j$ 选择 $q_j\in\mathbb{Q}$，满足

$$|q_j-x_j|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

令 $q=(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{Q}^n$。则

$$\|q-x\|_2^2=\sum_{j=1}^{n}|q_j-x_j|^2<n\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2=\varepsilon^2.$$

故 $q\in B_2(x,\varepsilon)$，从而 $\mathbb{Q}^n$ 稠密。 □

**定义 2.54** (度量空间之间的连续映射)**.** 设 $(X,d_X)$、$(Y,d_Y)$ 是度量空间，$f:X\to Y$ 是映射。固定 $x\in X$。若对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$d_X(x,z)<\delta\quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(x),f(z))<\varepsilon\qquad(z\in X),$$

则称 $f$ 在 $x$ 处连续；若对每个 $x\in X$ 都连续，则称 $f$ 连续。

**命题 2.55** (连续映射保持收敛)**.** 若 $f:X\to Y$ 在 $x$ 处连续，且 $x_n\to x$，则

$$f(x_n)\to f(x).$$

证明. 给定 $\varepsilon>0$。由 $f$ 在 $x$ 处连续，存在 $\delta>0$，使

$$d_X(x,z)<\delta\Longrightarrow d_Y(f(x),f(z))<\varepsilon.$$

由 $x_n\to x$，存在 $N$ 使 $n\ge N$ 时 $d_X(x_n,x)<\delta$。代入上式可得

$$d_Y(f(x_n),f(x))<\varepsilon\qquad(n\ge N),$$

这正是 $f(x_n)\to f(x)$ 的定义。 □

**命题 2.56** (稠密集上的连续延拓的唯一性)**.** 设 $(Y,d_Y)$ 是度量空间，$D\subseteq X$ 稠密，且 $f,g:X\to Y$ 连续。若 $f|_D=g|_D$，则 $f=g$。

证明. 任取 $x\in X$。由 $\overline{D}=X$ 及定理 2.31，存在 $x_n\in D$ 使 $x_n\to x$。连续性意味着

$$f(x_n)\to f(x),\qquad g(x_n)\to g(x).$$

因为 $x_n\in D$，对每个 $n$ 有 $f(x_n)=g(x_n)$。同一个序列 $(f(x_n))$ 在 $Y$ 中既收敛于 $f(x)$ 又收敛于 $g(x)$，由极限唯一性得 $f(x)=g(x)$。$x$ 任意，故 $f=g$。 □

# 3 拓扑空间、基与子空间

度量空间的开集对任意并和有限交封闭。这两条性质可以直接作为公理，不必预先给定距离。以下将从开集族定义邻域、闭包与子空间。在由度量产生的拓扑中，这些定义与第二章一致。

## 3.1 拓扑与开集族

**定义 3.1** (拓扑空间)**.** 设 $X$ 是集合，$\mathcal{P}(X)$ 是它的幂集。子集族 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ 称为 $X$ 上的拓扑，如果：

1. $\varnothing, X \in \tau$；
2. 对任意指标集 $I$ 和 $U_\alpha \in \tau$，有 $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$；
3. 对有限个 $U_1, \dots, U_m \in \tau$，有 $\bigcap_{j=1}^{m} U_j \in \tau$。

二元组 $(X, \tau)$ 称为拓扑空间，$\tau$ 的元素称为开集。闭集指补集为开集的子集。空族的并约定为 $\varnothing$，空族的交约定为 $X$。

**例 3.2** (离散拓扑与平凡拓扑)**.** 幂集 $\mathcal{P}(X)$ 是一个拓扑，称为离散拓扑，因为对集合所作的并、交仍是 $X$ 的子集。族 $\{\varnothing, X\}$ 也是拓扑，称为平凡拓扑：其中任意族的并，只要有一项为 $X$，就等于 $X$；否则等于 $\varnothing$。有限交只要有一项为空，就为空，否则为 $X$。

在离散拓扑中，每个子集的补集仍是子集，所以每个子集既开又闭。在平凡拓扑中，闭集也只有 $\varnothing, X$。当 $X$ 至少有两个点时，这两个拓扑不同。

**命题 3.3** (度量产生拓扑)**.** 设 $d$ 是 $X$ 上的度量。令

$$\tau_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U\ \exists r > 0,\ B_d(x, r) \subseteq U\}.$$

则 $\tau_d$ 是拓扑。第二章的开集、闭集和邻域均由 $\tau_d$ 决定。

*证明.* 命题 2.11 已证明 $\varnothing, X \in \tau_d$、任意并封闭和有限交封闭，这恰好是定义 3.1 的三项公理。闭集仍按补集定义，所以两章的闭集相同。

第二章中，$N$ 是 $x$ 的邻域当且仅当它包含某个 $B_d(x, r)$。开球属于 $\tau_d$。反过来，若某个 $G \in \tau_d$ 满足 $x \in G \subseteq N$，则存在 $r > 0$ 使 $B_d(x, r) \subseteq G \subseteq N$。因此邻域也可以等价地定义为包含一个含 $x$ 的开集的集合。 □

**命题 3.4** (闭集族的运算)**.** 拓扑空间中的闭集满足：$\varnothing, X$ 闭，任意交闭，有限并闭。反过来，若 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 满足这三项条件，则

$$\tau = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$$

是一个拓扑，其闭集族恰好为 $\mathcal{F}$。

证明. 开集取补给出 $\varnothing, X$ 闭。若 $F_\alpha$ 都闭，则

$$X \setminus \bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus F_\alpha)$$

是开集。若 $F_1, \dots, F_m$ 都闭，则

$$X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} F_j = \bigcap_{j=1}^{m} (X \setminus F_j)$$

是开集。这证明前半部分。

反过来，$\varnothing = X \setminus X$ 和 $X = X \setminus \varnothing$ 都属于 $\tau$。设 $U_\alpha = X \setminus F_\alpha \in \tau$，则

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha} F_\alpha \in \tau.$$

对有限个这样的 $U_j$，有 $\bigcap_j U_j = X \setminus \bigcup_j F_j \in \tau$。所以 $\tau$ 是拓扑。按定义，一个集合的补集属于 $\tau$ 当且仅当它属于 $\mathcal{F}$，故闭集族正是 $\mathcal{F}$。 □

**例 3.5** (Sierpiński 空间)**.** 令 $X = \{0, 1\}$，取

$$\tau = \{\varnothing, \{1\}, X\}.$$

三个集合按包含关系排列，故任意并、有限交仍在此族中，确为拓扑。其闭集为 $\varnothing, \{0\}, X$。集合 $\{1\}$ 开而不闭，$\{0\}$ 闭而不开。这说明 “不开” 与 “闭” 并非同一条件。这个拓扑不能由度量产生：第二章已证明度量空间的每个单点集都闭，但这里的 $\{1\}$ 不闭。

**命题 3.6** (余有限与余可数拓扑)**.** *对任意集合 $X$，下列两族都是拓扑：*

$$\tau_{\mathrm{fin}} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ 有限}\},$$

$$\tau_{\mathrm{ct}} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ 至多可数}\}.$$

*它们分别称为余有限拓扑与余可数拓扑。*

证明. 两族都包含 $\varnothing, X$，因为 $X \setminus X = \varnothing$。先看余有限拓扑。若 $\bigcup_\alpha U_\alpha = \varnothing$，并集已属于该族。否则有一个 $U_{\alpha_0} \neq \varnothing$，且

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} U_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X \setminus U_\alpha) \subseteq X \setminus U_{\alpha_0}.$$

右端有限，故并集的补集有限。对有限交，若某个 $U_j$ 为空，交集为空；否则

$$X \setminus \bigcap_{j=1}^{m} U_j = \bigcup_{j=1}^{m} (X \setminus U_j)$$

是有限个有限集的并，仍有限。对余可数拓扑，设 $V_\alpha \in \tau_{\mathrm{ct}}$。若它们的并为空，已属于该族；否则取一项 $V_{\alpha_0} \neq \varnothing$，则

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} V_\alpha \subseteq X \setminus V_{\alpha_0}$$

是至多可数集的子集，故仍至多可数。对有限交，若某项为空，交为空；若各项非空，则

$$X \setminus \bigcap_{j=1}^{m} V_j = \bigcup_{j=1}^{m} (X \setminus V_j)$$

是有限个至多可数集的并，故至多可数。这验证了第二族的拓扑公理。 □

在有限集上，余有限拓扑为离散拓扑。在至多可数集上，余可数拓扑为离散拓扑，因为任意子集的补集都至多可数。当 $X$ 无限时，余有限拓扑中的任意两个非空开集相交。事实上，若 $U,V$ 不相交，则 $X=(X\setminus U)\cup(X\setminus V)$ 为有限集，矛盾。当 $X$ 不可数时，同一论证表明余可数拓扑中的任意两个非空开集相交：否则 $X$ 将是两个至多可数集的并。

## 3.2 邻域与局部判别

**定义 3.7** (邻域与邻域基)**.** 在 $(X,\tau)$ 中，若有 $G\in\tau$ 满足 $x\in G\subseteq N$，则称 $N$ 为点 $x$ 的邻域。开邻域是既为开集又含 $x$ 的集合。点 $x$ 的邻域族记为 $\mathcal{N}(x)$。

若 $\mathcal{B}_x\subseteq\mathcal{N}(x)$，且对每个 $N\in\mathcal{N}(x)$，存在 $B\in\mathcal{B}_x$ 使 $B\subseteq N$，则称 $\mathcal{B}_x$ 为 $x$ 的邻域基。邻域基中的集合不要求开。

**命题 3.8** (开集的局部判别)**.** 集合 $U\subseteq X$ 开，当且仅当它是其中每一点的邻域。

证明. 若 $U$ 开，对每个 $x\in U$，取开集 $G=U$，得到 $U$ 为 $x$ 的邻域。反过来，若每个 $x\in U$ 都有开集 $G_x$ 满足 $x\in G_x\subseteq U$，则

$$U=\bigcup_{x\in U}G_x.$$

左端的点在自己的 $G_x$ 中；右端每个 $G_x$ 都包含于 $U$，所以等式成立。右端是开集的并，故 $U$ 开。若 $U$ 为空，空并仍给出同一结论。 □

**命题 3.9** (邻域族的性质)**.** 对每个 $x\in X$，有：

1. $X\in\mathcal{N}(x)$，且每个 $N\in\mathcal{N}(x)$ 都含 $x$；
2. 若 $N\in\mathcal{N}(x)$、$N\subseteq M\subseteq X$，则 $M\in\mathcal{N}(x)$；
3. 若 $N_1,N_2\in\mathcal{N}(x)$，则 $N_1\cap N_2\in\mathcal{N}(x)$；
4. 若 $N\in\mathcal{N}(x)$，则存在 $M\in\mathcal{N}(x)$，使 $M\subseteq N$，且对每个 $y\in M$，都有 $N\in\mathcal{N}(y)$。

证明. 第一条中，$X$ 本身是含 $x$ 的开集；而任何邻域包含一个含 $x$ 的开集，所以都含 $x$。第二条中，若 $x\in G\subseteq N$ 且 $G$ 开，则 $x\in G\subseteq M$，故 $M$ 为邻域。第三条中，分别取开集 $G_i$ 使 $x\in G_i\subseteq N_i$。于是 $G_1\cap G_2$ 开，且 $x\in G_1\cap G_2\subseteq N_1\cap N_2$。对第四条，取开集 $G$ 使 $x\in G\subseteq N$，令 $M=G$。每个 $y\in M$ 都满足 $y\in G\subseteq N$，故 $N$ 为 $y$ 的邻域。 □

**定理 3.10** (由邻域族恢复拓扑)**.** 设对每个 $x\in X$，给定子集族 $\mathcal{N}(x)$，满足命题 *3.9* 的四项性质。定义

$$\tau=\{U\subseteq X:\forall x\in U,\ U\in\mathcal{N}(x)\}.$$

则 $\tau$ 是拓扑，且它产生的邻域族恰好是给定的 $\mathcal{N}(x)$。

证明. 空集满足定义中的全称条件；$X$ 由第一项属于 $\tau$。若 $U_\alpha\in\tau$、$x\in\bigcup_\alpha U_\alpha$，则存在 $\alpha_0$ 使 $x\in U_{\alpha_0}$，所以 $U_{\alpha_0}\in\mathcal{N}(x)$。由向上封闭性，$\bigcup_\alpha U_\alpha\in\mathcal{N}(x)$，故并集属于 $\tau$。若 $U,V\in\tau$、$x\in U\cap V$，则 $U,V\in\mathcal{N}(x)$，由第三项 $U\cap V\in\mathcal{N}(x)$。所以二交属于 $\tau$，归纳得到有限交属于 $\tau$。

设 $N\in\mathcal{N}(x)$，令

$$G=\{y\in X:N\in\mathcal{N}(y)\}.$$

由第一项，$y \in G$ 必有 $y \in N$，故 $G \subseteq N$，且 $x \in G$。对 $y \in G$，第四项给出 $M_y \in \mathcal{N}(y)$，使每个 $z \in M_y$ 都满足 $N \in \mathcal{N}(z)$。因此 $M_y \subseteq G$，由向上封闭性 $G \in \mathcal{N}(y)$。对所有 $y \in G$ 都成立，故 $G \in \tau$。于是 $x \in G \subseteq N$，说明 $N$ 是新拓扑的邻域。

反过来，若 $N$ 是新拓扑中 $x$ 的邻域，取 $G \in \tau$ 使 $x \in G \subseteq N$。由 $\tau$ 的定义，$G \in \mathcal{N}(x)$，再由向上封闭性，$N \in \mathcal{N}(x)$。两种邻域族相同。 □

## 3.3 基与生成拓扑

**定义 3.11** (拓扑的基)**.** 设 $(X,\tau)$ 为拓扑空间。族 $\mathcal{B} \subseteq \tau$ 称为 $\tau$ 的基，如果对每个开集 $U$ 和每个 $x \in U$，都存在 $B \in \mathcal{B}$ 使

$$x \in B \subseteq U.$$

**命题 3.12** (基与并的表示)**.** *开集族的子族 $\mathcal{B} \subseteq \tau$ 是基，当且仅当每个开集都可写成 $\mathcal{B}$ 中集合的并。*

*证明.* 若 $\mathcal{B}$ 是基，对开集 $U$，令 $\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U\}$。每个 $x \in U$ 都在某个这样的 $B$ 中，所以 $U \subseteq \bigcup \mathcal{B}_U$；反向包含由 $B \subseteq U$ 得到。因此 $U = \bigcup \mathcal{B}_U$。

若 $U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$，则对每个 $x \in U$，存在 $\alpha$ 使 $x \in B_\alpha$，且 $B_\alpha \subseteq U$，得到基的定义。 □

**命题 3.13** (局部基与邻域基)**.** *若 $\mathcal{B}$ 为拓扑的基，则*

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

*是 $x$ 的邻域基。若 $\mathcal{C}_x$ 为任意邻域基，则*

$$N \in \mathcal{N}(x) \iff \exists C \in \mathcal{C}_x,\ C \subseteq N.$$

*证明.* 每个 $B \in \mathcal{B}(x)$ 都开且含 $x$，所以是邻域。给定邻域 $N$，取开集 $G$ 使 $x \in G \subseteq N$，再由基性质取 $B$ 使 $x \in B \subseteq G \subseteq N$，证明 $\mathcal{B}(x)$ 为邻域基。对后一等价，正向是邻域基的定义；反向中，$C \in \mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{N}(x)$，由邻域的向上封闭性，$C \subseteq N$ 蕴含 $N \in \mathcal{N}(x)$。 □

**定理 3.14** (基的判据)**.** *设 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$。它是某个拓扑的基，当且仅当：*

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$；
2. *若 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 且 $x \in B_1 \cap B_2$，则存在 $B_3 \in \mathcal{B}$ 使 $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$。*

*满足这两项时，唯一以 $\mathcal{B}$ 为基的拓扑为*

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup \mathcal{C} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

*证明.* 若 $\mathcal{B}$ 是某个拓扑的基，对开集 $X$ 应用基的定义，每个点都在某个基元素内，故第一项成立。又 $B_1, B_2$ 开，交集也开，对其中的 $x$ 应用基定义，得到第二项。

反过来，假设两项成立。空族的并给出 $\varnothing \in \tau_{\mathcal{B}}$，第一项给出 $X \in \tau_{\mathcal{B}}$。任意族基元素的并再作并，仍是基元素的并，故任意并封闭。若 $U, V \in \tau_{\mathcal{B}}$，对每个 $x \in U \cap V$，由并的表示找到 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$，使 $x \in B_1 \subseteq U$、$x \in B_2 \subseteq V$。再由第二项找到 $B_x$ 使

$$x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V.$$

所以 $U\cap V=\bigcup_{x\in U\cap V}B_x\in\tau_{\mathcal B}$。这给出二交封闭，因 $X\in\tau_{\mathcal B}$，归纳得到包括空交在内的有限交封闭。故 $\tau_{\mathcal B}$ 是拓扑。

每个 $B\in\mathcal B$ 都是自身的并，故它开；并的表示保证 $\mathcal B$ 为基。若另一个拓扑以同一 $\mathcal B$ 为基，上一命题说明它的开集也恰好为基元素的并，故必等于 $\tau_{\mathcal B}$。 □

**例 3.15** (度量球构成基)**.** 度量空间的全部开球构成 $\tau_d$ 的基。每个 $x$ 都在 $B_d(x,1)$ 中。若 $x\in B_d(a,r)\cap B_d(b,s)$，令

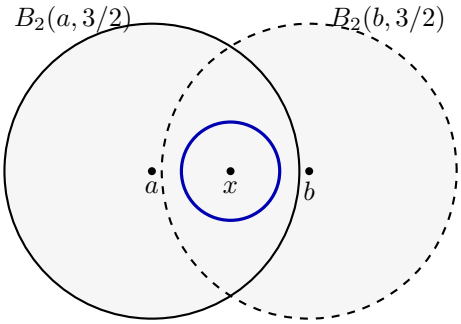
$$\delta=\min\{r-d(a,x),\,s-d(b,x)\}>0.$$

对 $y\in B_d(x,\delta)$，有

$$d(a,y)\le d(a,x)+d(x,y)<d(a,x)+\delta\le r,$$

$$d(b,y)\le d(b,x)+d(x,y)<d(b,x)+\delta\le s.$$

故 $B_d(x,\delta)$ 包含于二球之交，满足基判据。它生成的拓扑等于 $\tau_d$，因为每个度量开集在每个点都包含一个开球，而开球本身开。




$$B_2(x,1/2)\subseteq B_2(a,3/2)\cap B_2(b,3/2)$$

图 3.1: 取 $a=(-4/5,0)$、$b=(4/5,0)$、$x=(0,0)$。因 $4/5+1/2=13/10<3/2$，小球位于两个大球的交内。大球的交集无需本身是球，基判据只要求交集的每个点都有一个更小的基邻域。

**命题 3.16** (有理端点的区间基)**.** 通常实直线的开区间族

$$\mathcal I=\{(p,q):p,q\in\mathbb Q,\ p<q\}$$

是一个基。

证明. 每个 $(p,q)$ 都是通常开集：若 $x\in(p,q)$，取 $r=\min\{x-p,q-x\}>0$，就有 $B(x,r)\subseteq(p,q)$。若 $U$ 为通常开集、$x\in U$，取 $\varepsilon>0$ 使 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq U$。由定理 2.52，选择有理数 $p,q$ 满足

$$|p-(x-\varepsilon/2)|<\varepsilon/2,\qquad |q-(x+\varepsilon/2)|<\varepsilon/2.$$

第一式等价于 $x-\varepsilon<p<x$，第二式等价于 $x<q<x+\varepsilon$。于是 $x\in(p,q)\subseteq U$，满足基的局部条件。 □

**命题 3.17** (欧氏空间的有理矩形基)**.** 在 $\mathbb{R}^n$ 中，有理端点的开矩形族

$$\mathcal{R}_n = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (p_i, q_i) : p_i, q_i \in \mathbb{Q},\ p_i < q_i \right\}$$

是欧氏拓扑的一个基。此处直积表示所有坐标分别属于相应区间的点集。

*证明.* 设 $R = \prod_i (p_i, q_i)$，$x \in R$。取

$$r = \min_{1 \le i \le n} \{x_i - p_i, q_i - x_i\} > 0.$$

若 $\|y - x\|_2 < r$，则每个 $|y_i - x_i| \le \|y - x\|_2 < r$，所以 $p_i < y_i < q_i$，即 $y \in R$。因此每个 $R$ 都是欧氏开集。

反过来，设 $U$ 欧氏开、$x \in U$，取 $\varepsilon > 0$ 使 $B_2(x, \varepsilon) \subseteq U$。由有理数稠密，对每个 $i$ 取有理数

$$x_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} < p_i < x_i < q_i < x_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

令 $R = \prod_i (p_i, q_i)$。则 $x \in R$；对 $y \in R$，

$$\|y - x\|_2^2 = \sum_i |y_i - x_i|^2 < n \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 = \varepsilon^2.$$

所以 $R \subseteq B_2(x, \varepsilon) \subseteq U$，证明基的局部条件。 □

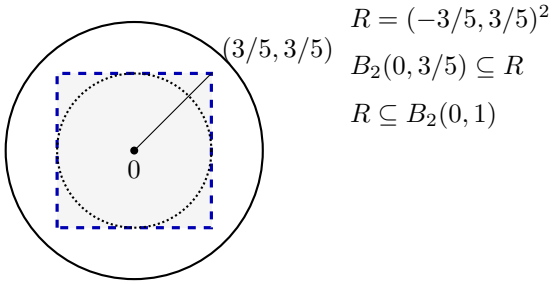



图 3.2: 开球与开矩形的相互细化。正方形边界不属于 $R$。若 $\|y\|_2 < 3/5$，则每个 $|y_i| < 3/5$，故 $y \in R$；若 $y \in R$，则 $\|y\|_2^2 < 2(3/5)^2 = 18/25 < 1$，故 $y$ 在外圆内。点线圆、虚线方形和实线圆分别表示三个开集的边界。

**定义 3.18** (拓扑的粗细)**.** 若同一集合上两个拓扑满足 $\tau_1 \subseteq \tau_2$，则称 $\tau_2$ 比 $\tau_1$ 细，$\tau_1$ 比 $\tau_2$ 粗。若包含严格，则称严格更细或严格更粗。

**命题 3.19** (用基比较拓扑)**.** 设 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 分别为 $\tau_1, \tau_2$ 的基。则 $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 当且仅当：对每个 $B \in \mathcal{B}_1$ 和 $x \in B$，都存在 $C \in \mathcal{B}_2$ 使 $x \in C \subseteq B$。

*证明.* 若 $\tau_1 \subseteq \tau_2$，则每个 $B \in \mathcal{B}_1$ 也是 $\tau_2$-开集，由 $\mathcal{B}_2$ 的基性质得到所需的 $C$。反过来，给定 $\tau_1$-开集 $U$ 及 $x \in U$，先取 $B \in \mathcal{B}_1$ 使 $x \in B \subseteq U$，再由假设取 $C \in \mathcal{B}_2$ 使 $x \in C \subseteq B \subseteq U$。于是 $U$ 为这些 $C$ 的并，故 $U \in \tau_2$。 □

**例 3.20** (下限拓扑)**.** 实直线上的族

$$\mathcal{B}_\ell = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

满足基判据。它覆盖 $\mathbb{R}$，因为 $x \in [x, x+1)$。若 $x \in [a,b) \cap [c,d)$，则

$$x < \min\{b,d\}, \qquad [x, \min\{b,d\}) \subseteq [a,b) \cap [c,d),$$

所以第二项也成立。生成的拓扑记为 $\tau_\ell$，称为下限拓扑。

通常拓扑以开区间为基。对 $x \in (a,b)$，基元素 $[x,b)$ 满足 $x \in [x,b) \subseteq (a,b)$。由命题 3.19，$\tau_\ell$ 比通常拓扑细。它严格更细，因为 $[0,1)$ 属于 $\tau_\ell$，却不是通常开集：对任意 $\varepsilon > 0$，点 $-\varepsilon/2$ 都在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中而不在 $[0,1)$ 中。

对 $a < b$，集合 $[a,b)$ 在 $\tau_\ell$ 中也闭。其补集为

$$(-\infty, a) \cup [b, \infty).$$

若 $x < a$，则 $[x,a)$ 包含于第一项；若 $x \geq b$，则 $[x, x+1)$ 包含于第二项。因此补集中的每个点有基邻域留在补集中，故补集开。

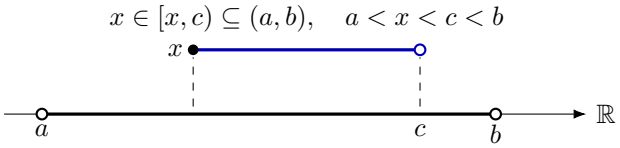



图 3.3: 用下限拓扑的基邻域细化通常开区间。实心端点属于半开区间，空心端点不属于。上方区间为避免重叠而上移；虚线给出它在同一实直线上的端点位置。

## 3.4 子基与最小拓扑

**命题 3.21** (拓扑的交与生成拓扑)**.** *同一集合 $X$ 上任意非空族拓扑的交仍为拓扑。对任意 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$，存在唯一包含 $\mathcal{S}$ 的最粗拓扑，记为 $\langle \mathcal{S} \rangle$。*

*证明.* 设 $(\tau_\lambda)_{\lambda \in L}$ 为非空族拓扑。$\varnothing, X$ 属于每个 $\tau_\lambda$，故属于其交。若各 $U_\alpha$ 都属于其交，则对固定 $\lambda$，各 $U_\alpha \in \tau_\lambda$，所以其并属于 $\tau_\lambda$。这对每个 $\lambda$ 成立，故并属于所有拓扑的交。若 $U_1, \dots, U_m$ 都属于所有 $\tau_\lambda$，固定 $\lambda$ 后，由有限交公理，$\bigcap_{j=1}^{m} U_j \in \tau_\lambda$。因 $\lambda$ 任意，这个有限交也属于所有拓扑的交。

包含 $\mathcal{S}$ 的拓扑至少有离散拓扑 $\mathcal{P}(X)$。取所有这类拓扑的交，所得仍是拓扑，仍包含 $\mathcal{S}$，且包含于每个包含 $\mathcal{S}$ 的拓扑，因此为最粗者。若另有最粗者，两者相互包含，故相等。 □

**定理 3.22** (子基生成拓扑)**.** *给定 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$，令*

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \{S_1 \cap \cdots \cap S_m : m \geq 0,\ S_j \in \mathcal{S}\}.$$

*其中 $m = 0$ 时交集为 $X$。则 $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ 是一个基，它生成的拓扑为 $\langle \mathcal{S} \rangle$。当 $\langle \mathcal{S} \rangle = \tau$ 时，称 $\mathcal{S}$ 为 $\tau$ 的子基。*

证明. 因 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$，第一项基判据成立。两个有限交的交仍为有限交，所以若 $x \in B_1 \cap B_2$，可直接取 $B_3 = B_1 \cap B_2$。这验证第二项判据。

由基生成的拓扑包含每个 $S \in \mathcal{S}$，因为 $m = 1$ 时 $S$ 本身是基元素。反过来，任何包含 $\mathcal{S}$ 的拓扑都包含其有限交，因而包含 $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ 的任意并。所以这个基生成的拓扑包含于每个包含 $\mathcal{S}$ 的拓扑，恰好是最粗者 $\langle \mathcal{S} \rangle$。 □

这里允许子基不覆盖 $X$，并在生成基时加入空交 $X$。例如 $\mathcal{S} = \varnothing$ 时，生成基为 $\{X\}$，生成拓扑为 $\{\varnothing, X\}$。

**例 3.23** (射线子基)**.** 通常实直线的一个子基为

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

两类射线都是通常开集，因此生成拓扑包含于通常拓扑。另一方面，每个开区间满足

$$(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b),$$

所以每个通常开区间都属于生成拓扑。通常开集是开区间的并，故通常拓扑也包含于生成拓扑，两者相同。

**例 3.24** (拓扑的并未必是拓扑)**.** 在 $X = \{a, b, c\}$ 上令

$$\tau_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}, \qquad \tau_2 = \{\varnothing, \{b\}, X\}.$$

每一族都由三个按包含排列的集合组成，所以各自为拓扑。但 $\tau_1 \cup \tau_2$ 不含 $\{a, b\}$，却含 $\{a\}$ 与 $\{b\}$，故对并不封闭。包含两者的最粗拓扑实际为

$$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}.$$

逐项取并、有限交仍在此族中；任何包含两原拓扑的拓扑都必须包含 $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$，所以此族确为最粗者。

## 3.5 内部、闭包与边界

**定义 3.25** (拓扑空间中的内部与闭包)**.** 对 $A \subseteq X$，定义

$$\operatorname{int}_X A = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\},$$

$$\operatorname{cl}_X A = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ 闭且} A \subseteq F\}.$$

没有歧义时分别记为 $A^\circ, \overline{A}$。定义边界 $\partial_X A = \operatorname{cl}_X A \setminus \operatorname{int}_X A$。

**定义 3.26** (稠密子集)**.** 若 $\overline{D} = X$，则称 $D \subseteq X$ 在 $X$ 中稠密。

**定理 3.27** (极大内部、极小闭包与邻域刻画)**.** $A^\circ$ 是包含于 $A$ 的最大开集；$\overline{A}$ 是包含 $A$ 的最小闭集。对 $x \in X$，有

$$x \in A^\circ \iff A \text{ 是} x \text{ 的邻域},$$

$$x \in \overline{A} \iff \text{每个含} x \text{ 的开集都与} A \text{ 相交} \iff \text{每个} x \text{ 的邻域都与} A \text{ 相交}.$$

证明. 内部是开集的并，所以开；并中的每项都包含于 $A$，所以 $A^\circ \subseteq A$。若开集 $G \subseteq A$，它是这个并中的一项，故 $G \subseteq A^\circ$，证明最大性。闭包的定义中至少有闭集 $X$，所以交的指标族非空。闭集的交闭，每个交项都含 $A$，故 $\overline{A}$ 闭且含 $A$。任一闭集 $F \supseteq A$ 都是交中的一项，故 $\overline{A} \subseteq F$，证明最小性。

点在内部的并中，当且仅当存在开集 $G$ 使 $x \in G \subseteq A$，这正是邻域的定义。若 $x \notin \overline{A}$，则某个闭集 $F \supseteq A$ 不含 $x$。开集 $X \setminus F$ 含 $x$ 且不遇 $A$。反过来，若开集 $G$ 含 $x$ 且 $G \cap A = \varnothing$，则 $X \setminus G$ 是包含 $A$ 的闭集，所以 $\overline{A} \subseteq X \setminus G$，从而 $x \notin \overline{A}$。取否定即得开邻域刻画。每个开邻域本身为邻域，而每个邻域都含一个开邻域，故“所有开邻域相交”与“所有邻域相交”等价。 □

**推论 3.28** (用邻域基计算内部与闭包). *若 $\mathcal{C}_x$ 是 $x$ 的邻域基，则*

$$x \in A^\circ \iff \exists C \in \mathcal{C}_x,\ C \subseteq A, \qquad x \in \overline{A} \iff \forall C \in \mathcal{C}_x,\ C \cap A \neq \varnothing.$$

证明. 内部等价于 $A$ 是邻域，再用命题 3.13 得到第一式。若 $x \in \overline{A}$，每个邻域都与 $A$ 相交，当然每个 $C \in \mathcal{C}_x$ 都相交。若每个 $C$ 都相交，任取邻域 $N$，选 $C \subseteq N$，则 $C \cap A \subseteq N \cap A$，故 $N \cap A \neq \varnothing$。由邻域刻画得到 $x \in \overline{A}$。 □

在度量空间中，开球为邻域基。每个邻域都与 $A$ 相交，当且仅当每个开球都与 $A$ 相交。因此本章的闭包等于第二章的闭包；内部和边界也随之相同。

**命题 3.29** (内部与闭包的运算). *在任意拓扑空间中，*

$$A \subseteq \overline{A}, \qquad A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B},$$

$$\overline{\varnothing} = \varnothing, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

*此外，*

$$(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}, \qquad \overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ,$$

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \qquad \partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

*特别地，$A$ 闭当且仅当 $A = \overline{A}$，$A$ 开当且仅当 $A = A^\circ$，且 $\partial A$ 闭。*

证明. 第一条已由闭包定义得到。若 $A \subseteq B$，闭集 $\overline{B}$ 包含 $A$，由闭包的最小性，$\overline{A} \subseteq \overline{B}$。空集本身闭，所以其最小闭包就是自身。闭包已经闭，所以再次取闭包不变。

由单调性，$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$。反向包含来自 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 为包含 $A \cup B$ 的闭集；它闭是因为闭集的有限并闭。因此闭包保持二并。

点 $x \notin \overline{A}$ 当且仅当存在含 $x$ 的开集与 $A$ 不相交，也即存在开集 $G$ 使 $x \in G \subseteq X \setminus A$。这说明 $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$。在此式中将 $A$ 换成 $X \setminus A$，再取补集，得到第二个补集等式。

内部的最大性给出单调性：若 $A \subseteq B$，则 $A^\circ$ 是包含于 $B$ 的开集，所以 $A^\circ \subseteq B^\circ$。于是 $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$。反过来，$A^\circ \cap B^\circ$ 开且包含于 $A \cap B$，所以它包含于 $(A \cap B)^\circ$，得到等号。最后，

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

右端是闭集的交，所以闭。若 $A$ 闭，则其最小闭包为自身；若 $A = \overline{A}$，右端闭，所以 $A$ 闭。开集与内部的等价由以下两步得到：开集 $A$ 本身是内部定义中的一项，故 $A \subseteq A^\circ$，结合反向包含得到 $A = A^\circ$；若 $A = A^\circ$，因内部开，$A$ 也开。 □

**推论 3.30** (边界的邻域判别)**.** $x \in \partial A$ 当且仅当 $x$ 的每个邻域既与 $A$ 相交，又与 $X \setminus A$ 相交。

证明. 由上一命题，$x \in \partial A$ 当且仅当 $x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{X \setminus A}$。分别对这两个闭包使用定理 3.27 的邻域刻画，得到所需的两个相交条件。 □

**例 3.31** (两种小空间中的闭包)**.** 在 Sierpiński 空间中，内部、闭包和边界逐项为

| $A$ | $A^\circ$ | $\overline{A}$ | $\partial A$ |
|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $\{0\}$ | $\varnothing$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ |
| $\{1\}$ | $\{1\}$ | $X$ | $\{0\}$ |
| $X$ | $X$ | $X$ | $\varnothing$ |

例如 $\{0\}$ 中不含任何非空开集，所以内部为空；它本身闭，所以闭包为自身。包含 $\{1\}$ 的闭集只有 $X$，所以其闭包为 $X$，再减去内部 $\{1\}$ 得边界 $\{0\}$。

在平凡拓扑中，对非空真子集 $A \subsetneq X$，只有闭集 $X$ 包含 $A$，所以 $\overline{A} = X$。又 $A$ 不含非空开集，故 $A^\circ = \varnothing$，于是 $\partial A = X$。

**例 3.32** (余有限与余可数拓扑中的闭包)**.** 在无限集的余有限拓扑中，闭集恰好为有限集和 $X$。这是因为闭集的补集若非空开，就有有限补集；若补集为空，闭集为 $X$。因此有限集 $A$ 的闭包为自身，无限集 $A$ 的闭包为 $X$：没有有限闭集可以包含无限集。特别地，每个无限子集都稠密，每个有限子集都不稠密。

在不可数集的余可数拓扑中，闭集恰好为至多可数集和 $X$，理由仍是直接对开集定义取补。所以至多可数集的闭包为自身，不可数子集的闭包为 $X$。这与余有限情形不同：在不可数的 $X$ 中，一个可数无限子集对余有限拓扑稠密，对余可数拓扑却闭且不稠密。

**定理 3.33** (闭包公理与拓扑)**.** 设映射 $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ 满足，对所有 $A, B \subseteq X$，

$$c(\varnothing) = \varnothing, \quad A \subseteq c(A), \quad c(c(A)) = c(A), \quad c(A \cup B) = c(A) \cup c(B).$$

则存在唯一的拓扑，使得 $c(A)$ 正是 $A$ 的闭包。

证明. 先证单调性。若 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B$，所以

$$c(B) = c(A \cup B) = c(A) \cup c(B),$$

从而 $c(A) \subseteq c(B)$。令 $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : c(F) = F\}$。因 $X \subseteq c(X) \subseteq X$，有 $c(X) = X$，且 $c(\varnothing) = \varnothing$，故两者属于 $\mathcal{F}$。对任意 $F_\alpha \in \mathcal{F}$，记 $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$。由单调性，

$$c(F) \subseteq c(F_\alpha) = F_\alpha \quad \text{对每个} \alpha,$$

所以 $c(F) \subseteq F$。结合 $F \subseteq c(F)$，得 $c(F) = F$。空族交为 $X$，也已验证。若 $F, G \in \mathcal{F}$，则 $c(F \cup G) = c(F) \cup c(G) = F \cup G$，故有限并仍在 $\mathcal{F}$。由命题 3.4，$\mathcal{F}$ 是某个拓扑的闭集族。

对任意 $A$，幂等性给出 $c(c(A)) = c(A)$，所以 $c(A)$ 闭，并且它包含 $A$。若闭集 $F$ 包含 $A$，由单调性，$c(A) \subseteq c(F) = F$。故 $c(A)$ 是包含 $A$ 的最小闭集，即此拓扑中的闭包。任何满足要求的拓扑，都以 $c(F) = F$ 刻画其闭集；因此闭集族以及其补集组成的开集族都被唯一确定。 □

## 3.6 聚点、孤立点与稠密集

**定义 3.34** (聚点、导集与孤立点)**.** 设 $A \subseteq X$。若点 $x \in X$ 的每个邻域都与 $A \setminus \{x\}$ 相交，则称 $x$ 为 $A$ 的聚点。全部聚点组成的集合记为 $A'$，称为导集。若 $x \in A$ 且存在邻域 $N$ 使 $N \cap A = \{x\}$，则称 $x$ 为 $A$ 的孤立点。

**命题 3.35** (闭包与导集)**.** *任意拓扑空间中都有*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

*点 $x \in A$ 是孤立点当且仅当 $x \notin A'$。因此 $A$ 闭当且仅当 $A' \subseteq A$。*

*证明.* 若 $x \in A'$，每个邻域与 $A \setminus \{x\}$ 相交，因而与 $A$ 相交，所以 $x \in \overline{A}$。又 $A \subseteq \overline{A}$，故 $A \cup A' \subseteq \overline{A}$。若 $x \in \overline{A} \setminus A$，则 $A \setminus \{x\} = A$。每个邻域与 $A$ 相交，故 $x \in A'$。得到反向包含。

对 $x \in A$，$x \notin A'$ 等价于某个邻域不遇 $A \setminus \{x\}$。邻域必含 $x$，故这正是 $N \cap A = \{x\}$，即孤立性。最后，$A$ 闭等价于 $\overline{A} = A$，用 $\overline{A} = A \cup A'$ 便得到 $A' \subseteq A$。 □

**命题 3.36** (单点闭时的聚点性质)**.** *若 $X$ 的每个单点集都闭，则：*

1. *$x \in A'$ 当且仅当 $x$ 的每个邻域与 $A$ 的交都是无限集；*
2. *$A'$ 是闭集。*

*证明.* 若每个邻域与 $A$ 的交都无限，删去至多一个点后仍非空，故 $x \in A'$。反过来，设 $x \in A'$，却有邻域 $N$ 使 $N \cap A$ 有限。取开集 $G$ 使 $x \in G \subseteq N$。集合 $E = (N \cap A) \setminus \{x\}$ 有限，每个单点闭，故其有限并 $E$ 闭。因此 $G \setminus E$ 是含 $x$ 的开集，且与 $A \setminus \{x\}$ 不相交，违背 $x \in A'$。所以第一条成立。

若 $x \notin A'$，存在开邻域 $G$ 使 $G \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing$，即 $G \cap A \subseteq \{x\}$。对任意 $y \in G$，开邻域 $G$ 与 $A$ 的交至多含一个点，由第一条 $y \notin A'$。所以 $G \subseteq X \setminus A'$。这说明每个不属于 $A'$ 的点有开邻域留在其补集中，故 $A'$ 闭。 □

**例 3.37** (导集未必闭)**.** 在 $X = \{0, 1\}$ 上取平凡拓扑 $\{\varnothing, X\}$，令 $A = \{1\}$。每个点的唯一邻域都是 $X$。对点 $0$，有 $A \setminus \{0\} = \{1\}$，所以每个邻域都与删点集相交，故 $0 \in A'$。对点 $1$，有 $A \setminus \{1\} = \varnothing$，所以 $1 \notin A'$。因此 $A' = \{0\}$。平凡拓扑中的闭集只有 $\varnothing, X$，故 $A'$ 不闭。同时，聚点 $0$ 的邻域与 $A$ 的交只有一个点；没有单点闭的假设时，聚点的每个邻域不一定含有无限多个 $A$ 中的点。

**例 3.38** (收敛点列形成的集合)**.** 在通常实直线中取

$$A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

则 $A' = \{0\}$，$\overline{A} = A \cup \{0\}$，且 $A$ 的每个点都孤立。首先，给定 $0$ 的任意邻域，它包含某个 $(-\varepsilon, \varepsilon)$。取 $n > 1/\varepsilon$，便有 $1/n$ 在这个区间内，故 $0 \in A'$。

固定 $k$。若 $k = 1$，区间 $(3/4, 5/4)$ 只含 $A$ 中的点 $1$。若 $k \geq 2$，令

$$r_k = \frac{1}{2} \min\left\{ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},\ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right\} > 0.$$

对 $n < k$，有 $1/n \geq 1/(k-1) > 1/k + r_k$；对 $n > k$，有 $1/n \leq 1/(k+1) < 1/k - r_k$。故 $(1/k - r_k, 1/k + r_k) \cap A = \{1/k\}$，得到孤立性。

最后设 $x \notin A \cup \{0\}$。若 $x<0$，半径 $|x|/2$ 的球不遇正数集 $A$。若 $x>0$，取 $N \geq 2$ 使 $1/N < x/2$，再令

$$r = \frac{1}{2}\min\big(\{x/2\} \cup \{|x-1/j| : 1 \leq j < N\}\big) > 0.$$

有限多个差的绝对值都非零，故 $r>0$。对 $j<N$，有 $|x-1/j| \geq 2r$；对 $j \geq N$，有 $|x-1/j| > x/2 \geq 2r$。所以 $B(x,r) \cap A = \varnothing$，从而 $x \notin \overline{A}$，也不在 $A'$。结合前两部分，得到全部结论。

**命题 3.39** (导集保持有限并)**.** *对任意 $A, B \subseteq X$，有*

$$(A \cup B)' = A' \cup B'.$$

*证明.* 若 $x \in A'$, 则每个邻域都与 $A \backslash \{x\}$ 相交, 因而与 $(A \cup B) \backslash \{x\}$ 相交, 所以 $A' \subseteq (A \cup B)'$。对 $B'$ 也有同样的包含，因为 $B \setminus \{x\} \subseteq (A \cup B) \setminus \{x\}$。

反过来，若 $x \notin A' \cup B'$，分别取开邻域 $U, V$ 使

$$U \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing, \qquad V \cap (B \setminus \{x\}) = \varnothing.$$

则 $U \cap V$ 是 $x$ 的开邻域，且

$$(U \cap V) \cap ((A \cup B) \setminus \{x\}) = \varnothing,$$

因为与 $A$ 的删点部分的交包含于第一个空集，与 $B$ 的删点部分的交包含于第二个空集。故 $x \notin (A \cup B)'$，取逆否命题得到反向包含。 □

**例 3.40** (闭包与导集不保持任意并)**.** 在通常实直线上令 $A_n = \{1/n\}$。每个 $A_n$ 闭, 且 $A_n' = \varnothing$: 点 $1/n$ 的删点集为空；对 $x \neq 1/n$，取半径 $|x-1/n|/2$ 的球便避开该单点。但由例 3.38，

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = \{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\} \supsetneq \bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n},$$

$$\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)' = \{0\}, \qquad \bigcup_{n\geq 1} A_n' = \varnothing.$$

因此前述二并等式不能直接改成无限并等式。

**命题 3.41** (稠密性的开集判别与有限交)**.** *$D$ 稠密当且仅当它与每个非空开集相交。有限个稠密开集的交仍稠密且开。*

*证明.* 若 $\overline{D} = X$，取任意非空开集 $U$ 及 $x \in U$。因为 $x \in \overline{D}$，开邻域 $U$ 与 $D$ 相交。反过来，若每个非空开集都与 $D$ 相交，则每个点的每个开邻域都与 $D$ 相交，所以每点属于 $\overline{D}$。

设 $G, H$ 开且稠密。对任意非空开集 $U$，稠密性给出 $U \cap G \neq \varnothing$。它仍开，故再由 $H$ 稠密，$(U \cap G) \cap H \neq \varnothing$。由已证判据，$G \cap H$ 稠密；它开是有限交公理。以此为归纳步骤得到任意非空有限族的结论。空族交为 $X$，也开且稠密。 □

**例 3.42** (稠密集的交可以为空)**.** 通常实直线中的 $\mathbb{Q}$ 稠密，已在第二章证明。集合 $\sqrt{2}+\mathbb{Q} = \{\sqrt{2}+q : q \in \mathbb{Q}\}$ 也稠密：给定 $x \in \mathbb{R}$、$\varepsilon > 0$，选择 $q \in \mathbb{Q}$ 使 $|q - (x-\sqrt{2})| < \varepsilon$，就有 $|(\sqrt{2}+q) - x| < \varepsilon$。这两个稠密集不相交，否则 $\sqrt{2} = p - q$ 为有理数。这里使用的无理性可由约分证明：若 $\sqrt{2} = m/n$，其中整数 $m, n$ 互素且 $n>0$，则 $m^2 = 2n^2$ 为偶数。若 $m$ 为奇数，写 $m = 2k+1$，则 $m^2 = 2(2k^2+2k)+1$ 为奇数，矛盾，所以 $m$ 为偶数。写 $m = 2k$ 后又得 $n^2 = 2k^2$，由同一奇偶性计算，$n$ 也为偶数，与互素矛盾。因此有限稠密交结论中的“开”不能去掉。

## 3.7 子空间拓扑

**定理 3.43** (子空间拓扑与其基)**.** 设 $A \subseteq X$，则

$$\tau|_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$$

是 $A$ 上的拓扑，称为子空间拓扑。若 $\mathcal{B}$ 为 $\tau$ 的基，则

$$\mathcal{B}|_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$$

为 $\tau|_A$ 的基。空集基元素可以删去。当 $\tau = \tau_d$ 时，此拓扑等于子空间度量 $d|_{A\times A}$ 产生的拓扑。

*证明.* $A \cap \varnothing = \varnothing$、$A \cap X = A$，故两者属于 $\tau|_A$。由分配律，

$$\bigcup_\alpha (A \cap U_\alpha) = A \cap \bigcup_\alpha U_\alpha, \qquad (A \cap U) \cap (A \cap V) = A \cap (U \cap V).$$

右端分别由 $X$ 中开集的并、交给出，所以满足拓扑公理。每个 $A \cap B$ 相对开。若 $a \in A \cap U$，由环境空间的基性质，可取 $B \in \mathcal{B}$ 使 $a \in B \subseteq U$。于是 $a \in A \cap B \subseteq A \cap U$，证明基性质。

在度量情形，环境开球构成基，故它们与 $A$ 的交构成子空间拓扑的基。而

$$A \cap B_d(a, r) = B_{d|_A}(a, r) \qquad (a \in A)$$

正是子空间度量的球。任意中心不在 $A$ 的环境球之交若含 $a \in A$，由球的中心移动性质，包含某个以 $a$ 为中心的更小相对球。所以可只保留中心在 $A$ 的这些基元素，得到相同拓扑。 □

**命题 3.44** (相对闭集与子空间的传递性)**.** 集合 $F \subseteq A$ 在 $A$ 中闭，当且仅当存在 $X$ 中闭集 $C$ 使 $F = A \cap C$。若 $B \subseteq A \subseteq X$，先把 $A$ 看作子空间，再在 $A$ 中给 $B$ 子空间拓扑，与直接从 $X$ 给 $B$ 子空间拓扑相同。

*证明.* $F$ 相对闭当且仅当 $A \setminus F$ 相对开，即 $A \setminus F = A \cap U$，其中 $U$ 在 $X$ 中开。在 $A$ 中取补得到 $F = A \setminus (A \cap U) = A \cap (X \setminus U)$，其中 $X \setminus U$ 闭。反过来，若 $F = A \cap C$ 且 $C$ 闭，则 $A \setminus F = A \cap (X \setminus C)$ 相对开，故 $F$ 相对闭。

在 $A$ 的子空间拓扑中，开集为 $A \cap U$。它与 $B$ 相交得到 $B \cap (A \cap U) = B \cap U$，因为 $B \subseteq A$。这些正是直接从 $X$ 得到的 $B$ 中开集，所以两种拓扑相同。 □

**推论 3.45** (环境开闭性何时继承)**.** 若 $A$ 在 $X$ 中开，则 $U \subseteq A$ 在 $A$ 中开当且仅当 $U$ 在 $X$ 中开。若 $A$ 在 $X$ 中闭，则 $F \subseteq A$ 在 $A$ 中闭当且仅当 $F$ 在 $X$ 中闭。

*证明.* 若 $U = A \cap G$，其中 $G$ 在 $X$ 中开，则由 $A$ 开和有限交公理，$U$ 在 $X$ 中开。反过来，若 $U$ 在 $X$ 中开且 $U \subseteq A$，则 $U = A \cap U$，所以相对开。闭集情形中，若 $F = A \cap C$ 且 $A, C$ 在 $X$ 中闭，则交集闭；若 $F$ 在 $X$ 中闭且 $F \subseteq A$，则 $F = A \cap F$ 相对闭。 □

**定理 3.46** (子空间中的闭包、内部与导集)**.** 设 $B \subseteq A \subseteq X$。用下标标明所在空间，则

$$\mathrm{cl}_A B = A \cap \mathrm{cl}_X B, \qquad B'_A = A \cap B'_X,$$

$$\mathrm{int}_A B = A \setminus \mathrm{cl}_X(A \setminus B) = A \cap \mathrm{int}_X\big(B \cup (X \setminus A)\big).$$

一般只能断言

$$A \cap \mathrm{int}_X B \subseteq \mathrm{int}_A B, \qquad \partial_A B \subseteq A \cap \partial_X B.$$

证明. 取 $x \in A$。每个 $A$ 中含 $x$ 的开集都写成 $A \cap U$，其中 $U$ 在 $X$ 中开且含 $x$。因为 $B \subseteq A$，

$$(A \cap U) \cap B = U \cap B.$$

所以 $x$ 的每个相对开邻域与 $B$ 相交，当且仅当它的每个环境开邻域与 $B$ 相交。这证明闭包等式。把式中的 $B$ 换成 $B \setminus \{x\}$，同一相交等式给出导集等式。

在空间 $A$ 内应用补集与闭包关系，

$$\operatorname{int}_A B = A \setminus \operatorname{cl}_A(A \setminus B) = A \setminus \big(A \cap \operatorname{cl}_X(A \setminus B)\big) = A \setminus \operatorname{cl}_X(A \setminus B).$$

在 $X$ 中又有

$$X \setminus \operatorname{cl}_X(A \setminus B) = \operatorname{int}_X\big(X \setminus (A \setminus B)\big) = \operatorname{int}_X\big(B \cup (X \setminus A)\big),$$

最后一步使用了 $B \subseteq A$。再与 $A$ 相交得到内部公式。

若 $x \in A \cap \operatorname{int}_X B$，存在 $X$ 中开集 $U$ 使 $x \in U \subseteq B$，则 $A \cap U$ 是含 $x$ 且包含于 $B$ 的相对开集，故 $x \in \operatorname{int}_A B$。若 $x \in \partial_A B$，则 $x \in A \cap \operatorname{cl}_X B$，但 $x \notin \operatorname{int}_A B$。由刚证包含关系，$x \notin \operatorname{int}_X B$，故 $x \in A \cap \partial_X B$。 □

**推论 3.47** (相对边界公式)**.** 对 $B \subseteq A \subseteq X$，

$$\partial_A B = A \cap \operatorname{cl}_X B \cap \operatorname{cl}_X(A \setminus B).$$

若 $A$ 在 $X$ 中开，则

$$\operatorname{int}_A B = A \cap \operatorname{int}_X B, \qquad \partial_A B = A \cap \partial_X B.$$

证明. 在空间 $A$ 内使用边界公式，再分别使用子空间闭包公式，有

$$\partial_A B = \operatorname{cl}_A B \cap \operatorname{cl}_A(A \setminus B) = A \cap \operatorname{cl}_X B \cap \operatorname{cl}_X(A \setminus B).$$

若 $A$ 开，则 $\operatorname{int}_A B$ 是 $A$ 中开集，由推论 3.45，它在 $X$ 中也开。它包含于 $B$，故包含于 $\operatorname{int}_X B$。结合前一条定理的反向包含，得到内部等式。于是

$$\begin{aligned} \partial_A B &= (A \cap \operatorname{cl}_X B) \setminus (A \cap \operatorname{int}_X B) \\ &= A \cap (\operatorname{cl}_X B \setminus \operatorname{int}_X B) = A \cap \partial_X B. \end{aligned}$$

□

**例 3.48** (相对边界可以少一个点)**.** 在通常实直线中取 $A = [0,1]$、$B = [0,1/2)$。因为 $B = A \cap (-1, 1/2)$，它在 $A$ 中开，故 $\operatorname{int}_A B = B$。在实直线上，

$$\operatorname{int}_{\mathbb{R}} B = (0, 1/2), \qquad \operatorname{cl}_{\mathbb{R}} B = [0, 1/2].$$

对 $0 < x < 1/2$，取 $r = \frac{1}{2}\min\{x, 1/2 - x\} > 0$，则 $B(x, r) \subseteq B$，所以这些点为环境内部点。点 $0$ 的每个实邻域含负数，而其余不在 $(0, 1/2)$ 中的点要么为 $0$，要么不属于 $B$，因此没有其他内部点。集合 $B$ 的点已属于闭包；对端点 $1/2$ 的任意半径 $r > 0$，取 $t = \min\{r/2, 1/4\}$，则 $1/2 - t \in B \cap B(1/2, r)$，故 $1/2$ 也属于闭包。若 $x < 0$，取半径 $-x/2$ 的球避开 $B$；若 $x > 1/2$，取半径 $(x - 1/2)/2$ 的球避开 $B$。这证明所写的内部和闭包等式。由子空间闭包公式，

$$\operatorname{cl}_A B = [0, 1/2], \qquad \partial_A B = \{1/2\},$$

而 $\partial_{\mathbb{R}} B = \{0, 1/2\}$。因此相对内部的包含、相对边界的包含都可以严格。

$$\partial_{\mathbb{R}} B = \{0, 1/2\}, \qquad \partial_A B = \{1/2\}$$

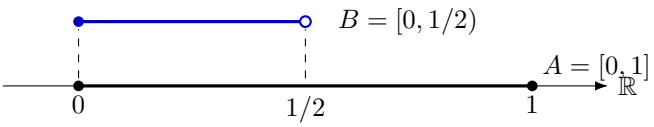



图 3.4: 相同子集在不同环境中的边界。上方线段只为排版上移，端点按下方坐标理解。点 0 在 $A$ 中有邻域 $A \cap (-1/4, 1/4)$ 留在 $B$ 中，故不属于相对边界；它的每个实邻域却都含负数和 $B$ 中的点。

**命题 3.49** (稠密性的传递)**.** *若 $D \subseteq A \subseteq X$，且 $D$ 在 $A$ 中稠密、$A$ 在 $X$ 中稠密，则 $D$ 在 $X$ 中稠密。*

*证明.* 任取 $X$ 中的非空开集 $U$。因为 $A$ 稠密，$A \cap U \neq \varnothing$。这个交集在 $A$ 中开，再由 $D$ 在 $A$ 中稠密，

$$(A \cap U) \cap D \neq \varnothing.$$

因 $D \subseteq A$，左端等于 $U \cap D$。所以每个非空环境开集都与 $D$ 相交，由稠密性的开集判别，$D$ 在 $X$ 中稠密。 □

## 3.8 有限空间的最小邻域

**命题 3.50** (有限空间中的最小开邻域)**.** *设 $X$ 为有限拓扑空间。对 $x \in X$，令*

$$N_x = \bigcap \{U \in \tau : x \in U\}.$$

*则 $N_x$ 是含 $x$ 的最小开集，所有 $N_x$ 组成拓扑的一个基。若 $y \in N_x$，则 $N_y \subseteq N_x$。*

*证明.* 因 $X$ 有限，幂集以及 $\tau$ 都有限，故定义中的交是有限个开集的交。又 $X$ 是含 $x$ 的开集，指标族非空。因此 $N_x$ 开且含 $x$，并按交的定义包含于每个含 $x$ 的开集。对任意开集 $U$ 和 $x \in U$，有 $x \in N_x \subseteq U$，故这些 $N_x$ 构成基。若 $y \in N_x$，则 $N_x$ 是含 $y$ 的开集，由 $N_y$ 的最小性，$N_y \subseteq N_x$。 □

**例 3.51** (实直线中不存在最小开邻域)**.** 在通常实直线中，点 0 的所有开邻域的交为 $\{0\}$。点 0 属于每一项；若 $y \neq 0$，开邻域 $(-|y|/2, |y|/2)$ 不含 $y$，所以 $y$ 不在交集中。但 $\{0\}$ 不开，因为它不包含任何正半径的开球。因此无限空间中的所有开邻域之交不一定开。若 0 有最小开邻域 $N_0$，则它包含于每个开邻域，故 $N_0 \subseteq \{0\}$。又 $0 \in N_0$，所以 $N_0 = \{0\}$，与其开性矛盾。

**定理 3.52** (有限拓扑与预序)**.** *在有限拓扑空间中定义*

$$x \preceq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \in N_x.$$

*该关系是预序，即自反且传递。一个集合 $U \subseteq X$ 开当且仅当它向上封闭：*

$$x \in U,\ x \preceq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U.$$

*反过来，任意集合上的预序所确定的全部向上封闭子集组成一个拓扑。当集合有限时，这两个构造互为逆构造。*

证明. 因 $x \in N_x$，有 $x \preceq x$，故自反。若 $x \preceq y$、$y \preceq z$，则 $y \in N_x$、$z \in N_y$。由上一命题 $N_y \subseteq N_x$，故 $z \in N_x$，得到传递性。

若 $U$ 开、$x \in U$，则 $N_x \subseteq U$，所以 $x \preceq y$ 蕴含 $y \in U$。反过来，若 $U$ 向上封闭，则 $x \in U$ 时 $N_x \subseteq U$。于是 $U = \bigcup_{x \in U} N_x$ 是开集。

现在从预序出发。空集与 $X$ 向上封闭。若 $x$ 属于一族向上封闭集的并，就属于其中某项；若 $x \preceq y$，则 $y$ 也在同一项中，故并向上封闭。若 $x$ 属于一族向上封闭集的交，则它在每一项中；$x \preceq y$ 使 $y$ 在每一项中，故交也向上封闭。因此这些集合满足拓扑公理，事实上还对任意交封闭。

在该拓扑中，集合 $\uparrow x = \{y : x \preceq y\}$ 由自反性含 $x$，由传递性向上封闭，故开。任何含 $x$ 的向上封闭集都包含它，所以它就是最小开邻域 $N_x$。因此重新读出的关系为原关系。反方向已由开集等价于向上封闭集证明，所以在有限集合上互逆。 □

**例 3.53** (三点链空间)**.** 取 $X = \{a, b, c\}$，预序为 $a \preceq b \preceq c$，除自反和传递强制的关系外没有其他关系。向上封闭集恰好为

$$\varnothing, \quad \{c\}, \quad \{b, c\}, \quad X.$$

因为一旦含 $a$ 就必须含 $b, c$，一旦含 $b$ 就必须含 $c$，而只含 $c$ 没有额外要求。最小邻域为

$$N_a = X, \qquad N_b = \{b, c\}, \qquad N_c = \{c\}.$$

对任意 $A \subseteq X$，闭包判别可以写成

$$x \in \overline{A} \iff N_x \cap A \neq \varnothing \iff \exists y \in A,\ x \preceq y.$$

第一个等价成立是因为 $N_x$ 是所有邻域中的最小者。例如 $\overline{\{a\}} = \{a\}$、$\overline{\{b\}} = \{a, b\}$、$\overline{\{c\}} = X$，所以 $\{c\}$ 稠密。

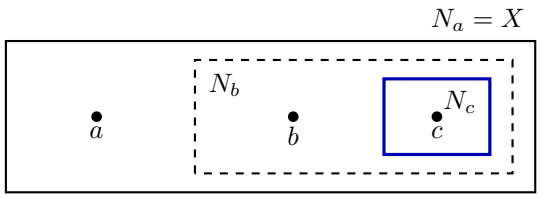



图 3.5: 三点链空间的最小开邻域。矩形仅标示有限集合的包含关系，不是欧氏平面中的开集。每个矩形所代表的集合只含图中标明的 $a, b, c$；例如虚线框表示 $\{b, c\}$。

预序不必反对称。若 $X = \{p, q\}$ 取平凡拓扑，则 $N_p = N_q = X$，所以 $p \preceq q$ 且 $q \preceq p$，但 $p \neq q$。这也给出两个不同点拥有完全相同邻域族的例子。

# 4 连续映射与空间的组合

## 4.1 逆像与连续性

给定映射 $f : X \to Y$，对 $B \subseteq Y$ 定义

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

这个记号表示集合的逆像，不要求 $f$ 单射或满射。只有在 $f$ 为双射时，$f^{-1} : Y \to X$ 才同时表示逆映射。

**引理 4.1** (逆像的集合运算)**.** *对任意一族 $B_\alpha \subseteq Y$，有*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_\alpha B_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha),$$
$$f^{-1}\Big(\bigcap_\alpha B_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha),$$
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

*空并的逆像为空集，空交的逆像为 $X$。*

*证明.* 点 $x$ 属于第一个等式左端，当且仅当存在 $\alpha$ 使 $f(x) \in B_\alpha$，即存在 $\alpha$ 使 $x \in f^{-1}(B_\alpha)$；这正是右端的成员条件。对第二个等式，左端的成员条件是对每个 $\alpha$ 都有 $f(x) \in B_\alpha$，等价于对每个 $\alpha$ 都有 $x \in f^{-1}(B_\alpha)$。第三个等式中，$f(x) \notin B$ 等价于 $x \notin f^{-1}(B)$。没有指标时，不存在满足条件的指标，所以并为空；“对每个指标”的条件对所有点成立，所以交为全集。 □

**定义 4.2** (连续映射与点处连续)**.** 设 $X, Y$ 为拓扑空间。若对 $Y$ 的每个开集 $V$，逆像 $f^{-1}(V)$ 在 $X$ 中开，则称 $f : X \to Y$ 连续。给定 $x \in X$，若对 $f(x)$ 的每个邻域 $N$，$f^{-1}(N)$ 都是 $x$ 的邻域，则称 $f$ 在 $x$ 处连续。

**定理 4.3** (局部定义与整体定义)**.** *映射 $f : X \to Y$ 连续，当且仅当它在每个点处连续。在一点 $x$ 处连续，又等价于下述条件：对每个含 $f(x)$ 的开集 $V$，存在含 $x$ 的开集 $U$，使 $f(U) \subseteq V$。这里可只检验 $f(x)$ 的某个邻域基中的集合。*

*证明.* 先设 $f$ 连续，$N$ 为 $f(x)$ 的邻域。取开集 $V$ 使 $f(x) \in V \subseteq N$。则 $x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(N)$，而 $f^{-1}(V)$ 开，所以 $f^{-1}(N)$ 为 $x$ 的邻域。

若 $f$ 在每个点连续，给定开集 $V \subseteq Y$，对 $x \in f^{-1}(V)$，逆像 $f^{-1}(V)$ 是 $x$ 的邻域，因而含一个含 $x$ 的开集。由开集的局部判别，$f^{-1}(V)$ 开。

在固定点 $x$，若邻域定义成立，应用于开集 $V$，在 $f^{-1}(V)$ 中取含 $x$ 的开集 $U$，便有 $f(U) \subseteq V$。反之，对邻域 $N$ 先取 $f(x) \in V \subseteq N$，再取这样的 $U$，就有 $x \in U \subseteq f^{-1}(N)$。若只对邻域基检验，给定任意邻域 $N$，取基中 $M \subseteq N$；$f^{-1}(M)$ 是邻域且包含于 $f^{-1}(N)$，所以后者仍是邻域。 □

**命题 4.4** (与度量定义相容)**.** *若 $X, Y$ 的拓扑分别由度量 $d, \rho$ 产生，则 $f$ 在 $x$ 处连续，当且仅当*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in X, \quad d(z, x) < \delta \implies \rho(f(z), f(x)) < \varepsilon.$$

证明. 开球构成邻域基。在点处连续时，$f^{-1}(B_\rho(f(x),\varepsilon))$ 含一个 $B_d(x,\delta)$，这正是所写的蕴含。反之，给定 $f(x)$ 的邻域 $N$，取 $B_\rho(f(x),\varepsilon)\subseteq N$，再取假设中的 $\delta$，便有 $B_d(x,\delta)\subseteq f^{-1}(N)$。因此该逆像为邻域。 □

**定理 4.5** (检验连续性的几种方式)**.** *设 $\mathcal{B}$ 为 $Y$ 的基，$\mathcal{S}$ 为 $Y$ 的子基。下列条件等价：*

1. *$f:X\to Y$ 连续；*
2. *$Y$ 的每个闭集的逆像在 $X$ 中闭；*
3. *对每个 $B\in\mathcal{B}$，$f^{-1}(B)$ 开；*
4. *对每个 $S\in\mathcal{S}$，$f^{-1}(S)$ 开。*

证明. 开集与闭集互为补集，由引理 4.1 的补集等式，条件 1 与 2 等价。条件 1 蕴含 3 和 4，因为基元素、子基元素均为开集。若条件 3 成立，把任意开集写成基元素的并，其逆像就是一族开集的并，故开。若条件 4 成立，任意开集是子基元素的有限交的并；逆像保持这些运算，所以逆像也开。空交给出的 $Y$ 的逆像为 $X$，不产生例外。 □

**定理 4.6** (闭包与内部的连续性判据)**.** *映射 $f:X\to Y$ 连续，当且仅当对所有 $A\subseteq X$，*

$$f(\operatorname{cl}_X A)\subseteq \operatorname{cl}_Y f(A).$$

*它还等价于下列两个条件中的任意一个：对所有 $B\subseteq Y$，*

$$\operatorname{cl}_X f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\operatorname{cl}_Y B),\qquad f^{-1}(\operatorname{int}_Y B)\subseteq \operatorname{int}_X f^{-1}(B).$$

证明. 若 $f$ 连续，$x\in\operatorname{cl}_X A$，给定 $f(x)$ 的开邻域 $V$，则 $f^{-1}(V)$ 是 $x$ 的开邻域，故与 $A$ 相交。取交中的 $a$，便有 $f(a)\in V\cap f(A)$。所以每个这样的 $V$ 都与 $f(A)$ 相交，$f(x)\in\operatorname{cl}_Y f(A)$。

反之，设第一个包含关系对所有 $A$ 成立。给定闭集 $F\subseteq Y$，令 $A=f^{-1}(F)$。则

$$f(\operatorname{cl}_X A)\subseteq \operatorname{cl}_Y f(A)\subseteq \operatorname{cl}_Y F=F.$$

因此 $\operatorname{cl}_X A\subseteq f^{-1}(F)=A$，而闭包总包含原集，所以 $A$ 闭。闭集逆像判据给出连续性。

若 $f$ 连续，$f^{-1}(\operatorname{cl}_Y B)$ 是包含 $f^{-1}(B)$ 的闭集，所以包含其闭包；$f^{-1}(\operatorname{int}_Y B)$ 则是包含于 $f^{-1}(B)$ 的开集，所以包含于该逆像的内部。若闭包逆像包含对所有 $B$ 成立，对闭集 $B=F$ 应用它便知 $f^{-1}(F)$ 闭。若内部逆像包含成立，对开集 $B=V$ 应用它便知 $f^{-1}(V)\subseteq\operatorname{int}_X f^{-1}(V)$，所以逆像开。 □

**推论 4.7** (连续像中的稠密性)**.** *若 $f:X\to Y$ 连续，$D$ 在 $X$ 中稠密，则 $f(D)$ 在子空间 $f(X)$ 中稠密。若 $f$ 还满射，则 $f(D)$ 在 $Y$ 中稠密。*

证明. 由 $\operatorname{cl}_X D=X$ 和前一定理，$f(X)\subseteq\operatorname{cl}_Y f(D)$。子空间闭包公式给出 $\operatorname{cl}_{f(X)} f(D)=f(X)\cap\operatorname{cl}_Y f(D)=f(X)$。满射时 $f(X)=Y$，就是第二个结论。 □

## 4.2 复合、限制与粘贴

**命题 4.8** (基本连续映射)**.** *恒等映射和常值映射连续；连续映射的复合连续。子空间包含映射 $i:A\hookrightarrow X$ 连续。若 $f:X\to Y$ 连续，则限制 $f|_A:A\to Y$ 连续。*

证明. 恒等映射对开集的逆像就是该开集。常值映射 $c(x)=y_0$ 对开集 $V$ 的逆像在 $y_0\in V$ 时为 $X$，在 $y_0\notin V$ 时为空，两者都开。若 $f:X\to Y$、$g:Y\to Z$ 连续，对开集 $W\subseteq Z$，

$$(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$$

为开集，所以复合连续。包含映射满足 $i^{-1}(U)=A\cap U$，对开集 $U\subseteq X$ 这是子空间开集。最后 $f|_A=f\circ i$，所以限制连续。 □

**命题 4.9** (把值域缩到子空间). 设 $f:X\to Y$ 的像包含于 $B\subseteq Y$，定义 $\widetilde{f}:X\to B$ 为同一映射规则。则 $f$ 连续当且仅当 $\widetilde{f}$ 对 $B$ 的子空间拓扑连续。

证明. 若 $f$ 连续，对 $B$ 的相对开集 $B\cap V$，其中 $V$ 在 $Y$ 中开，有 $\widetilde{f}^{-1}(B\cap V)=f^{-1}(V)$，所以逆像开。反之，$f$ 是 $\widetilde{f}$ 与连续包含映射 $B\hookrightarrow Y$ 的复合，因此连续。 □

**定理 4.10** (开覆盖粘贴). 设 $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$，各 $U_\alpha$ 在 $X$ 中开。若连续映射 $f_\alpha:U_\alpha\to Y$ 在交集上相等，即

$$f_\alpha(x)=f_\beta(x)\quad (x\in U_\alpha\cap U_\beta),$$

则存在唯一的连续映射 $f:X\to Y$，满足 $f|_{U_\alpha}=f_\alpha$。

证明. 每个 $x$ 至少属于一个 $U_\alpha$，规定 $f(x)=f_\alpha(x)$。交集上的相等保证此规定与指标选择无关；覆盖条件也保证唯一性。给定开集 $V\subseteq Y$，有

$$f^{-1}(V)=\bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}(V).$$

每项在 $U_\alpha$ 中开，而 $U_\alpha$ 在 $X$ 中开，故每项在 $X$ 中开。其并开，所以 $f$ 连续。 □

**定义 4.11** (局部有限族). 集合族 $(A_\alpha)$ 称为局部有限的，是指每个 $x\in X$ 都有一个开邻域，它只与有限多个 $A_\alpha$ 相交。

**引理 4.12** (局部有限的闭集之并). 若 $(F_\alpha)$ 为局部有限的闭集族，则 $\bigcup_\alpha F_\alpha$ 闭。

证明. 取 $x\notin\bigcup_\alpha F_\alpha$，并取开邻域 $U$，使只有 $F_{\alpha_1},\dots,F_{\alpha_m}$ 可能与 $U$ 相交。因为 $x$ 不属于这些闭集，

$$W=U\cap\bigcap_{j=1}^{m}(X\setminus F_{\alpha_j})$$

是含 $x$ 的开集。它避开所列的有限个闭集；其余闭集已经与 $U$ 不交，所以 $W$ 避开全部 $F_\alpha$。因此并的补集开。当 $m=0$ 时取 $W=U$，论证仍成立。 □

**定理 4.13** (闭覆盖粘贴). 设 $(F_\alpha)$ 为 $X$ 的局部有限闭覆盖。若连续映射 $f_\alpha:F_\alpha\to Y$ 在交集上相等，则它们粘贴成唯一的连续映射 $f:X\to Y$。特别地，有限闭覆盖满足此结论。

证明. 良定义和唯一性由覆盖及交集上的相等得到，与开覆盖时相同：每个 $x$ 的值必须等于任一包含它的 $F_\alpha$ 上指定的值，而所有这些值相等。给定闭集 $C\subseteq Y$，令 $E_\alpha=f_\alpha^{-1}(C)$。连续性说明 $E_\alpha$ 在 $F_\alpha$ 中闭。因为 $F_\alpha$ 在 $X$ 中闭，$E_\alpha$ 在 $X$ 中也闭。又 $E_\alpha\subseteq F_\alpha$，所以族 $(E_\alpha)$ 局部有限。由前一引理，$f^{-1}(C)=\bigcup_\alpha E_\alpha$ 闭，故 $f$ 连续。有限族自动局部有限，因为整个 $X$ 只遇到这有限多个集合。 □

**例 4.14** (无限闭覆盖不能直接粘贴)**.** 在子空间 $X=\{0\}\cup\{1/n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ 上，取每个单点集作为一块。各块均闭，且其上的任何映射都连续。定义 $f:X\to\mathbb{R}$ 为

$$f(0)=0,\qquad f(1/n)=1.$$

各块不相交，因而没有相容性障碍；但 $f^{-1}((-1/2,1/2))=\{0\}$ 在 $X$ 中不开。事实上，0 的每个相对开邻域都含 $X\cap(-r,r)$，其中 $r>0$；取 $n>1/r$，则该邻域还含 $1/n$。所以 $f$ 不连续。同一论证说明这个单点覆盖在 0 处不局部有限。

**例 4.15** (开集由到二点空间的映射刻画)**.** 令 $\mathbb{S}=\{0,1\}$ 取拓扑 $\{\varnothing,\{1\},\mathbb{S}\}$。给定 $A\subseteq X$，定义 $\chi_A(x)=1$ 当 $x\in A$, 否则取 0。则 $\chi_A:X\to\mathbb{S}$ 连续当且仅当 $A$ 开：三个开集的逆像依次是 $\varnothing,A,X$, 只有中间一项需要检验。若把值域改为离散二点空间, 则还须检验 $\chi_A^{-1}(\{0\})=X\setminus A$, 所以此时连续当且仅当 $A$ 既开又闭。

**命题 4.16** (有限空间中的连续映射)**.** *设 $X,Y$ 为有限拓扑空间，分别取第三章定义的预序 $x\preceq_X x'\iff x'\in N_x$、$y\preceq_Y y'\iff y'\in N_y$。则 $f:X\to Y$ 连续当且仅当它保持预序：*

$$x\preceq_X x'\implies f(x)\preceq_Y f(x').$$

*证明.* 若 $f$ 连续，$f^{-1}(N_{f(x)})$ 是含 $x$ 的开集，所以包含最小开邻域 $N_x$。对 $x'\in N_x$，得到 $f(x')\in N_{f(x)}$，这就是保持预序。反之，若 $f$ 保持预序，给定 $Y$ 的开集 $V$，若 $x\in f^{-1}(V)$ 且 $x\preceq_X x'$，则 $f(x)\in V$、$f(x)\preceq_Y f(x')$。第三章已证明开集恰为向上封闭的集合，所以 $f(x')\in V$。因此 $f^{-1}(V)$ 向上封闭，故在 $X$ 中开，$f$ 连续。 □

## 4.3 同胚、开映射与闭映射

**定义 4.17** (同胚、开映射、闭映射)**.** 若双射 $h:X\to Y$ 与其逆映射 $h^{-1}:Y\to X$ 都连续，则称 $h$ 为同胚，称 $X,Y$ 同胚，记作 $X\cong Y$。若映射 $f:X\to Y$ 将每个开集送到开集，则称 $f$ 为开映射；若将每个闭集送到闭集，则称 $f$ 为闭映射。开映射或闭映射的定义本身不包含连续性。

**定理 4.18** (连续双射何时为同胚)**.** *对连续双射 $h:X\to Y$，下列条件等价：$h$ 为同胚；$h$ 为开映射；$h$ 为闭映射。恒等映射是同胚，同胚的逆和两个同胚的复合仍为同胚。*

*证明.* 记逆映射为 $k:Y\to X$。对 $U\subseteq X$,

$$k^{-1}(U)=h(U).$$

因此 $k$ 连续当且仅当 $h$ 将开集送到开集。用闭集逆像判据，$k$ 连续也当且仅当 $h$ 将闭集送到闭集。这里 $k^{-1}(U)$ 是逆映射 $k$ 对集合 $U$ 的逆像。恒等映射及其逆都连续；同胚的逆只交换两条连续性条件。若 $h:X\to Y$、$g:Y\to Z$ 为同胚，则 $g\circ h$ 连续且双射，其逆为连续复合 $h^{-1}\circ g^{-1}$，所以也是同胚。 □

**例 4.19** (连续双射的逆可以不连续)**.** 设 $\tau_1,\tau_2$ 为同一集合 $X$ 上的两个拓扑。恒等规则 $\mathrm{id}:(X,\tau_2)\to(X,\tau_1)$ 连续，当且仅当 $\tau_1\subseteq\tau_2$，因为每个集合的逆像就是自身。它为同胚当且仅当两拓扑相等。

例如, 从下限拓扑实直线到通常实直线的恒等映射连续且双射。但其逆不连续：下限开集 $[0,1)$ 的逆像仍为 $[0,1)$，它不是通常开集，因为任意 $(-r,r)$ 都含不属于它的负数。从离散实直线到通常实直线的恒等映射也是连续双射；它的逆对离散开集 $\{0\}$ 的逆像不为通常开集。

**命题 4.20** (开映射与闭映射的集合判据)**.** 映射 $f : X \to Y$ 为开映射，当且仅当对所有 $A \subseteq X$，

$$f(\operatorname{int}_X A) \subseteq \operatorname{int}_Y f(A).$$

它为闭映射，当且仅当对所有 $A \subseteq X$，

$$\operatorname{cl}_Y f(A) \subseteq f(\operatorname{cl}_X A).$$

*证明.* 若 $f$ 开，则 $f(\operatorname{int}_X A)$ 是包含于 $f(A)$ 的开集，故包含于其内部。反之，对开集 $U$ 应用所给包含关系，得到 $f(U) = f(\operatorname{int}_X U) \subseteq \operatorname{int}_Y f(U)$，所以 $f(U)$ 开。若 $f$ 闭，则 $f(\operatorname{cl}_X A)$ 是包含 $f(A)$ 的闭集，故包含 $\operatorname{cl}_Y f(A)$。反之，对闭集 $F$ 应用所给关系，得到 $\operatorname{cl}_Y f(F) \subseteq f(\operatorname{cl}_X F) = f(F)$，所以 $f(F)$ 闭。 □

**例 4.21** (开映射和闭映射可以不连续)**.** 恒等规则 $\mathbb{R}_{\text{usual}} \to \mathbb{R}_{\text{discrete}}$ 将任意开集送到离散开集，也将任意闭集送到离散闭集，故既开又闭。但离散开集 $\{0\}$ 的逆像不是通常开集，所以该映射不连续。

**命题 4.22** (同胚保持的集合运算)**.** 若 $h : X \to Y$ 为同胚，则对任意 $A \subseteq X$，

$$h(\operatorname{int}_X A) = \operatorname{int}_Y h(A), \quad h(\operatorname{cl}_X A) = \operatorname{cl}_Y h(A),$$
$$h(\partial_X A) = \partial_Y h(A), \qquad h(A') = (h(A))'.$$

特别地，开性、闭性、稠密性及孤立点均在同胚下保持。

*证明.* $h(\operatorname{int}_X A)$ 是包含于 $h(A)$ 的开集，所以包含于其内部。若 $V = \operatorname{int}_Y h(A)$，则 $h^{-1}(V)$ 是包含于 $A$ 的开集，故包含于 $\operatorname{int}_X A$。两边施以 $h$ 得到反向包含，证明内部等式。连续性给出 $h(\operatorname{cl}_X A) \subseteq \operatorname{cl}_Y h(A)$。再对连续逆映射与集合 $h(A)$ 使用同一判据，得到 $h^{-1}(\operatorname{cl}_Y h(A)) \subseteq \operatorname{cl}_X A$，从而得到反向包含。双射保持集合差，而边界为闭包减内部，所以边界等式成立。

若 $x \in A'$，对 $h(x)$ 的任意开邻域 $V$，$h^{-1}(V)$ 是 $x$ 的开邻域，故含 $a \in A \setminus \{x\}$。单射性给出 $h(a) \neq h(x)$，因此 $V$ 与 $h(A) \setminus \{h(x)\}$ 相交。故 $h(x) \in (h(A))'$。对 $h^{-1}$ 重复这一论证，得到反向包含。开集等于自身内部，闭集等于自身闭包，稠密集的闭包为全空间，所以前三项性质保持。点 $a$ 在 $A$ 中孤立，等价于 $\{a\}$ 在子空间 $A$ 中开；同胚限制仍把相对开集对应到相对开集，所以孤立点也保持。 □

**例 4.23** (实直线与有界开区间同胚)**.** 定义

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1), \quad h(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \qquad k : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k(t) = \frac{t}{1 - |t|}.$$

因 $|x|/(1 + |x|) < 1$，$h$ 的值确在指定区间。又

$$1 - |h(x)| = \frac{1}{1 + |x|}, \qquad 1 + |k(t)| = \frac{1}{1 - |t|},$$

因此

$$k(h(x)) = \frac{x/(1 + |x|)}{1/(1 + |x|)} = x, \qquad h(k(t)) = \frac{t/(1 - |t|)}{1/(1 - |t|)} = t,$$

所以它们互为逆。用 $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$，有

$$|h(y) - h(x)| \le \frac{|y - x|}{1 + |y|} + \frac{|x|\,\big||y| - |x|\big|}{(1 + |y|)(1 + |x|)} \le 2|y - x|.$$

所以 $h$ 连续。固定 $t\in(-1,1)$，令 $c=1-|t|>0$。当 $|s-t|<c/2$ 时，$1-|s|>c/2$，从而

$$\begin{aligned}|k(s)-k(t)| &\le \frac{|s-t|}{1-|s|}+\frac{|t|\,\big||s|-|t|\big|}{(1-|s|)(1-|t|)}\\ &\le \left(\frac{2}{c}+\frac{2|t|}{c^2}\right)|s-t|=\frac{2}{c^2}|s-t|.\end{aligned}$$

给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{c/2,\varepsilon c^2/2\}$，即得 $k$ 在 $t$ 连续。故 $h$ 是同胚。

**命题 4.24** (等距映射与同胚)**.** *若 $(X,d),(Y,\rho)$ 为度量空间，映射 $e:X\to Y$ 满足*

$$\rho(e(x),e(x'))=d(x,x')\qquad(x,x'\in X),$$

*则 $e$ 单射，并且 $e:X\to e(X)$ 为同胚。若 $e$ 还满射，则 $X\cong Y$。*

*证明.* 若 $e(x)=e(x')$，距离等式给出 $d(x,x')=0$，故 $x=x'$。对任意 $r>0$，距离等式也给出

$$e(B_d(x,r))=e(X)\cap B_\rho(e(x),r).$$

它一方面说明 $e^{-1}(B_\rho(e(x),r))=B_d(x,r)$，故 $e$ 连续；另一方面说明 $e$ 把球送到像子空间的开集。任意开集为球的并，像保持并，所以 $e:X\to e(X)$ 是开映射。由连续双射判据，它为同胚。满射时 $e(X)=Y$。 □

**注 4.25.** 同胚不要求保持距离。例 4.23 的映射满足 $h(0)=0$、$h(1)=1/2$，所以不保持 $0,1$ 的距离。同胚也不要求保持某个指定度量的完备性：第二章例 2.44 中两种度量的恒等映射是同胚，但只有其中一种度量完备。

## 4.4 嵌入与像上的拓扑

**定义 4.26** (拓扑嵌入)**.** 若单射 $e:X\to Y$ 作为映射 $e:X\to e(X)$ 是同胚，其中 $e(X)$ 取 $Y$ 的子空间拓扑，则称 $e$ 为拓扑嵌入，简称嵌入。

**定理 4.27** (嵌入的开集判据)**.** *对单射 $e:X\to Y$，下列条件等价：*

1. *$e$ 是嵌入；*
2. *对 $U\subseteq X$，$U$ 开当且仅当存在 $Y$ 中开集 $V$ 使 $U=e^{-1}(V)$；*
3. *$e$ 连续，且对每个开集 $U\subseteq X$，存在 $Y$ 中开集 $V$，使 $e(U)=e(X)\cap V$。*

*证明.* 若 $e$ 是嵌入，$U$ 开当且仅当 $e(U)$ 在 $e(X)$ 中开，即 $e(U)=e(X)\cap V$，其中 $V$ 在 $Y$ 中开。单射性保证

$$U=e^{-1}(e(U))=e^{-1}(V),$$

所以条件 2 成立。若条件 2 成立，任意 $Y$-开集 $V$ 的逆像开，故 $e$ 连续。对 $X$-开集 $U$，选择 $U=e^{-1}(V)$，取像得到 $e(U)=e(X)\cap V$，故条件 3 成立。若条件 3 成立，缩到像的映射 $e:X\to e(X)$ 连续、双射且开，因此为同胚，得到条件 1。 □

**推论 4.28** (开单射、闭单射与包含映射)**.** *连续单射若为开映射或闭映射，则是嵌入。任意子空间包含映射是嵌入；两个嵌入的复合仍为嵌入。*

证明. 若连续单射 $e : X \to Y$ 为开映射，则 $e(U)$ 在 $Y$ 中开，所以在 $e(X)$ 中也开，满足前一定理的条件 3。若 $e$ 为闭映射，则对闭集 $F \subseteq X$，$e(F)$ 在像子空间中闭；故 $e : X \to e(X)$ 为连续闭双射，也是同胚。包含映射 $A \hookrightarrow X$ 在像上就是 $A$ 的恒等映射，因而是嵌入。

设 $e : X \to Y$、$j : Y \to Z$ 是嵌入。复合连续且单射。给定 $X$ 中开集 $U$，先取 $Y$-开集 $V$ 使 $e(U) = e(X) \cap V$，再取 $Z$-开集 $W$ 使 $j(V) = j(Y) \cap W$。由于 $j$ 单射，

$$(j \circ e)(U) = j(e(X)) \cap j(V) = j(e(X)) \cap W.$$

这满足嵌入判据，所以复合是嵌入。 □

**例 4.29** (嵌入未必是环境中的开映射或闭映射)**.** 取包含映射 $i : (0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$。它是嵌入，但不是开映射，也不是闭映射：整个定义域在自身中既开又闭，而它的像 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中既不开又不闭。不开是因为 1 的每个实邻域都含大于 1 的点；不闭是因为 $0 \notin (0,1]$，但每个 0 的实邻域都与 $(0,1]$ 相交。例 4.19 中从离散实直线到通常实直线的恒等映射则是连续单射，却不是嵌入，因为其像为整个值域而逆不连续。

**命题 4.30** (通过嵌入检验连续性)**.** *若 $e : X \to Y$ 为嵌入，则对任意映射 $g : Z \to X$，$g$ 连续当且仅当 $e \circ g : Z \to Y$ 连续。*

证明. 若 $g$ 连续，复合连续。反之，若 $e \circ g$ 连续，将其值域缩到子空间 $e(X)$ 后仍连续。再与连续逆映射 $(e : X \to e(X))^{-1}$ 复合，就得到 $g$ 连续。 □

## 4.5 有限积拓扑

**定义 4.31** (积拓扑)**.** 设 $X_1, \dots, X_m$ 为拓扑空间，$m \geq 1$。集合

$$P = \prod_{i=1}^{m} X_i = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X_i\}$$

上的积拓扑，定义为以所有开矩形 $\prod_{i=1}^{m} U_i$ 为基的拓扑，其中 $U_i$ 在 $X_i$ 中开。投影映射为 $\pi_i : P \to X_i$，$\pi_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$。

**定理 4.32** (矩形基与投影)**.** *上述开矩形确实构成一个基。各投影连续，且积拓扑是使各投影连续的最粗拓扑。若 $\mathcal{B}_i$ 为 $X_i$ 的基，则*

$$\left\{ \prod_{i=1}^{m} B_i : B_i \in \mathcal{B}_i \right\}$$

*也是积拓扑的基。*

证明. 整个 $P$ 本身是开矩形，所以矩形族覆盖 $P$。两开矩形之交满足

$$\left(\prod_i U_i\right) \cap \left(\prod_i V_i\right) = \prod_i (U_i \cap V_i),$$

右端仍为开矩形，所以满足基的交条件。基判据给出拓扑。若 $P$ 为空，覆盖与局部条件均成立，得到空集上唯一的拓扑。

对 $X_i$ 的开集 $U$，有 $\pi_i^{-1}(U) = X_1 \times \cdots \times U \times \cdots \times X_m$，这是开矩形，故 $\pi_i$ 连续。若 $P$ 上另一拓扑使全部投影连续，则每个这样的逆像在该拓扑中开，从而每个开矩形

$$\prod_i U_i = \bigcap_{i=1}^{m} \pi_i^{-1}(U_i)$$

也开。因此所有开矩形之并都开，该拓扑包含积拓扑。

最后，对矩形 $\prod_i U_i$ 中任意点 $x$，在每个坐标中选取 $B_i \in \mathcal{B}_i$ 使 $x_i \in B_i \subseteq U_i$。于是 $x \in \prod_i B_i \subseteq \prod_i U_i$。这些较小矩形本身积开，且能在每点细化原基，所以构成同一拓扑的基。 □

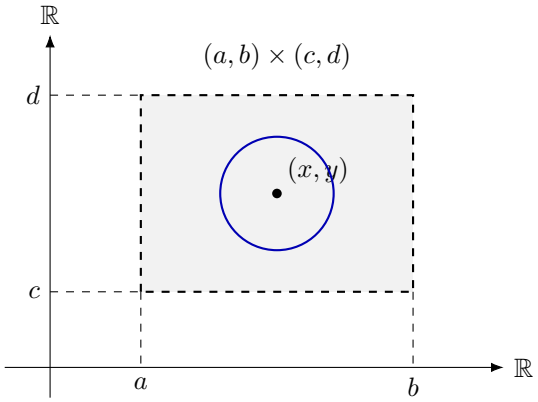



图 4.1: 实直线之积中的开矩形。虚线边界不属于矩形。对内部点 $(x, y)$，令 $r = \frac{1}{2}\min\{x-a, b-x, y-c, d-y\} > 0$，则以该点为心、半径为 $r$ 的欧氏开球包含于矩形。这给出积开集与欧氏开集比较时的一侧包含。

**定理 4.33** (有限积的泛性质)**.** *映射 $f : Z \to \prod_{i=1}^m X_i$ 连续，当且仅当每个坐标映射 $f_i = \pi_i \circ f : Z \to X_i$ 连续。给定任意一组连续映射 $f_i : Z \to X_i$，唯一满足 $\pi_i \circ f = f_i$ 的映射为*

$$f(z) = (f_1(z), \ldots, f_m(z)),$$

*且它连续。*

*证明.* 若 $f$ 连续，$f_i$ 为连续映射的复合，所以连续。若各 $f_i$ 连续，对任意基本开矩形有

$$f^{-1}\left(\prod_i U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U_i).$$

这是有限个开集之交，故开。由基判据，$f$ 连续。对给定的坐标映射，所写公式定义了一个取值于积的映射。一个有序元组由它的所有坐标唯一确定，所以没有其他满足条件的映射。它的连续性由刚证的判据得到。 □

**命题 4.34** (泛性质确定拓扑)**.** *设 $\sigma$ 是集合 $P = \prod_{i=1}^m X_i$ 上的一个拓扑，且对任意拓扑空间 $Z$ 及映射 $f : Z \to P$，都有 “$f$ 对 $\sigma$ 连续，当且仅当全部 $\pi_i \circ f$ 连续”。则 $\sigma$ 等于积拓扑。*

*证明.* 取 $Z = (P, \sigma)$、$f = \mathrm{id}$。恒等映射连续，假设给出各投影对 $\sigma$ 连续，故由最粗性，积拓扑包含于 $\sigma$。再取 $Z$ 为带积拓扑的 $P$，各坐标投影连续。假设给出恒等映射 $Z \to (P, \sigma)$ 连续，因而每个 $\sigma$-开集在积拓扑中开，得到反向包含。 □

**命题 4.35** (有限个度量空间之积)**.** *若 $(X_i, d_i)$ 为度量空间，则其有限积上的*

$$D(x,y) = \max_{1\le i\le m} d_i(x_i, y_i)$$

*是度量，产生的拓扑等于积拓扑。特别地，通常 $\mathbb{R}^m$ 的拓扑等于 $m$ 个通常实直线的积拓扑。*

*证明.* $D$ 非负、对称，且 $D(x,y)=0$ 当且仅当所有坐标相同。由各坐标的三角不等式，

$$d_i(x_i,z_i) \le d_i(x_i,y_i) + d_i(y_i,z_i) \le D(x,y) + D(y,z),$$

取最大值得到 $D$ 的三角不等式。其开球满足精确等式 $B_D(x,r) = \prod_i B_{d_i}(x_i, r)$，故为积开集。反过来，对开矩形 $\prod_i U_i$ 中的点 $x$，选取 $r_i > 0$ 使 $B_{d_i}(x_i, r_i) \subseteq U_i$，令 $r = \min_i r_i > 0$，则 $B_D(x,r) \subseteq \prod_i U_i$。两种开集因而相同。实数坐标时 $D$ 为最大范数的度量，而第二章已证明最大范数与欧氏范数给出同一拓扑，所以最后的结论成立。 □

**命题 4.36** (子空间的积与积映射)**.** *设 $A_i \subseteq X_i$。$\prod_i A_i$ 的积拓扑等于它在 $\prod_i X_i$ 中的子空间拓扑。若 $f_i : X_i \to Y_i$ 均连续，则*

$$\prod_i f_i : \prod_i X_i \to \prod_i Y_i, \quad (x_i)_i \longmapsto (f_i(x_i))_i$$

*连续。若每个 $f_i$ 是同胚，则积映射是同胚；若每个 $f_i$ 是嵌入，则积映射是嵌入。*

*证明.* 积空间中基本开集与子集相交得到

$$\left(\prod_i A_i\right) \cap \left(\prod_i U_i\right) = \prod_i (A_i \cap U_i).$$

左端是子空间拓扑的一组基，右端恰为相对开矩形，构成子空间之积的基。所以两拓扑相同。积映射的第 $i$ 个坐标为 $f_i \circ \pi_i$，是连续复合，由有限积泛性质，积映射连续。若每个 $f_i$ 为同胚，积映射为双射，逆为 $\prod_i f_i^{-1}$，其连续性由已证结论得到，故为同胚。若每个 $f_i$ 是嵌入，先把它看作到 $f_i(X_i)$ 的同胚。这些同胚的积为到 $\prod_i f_i(X_i)$ 的同胚，而该像的积拓扑正是环境积空间的子空间拓扑，所以原积映射为嵌入。 □

**命题 4.37** (坐标换序与分组)**.** *有限积中改变坐标的排列得到同胚。自然双射 $(X\times Y)\times Z \to X\times(Y\times Z)$，$((x,y),z)\mapsto(x,(y,z))$，也是同胚。若 $E=\{*\}$ 为单点空间，则 $X\times E\to X$，$(x,*)\mapsto x$，为同胚。*

*证明.* 对排列 $p$ 规定

$$T : \prod_{i=1}^{m} X_i \longrightarrow \prod_{j=1}^{m} X_{p(j)}, \qquad T((x_i)_i) = (x_{p(j)})_j.$$

每个坐标为原积的一个连续投影，故 $T$ 连续。逆映射把坐标按逆排列放回，每个坐标仍为连续投影，所以也连续。

对分组映射

$$a((x,y),z) = (x,(y,z)),$$

第一个坐标是投影的复合，连续；第二个坐标 $((x,y),z)\mapsto(y,z)$ 的两个坐标也分别是投影的复合，因此连续。两次应用积的坐标判据，得到 $a$ 连续。其逆 $b(x,(y,z)) = ((x,y),z)$ 的第一

个坐标 $(x,y)$ 由两个连续投影的复合组成，第二个坐标 $z$ 也是连续投影的复合，故 $b$ 连续。直接代入得 $b\circ a$、$a\circ b$ 都是恒等映射，因而为同胚。

最后，$X\times E\to X$ 是连续投影，其逆 $x\mapsto(x,*)$ 由连续恒等映射和连续常值映射组成，故连续，两者互逆。 □

**命题 4.38** (投影的开性与闭性的区别)**.** *有限积的坐标投影是开映射，但一般不是闭映射。*

*证明.* 开矩形 $\prod_i U_i$ 若有空因子，则其投影为空。若没有空因子，则它在第 $j$ 个坐标的投影为 $U_j$：任取 $u_j\in U_j$，在其余有限多个非空因子中分别选点，便得到一个以 $u_j$ 为第 $j$ 个坐标的元组。所以基本开集的投影开。任意开集为基本开集之并，而像保持并，故投影开。

在 $\mathbb{R}^2$ 中取 $F=\{(x,y):xy=1\}$。证明其闭性：若 $ab\neq 1$，令 $\eta=|ab-1|>0$，取

$$r=\min\left\{1,\frac{\eta}{2(|a|+|b|+1)}\right\}>0.$$

若 $|x-a|<r$、$|y-b|<r$，则 $|x|<|a|+1$，且

$$|xy-ab|\le|x|\,|y-b|+|b|\,|x-a|<(|a|+|b|+1)r\le\eta/2.$$

因而 $|xy-1|\ge\eta-|xy-ab|>0$。这给出避开 $F$ 的开矩形，所以 $F$ 的补集开。然而 $\pi_1(F)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$：若 $x\neq 0$，取 $y=1/x$；若 $x=0$，等式不可能成立。这个像不是闭集，因为 0 的每个开邻域都含非零实数。因此 $\pi_1$ 不是闭映射。 □

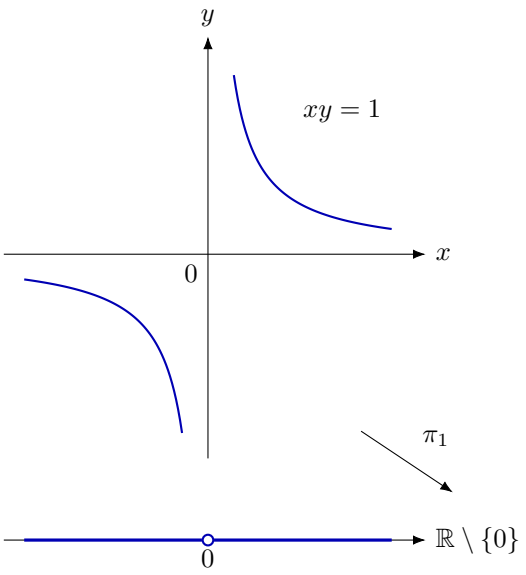



图 4.2: 闭集 $\{xy=1\}$ 的投影不是闭集。下方两段蓝线表示整条实轴除去原点的集合，在图框外继续延伸；双曲线的两支也继续延伸。原点属于像的闭包，却不是像中的点。

**命题 4.39** (矩形的闭包、内部与边界)**.** *对 $A_i\subseteq X_i$，有*

$$\mathrm{cl}_{\prod_i X_i}\left(\prod_i A_i\right)=\prod_i \mathrm{cl}_{X_i}A_i,\qquad \mathrm{int}_{\prod_i X_i}\left(\prod_i A_i\right)=\prod_i \mathrm{int}_{X_i}A_i.$$

*对两个因子，还可写成*

$$\partial(A\times B)=(\partial_X A\times \mathrm{cl}_Y B)\cup(\mathrm{cl}_X A\times\partial_Y B).$$

若每个 $D_i$ 在 $X_i$ 中稠密，则 $\prod_i D_i$ 在积空间中稠密。

证明. 若 $x$ 属于矩形的闭包，固定坐标 $j$，给定 $x_j$ 的开邻域 $U_j$，柱集 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 是 $x$ 的开邻域，故与 $\prod_i A_i$ 相交。因此 $U_j \cap A_j \neq \varnothing$，得到 $x_j \in \mathrm{cl}_{X_j} A_j$。反过来，若每个坐标都在相应闭包中，任取含 $x$ 的基本开矩形 $\prod_i U_i$，每个 $U_i \cap A_i$ 都非空。在有限多个交集中各取一点，所得元组就在 $(\prod_i U_i) \cap (\prod_i A_i)$ 中，证明闭包等式。

$\prod_i \mathrm{int}_{X_i} A_i$ 是包含于 $\prod_i A_i$ 的开矩形，故包含于其内部。若 $x$ 为该积的内部点，选取 $x \in \prod_i U_i \subseteq \prod_i A_i$。固定 $j$，任取 $u \in U_j$，把 $x$ 的第 $j$ 个坐标换成 $u$，得到的元组仍在左侧矩形中，所以 $u \in A_j$。于是 $U_j \subseteq A_j$，$x_j \in \mathrm{int}_{X_j} A_j$，得到反向包含。空积集情形，两侧都无点，上述结论仍成立。

边界为闭包减内部。记 $C = \mathrm{cl}_X A$、$D = \mathrm{cl}_Y B$、$U = \mathrm{int}_X A$、$V = \mathrm{int}_Y B$。因为 $U \subseteq C$、$V \subseteq D$，

$$(C \times D) \setminus (U \times V) = ((C \setminus U) \times D) \cup (C \times (D \setminus V)).$$

这个等式逐点表达“至少一个坐标不在相应内部中”，代入得到边界公式。若各 $D_i$ 稠密，闭包等式的右端为 $\prod_i X_i$，即得最后结论。 □

## 4.6　图像嵌入与实坐标运算

**命题 4.40** (图像映射). 若 $f : X \to Y$ 连续，则

$$\gamma_f : X \longrightarrow X \times Y, \qquad \gamma_f(x) = (x, f(x))$$

是嵌入。其像为图像 $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$，逆映射为 $\pi_X|_{\Gamma_f}$。

证明. 两个坐标分别为恒等映射与 $f$，所以由积的泛性质，$\gamma_f$ 连续。若 $\gamma_f(x) = \gamma_f(x')$，比较第一坐标得到 $x = x'$，故单射。把值域缩到 $\Gamma_f$ 后仍连续。投影 $\pi_X$ 连续，所以它在 $\Gamma_f$ 上的限制连续。而 $\pi_X(\gamma_f(x)) = x$、$\gamma_f(\pi_X(x, f(x))) = (x, f(x))$，所以这两个映射互为逆，得到嵌入。 □

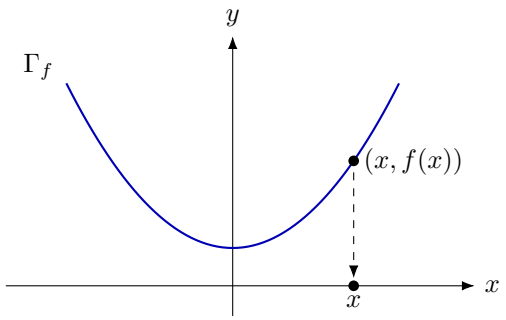



图 4.3: 连续函数 $f(x) = \frac{9}{20}x^2 + \frac{1}{2}$ 的图像嵌入。映射 $x \mapsto (x, f(x))$ 的逆由图像上的第一坐标投影给出，虚线箭头表示这个逆映射。图像同胚于定义域的证明依赖两个映射的连续性。

**命题 4.41** (实数的基本运算连续). 映射

$$(s,t) \mapsto s + t, \qquad (s,t) \mapsto st, \qquad t \mapsto -t, \qquad t \mapsto |t|, \qquad t \mapsto 1/t$$

在各自的自然定义域上连续，最后一个的定义域为 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$。若 $a, b : Z \to \mathbb{R}$ 连续，则 $a + b$、$ab$、$|a|$ 连续；若 $b$ 处处非零，则 $a/b$ 连续。

证明. 在 $\mathbb{R}^2$ 上用最大度量。加法满足

$$|(s+t)-(s_0+t_0)| \le |s-s_0|+|t-t_0| \le 2\max\{|s-s_0|,|t-t_0|\}.$$

故取 $\delta=\varepsilon/2$ 即可。对乘法，固定 $(s_0,t_0)$，当最大距离小于 1 时，$|s|<|s_0|+1$，于是

$$|st-s_0t_0| \le |s|\,|t-t_0|+|t_0|\,|s-s_0| < (|s_0|+|t_0|+1)\delta.$$

取 $\delta=\min\{1,\varepsilon/(|s_0|+|t_0|+1)\}$ 就得到连续性。取负保持距离，绝对值满足 $\big||s|-|t|\big| \le |s-t|$，因而二者连续。对 $t_0\neq 0$，若 $|t-t_0|<|t_0|/2$，则 $|t|>|t_0|/2$，故

$$\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{t_0}\right| = \frac{|t-t_0|}{|t|\,|t_0|} < \frac{2}{|t_0|^2}|t-t_0|.$$

取 $\delta=\min\{|t_0|/2,\varepsilon|t_0|^2/2\}$ 即可。对连续函数 $a,b$，映射 $(a,b):Z\to\mathbb{R}^2$ 连续。把它与加法、乘法复合得到前两项；把 $a$ 与绝对值复合得到第三项。若 $b$ 非零，先把它缩到 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$，再与取倒数复合，得到 $1/b$ 连续；与 $a$ 相乘即得商连续。 □

**例 4.42** (连续实函数的图像为闭集)**.** 若 $f:X\to\mathbb{R}$ 连续，则其图像在 $X\times\mathbb{R}$ 中闭。事实上，映射 $H(x,t)=t-f(x)$ 为连续坐标函数之差，所以连续。而 $\Gamma_f=H^{-1}(\{0\})$，$\{0\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中闭，所以图像闭。

闭图像本身不能推出连续性。取

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad g(0)=0,\quad g(x)=1/x\ (x\neq 0).$$

其图像是闭双曲线 $\{xy=1\}$ 与闭单点 $\{(0,0)\}$ 的并，故闭。但 $g^{-1}((-1,1))=\{0\}\cup(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ 在原点没有开邻域包含于自身，故 $g$ 不连续。

## 4.7 球面的立体投影

**定义 4.43** (球面与北极)**.** 对 $n\ge 1$，令

$$S^n=\{(u,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : \|u\|_2^2+t^2=1\},\qquad N=(0,1).$$

$S^n$ 及其去点子空间都取欧氏空间的子空间拓扑。这里把 $\mathbb{R}^n\times\{0\}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 用第一坐标对应。

**定理 4.44** (立体投影的公式与逆)**.** 映射

$$\sigma:S^n\setminus\{N\}\longrightarrow\mathbb{R}^n,\qquad \sigma(u,t)=\frac{u}{1-t}$$

为同胚，其逆为

$$\psi(v)=\left(\frac{2v}{1+\|v\|_2^2},\frac{\|v\|_2^2-1}{1+\|v\|_2^2}\right).$$

证明. 先说明分母不为零。球面条件给出 $|t|\le 1$。若 $t=1$，则 $\|u\|_2^2=0$，故 $u=0$，该点就是已排除的 $N$。因此定义域上 $1-t>0$。

直线 $N+\lambda((u,t)-N)$ 的坐标为 $(\lambda u,1+\lambda(t-1))$。它与超平面最后坐标为零相交时，$\lambda=1/(1-t)$，前 $n$ 个坐标因而为 $u/(1-t)$。这推导了投影公式。

反过来，直线 $N+\lambda((v,0)-N)=(\lambda v,1-\lambda)$ 上的点属于球面，当且仅当

$$\lambda^2\,\|v\|_2^2+(1-\lambda)^2=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda\big((1+\|v\|_2^2)\lambda-2\big)=0.$$

根 $\lambda=0$ 对应 $N$，另一根为 $\lambda=2/(1+\|v\|_2^2)$，代入得到所写的 $\psi$。

还需逐项验证其值域与逆关系。记 $q=\|v\|_2^2\ge 0$，则

$$\left\|\frac{2v}{1+q}\right\|_2^2+\left(\frac{q-1}{1+q}\right)^2=\frac{4q+(q-1)^2}{(1+q)^2}=1.$$

最后坐标比 $1$ 小 $2/(1+q)>0$，所以 $\psi(v)\neq N$。再计算

$$\sigma(\psi(v))=\frac{2v/(1+q)}{1-(q-1)/(1+q)}=v.$$

对 $(u,t)\in S^n\setminus\{N\}$，令 $v=u/(1-t)$，则

$$q=\frac{1-t^2}{(1-t)^2}=\frac{1+t}{1-t},\qquad 1+q=\frac{2}{1-t},\qquad q-1=\frac{2t}{1-t}.$$

这些等式给出 $2v/(1+q)=u$、$(q-1)/(1+q)=t$，所以 $\psi(\sigma(u,t))=(u,t)$。

最后证明连续性。坐标投影、有限次加法和乘法连续，所以 $\|v\|_2^2=\sum_{j=1}^{n}v_j^2$ 连续。$\sigma$ 的每个坐标为连续函数之商，分母在定义域上非零，因此连续。$\psi$ 的每个坐标也是分母处处正的连续函数之商，故作为到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的映射连续；缩到球面的去点子空间后仍连续。由积的坐标判据与互逆关系，$\sigma$ 为同胚。 □

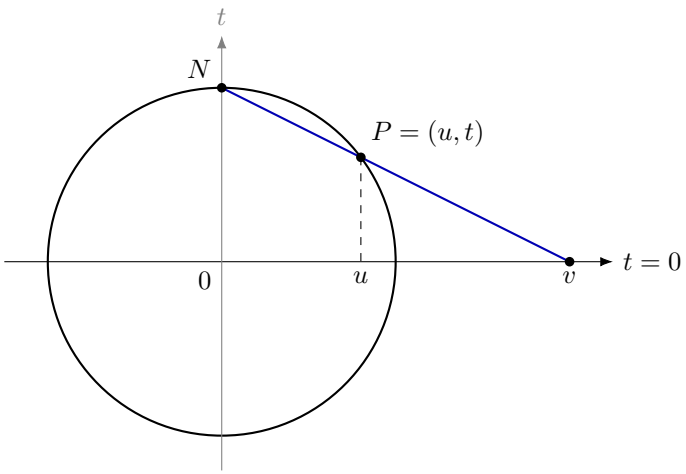



图 4.4: 单位圆上的立体投影。取 $P=(4/5,3/5)$，北极 $N=(0,1)$ 与 $P$ 的连线交水平轴于 $(2,0)$，与公式 $u/(1-t)=(4/5)/(2/5)=2$ 一致。高维时，选取包含北极、球心和投影直线的二维平面，即得到图中的圆截面。

**推论 4.45** (两张球面坐标图与变换)**.** 令 $S=(0,-1)$。两个开子空间 $S^n\setminus\{N\}$、$S^n\setminus\{S\}$ 覆盖 $S^n$，各自同胚于 $\mathbb{R}^n$。若北极投影坐标为 $v=u/(1-t)$，南极投影坐标为 $w=u/(1+t)$，则在两张图的重叠部分

$$w=\frac{v}{\|v\|_2^2}\quad(v\neq 0).$$

证明. 欧氏空间中的单点闭，所以两个去点集合在球面中开。因 $N \neq S$，它们的并为整个球面。反射 $R(u,t) = (u,-t)$ 保持欧氏距离，且将球面映到自身，交换两极，所以它在相应去点子空间间为同胚。南极投影就是 $\sigma \circ R$，故也是到 $\mathbb{R}^n$ 的同胚。

若 $v = 0$，北极投影的逆公式给出点 $S$，所以重叠部分恰对应 $v \neq 0$。令 $q = \|v\|_2^2 > 0$，代入逆公式得

$$w = \frac{2v/(1+q)}{1+(q-1)/(1+q)} = \frac{v}{q}.$$

这个变换连续，因为分母非零。又 $\|v/q\|_2^2 = 1/q$，再次应用同一公式得到 $(v/q)/(1/q) = v$，所以它的逆就是自身，重叠坐标间确为同胚。 □

## 4.8 拓扑和与分片定义

**定义 4.46** (拓扑和)**.** 设 $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ 为一族拓扑空间。取带指标的不交并

$$T = \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha = \{(\alpha, x) : \alpha \in I,\ x \in X_\alpha\},$$

并令 $j_\alpha(x) = (\alpha, x)$。规定 $U \subseteq T$ 开，当且仅当每个 $j_\alpha^{-1}(U)$ 在 $X_\alpha$ 中开。这一拓扑称为拓扑和。指标标签保留了来源，即使不同因子的原集合有交，也不会把点混同。

**定理 4.47** (拓扑和及其泛性质)**.** 上述规定是拓扑。各 $j_\alpha$ 是嵌入，其像既开又闭。映射 $f : T \to Y$ 连续当且仅当每个 $f \circ j_\alpha : X_\alpha \to Y$ 连续。因此任意一族连续映射 $f_\alpha : X_\alpha \to Y$，都唯一确定一个连续映射 $f : T \to Y$，使 $f \circ j_\alpha = f_\alpha$。

证明. 空集与全集在每块上的逆像分别为空集与该块，所以开。任意并、有限交在每块上的逆像仍分别为并、有限交，所以满足拓扑公理。由定义，$j_\alpha$ 连续且单射。给定 $X_\alpha$ 中开集 $V$，$j_\alpha(V)$ 在该块的逆像为 $V$，在其余块的逆像为空，所以在 $T$ 中开。故 $j_\alpha$ 是连续开单射，因而是嵌入。取 $V = X_\alpha$ 得每块开；其补集为其余开块的并，故每块也闭。

若 $f$ 连续，各限制复合连续。反之，给定开集 $V \subseteq Y$，有

$$j_\alpha^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ j_\alpha)^{-1}(V).$$

右端在每个因子中开，故 $f^{-1}(V)$ 在 $T$ 中开，$f$ 连续。对指定的 $f_\alpha$，必须规定 $f(\alpha, x) = f_\alpha(x)$。由于每点有唯一标签，此规定良定义且唯一，连续性由已证判据得到。 □

**命题 4.48** (空间何时是它的各块的拓扑和)**.** 设 $X = \bigsqcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ 为不交分解，各块取子空间拓扑。自然双射

$$q : \coprod_{\alpha} A_\alpha \to X, \qquad q(\alpha, x) = x$$

总连续；它是同胚当且仅当每个 $A_\alpha$ 在 $X$ 中开。

证明. $q$ 在每块上的限制为连续包含映射，所以由拓扑和的泛性质，$q$ 连续。若 $q$ 为同胚，每个开块的像 $A_\alpha$ 在 $X$ 中开。反过来，设各块开。对拓扑和中的开集 $U$，$U_\alpha = j_\alpha^{-1}(U)$ 在 $A_\alpha$ 中开，因为 $A_\alpha$ 开，所以 $U_\alpha$ 在 $X$ 中也开。因此 $q(U) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ 开，$q$ 为连续开双射，故为同胚。 □

**例 4.49** (不交分解未必给出拓扑和)**.** 取 $A=(-\infty,0)$、$B=[0,\infty)$。它们不交且并为 $\mathbb{R}$，但 $B$ 在通常实直线中不开，故自然双射 $A\coprod B\to\mathbb{R}$ 不是同胚。具体地，拓扑和中的整个 $B$ 块开，它的像却在 0 处不含任何通常开邻域，所以逆不连续。若将每个实数单点作为一块，则 $\coprod_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$ 是离散空间：任意子集在每块上的逆像不是空集就是整块，均开。因此它到通常实直线的自然双射连续，但不是同胚。

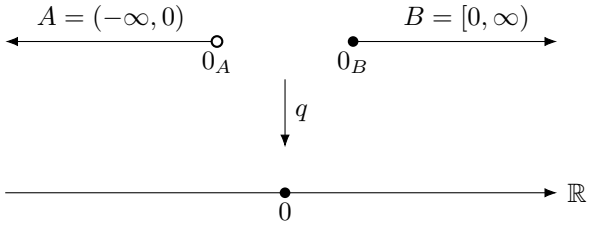



图 4.5: $A\coprod B$ 中两块分开，$0_A$ 只是第一条线上不属于 $A$ 的端点标记，实际只有 $0_B$ 是点。自然双射把两块按各自坐标送回实直线。拓扑和中的 $B$ 块开，而它在实直线中的像 $[0,\infty)$ 不开。

**命题 4.50** (有限积与拓扑和的分配)**.** *对任意拓扑空间 $X$ 和一族空间 $Y_\alpha$，自然双射*

$$\Phi:\coprod_\alpha(X\times Y_\alpha)\longrightarrow X\times\left(\coprod_\alpha Y_\alpha\right),\qquad \Phi(\alpha,(x,y))=(x,(\alpha,y))$$

*是同胚。*

*证明.* 右侧空间分成不交的开块 $X\times j_\alpha(Y_\alpha)$，因为各 $j_\alpha(Y_\alpha)$ 在拓扑和中开。每块的子空间拓扑等于子空间的积拓扑。映射 $(x,y)\mapsto(x,j_\alpha(y))$ 是恒等同胚与块同胚的积，所以从 $X\times Y_\alpha$ 到这一块为同胚。在每个定义域块上，$\Phi$ 为这一块同胚与环境包含映射的复合，故连续；由拓扑和的泛性质，$\Phi$ 连续。其逆规则为 $(x,(\alpha,y))\mapsto(\alpha,(x,y))$。在右侧每个开块上，这个规则为块同胚的逆与到左侧拓扑和的包含映射的复合，故连续。由开覆盖粘贴定理，整个逆映射连续，所以 $\Phi$ 为同胚。 □

# 5 分离、可数性与序列的边界

## 5.1 点的分离与 Hausdorff 性

**定义 5.1** (三个点分离公理)**.** 设 $X$ 为拓扑空间。

1. 若对任意不同点 $x, y$，存在开集恰好包含二者之一，则称 $X$ 为 $T_0$ 空间。这里不指定哪一点属于所选的开集。
2. 若对任意不同点 $x, y$，有开集 $U, V$ 使 $x \in U$、$y \notin U$、$y \in V$、$x \notin V$，则称 $X$ 为 $T_1$ 空间。
3. 若对任意不同点 $x, y$，有不交开集 $U, V$ 使 $x \in U$、$y \in V$，则称 $X$ 为 Hausdorff 空间，亦称 $T_2$ 空间。

**命题 5.2** (分离条件的蕴含)**.** *Hausdorff 空间为 $T_1$ 空间，$T_1$ 空间为 $T_0$ 空间。*

证明. 设 $x \neq y$，不交开集 $U \ni x$、$V \ni y$ 满足 $y \notin U$、$x \notin V$，所以 Hausdorff 条件给出 $T_1$ 条件。$T_1$ 条件给出的 $U$ 已恰好含 $x, y$ 之一，故又得到 $T_0$ 条件。 □

**定理 5.3** (单点闭集判据)**.** *空间 $X$ 为 $T_1$，当且仅当每个单点集闭。在此条件下，每个有限集都闭。*

证明. 设 $X$ 为 $T_1$，固定 $x$。对每个 $y \neq x$，选取含 $y$ 不含 $x$ 的开集 $U_y$。每个 $U_y$ 包含于 $X \setminus \{x\}$，而该补集的每点都在相应的 $U_y$ 中，故

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$$

开，单点集闭。反之，若单点集闭，对 $x \neq y$，开集 $X \setminus \{y\}$、$X \setminus \{x\}$ 分别满足 $T_1$ 要求。有限集是有限个闭单点集之并，所以也闭；空集的闭性由拓扑公理给出。 □

**例 5.4** (反向蕴含不成立)**.** Sierpiński 空间 $\{0, 1\}$ 的开集为 $\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}$。开集 $\{1\}$ 区分两个点，所以它为 $T_0$；单点集 $\{1\}$ 不闭，所以不是 $T_1$。在无限集合 $X$ 的余有限拓扑中，单点集都闭，所以为 $T_1$。若 $U, V$ 为非空开集，则

$$X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$$

有限。若 $U \cap V$ 为空，上式说明 $X$ 有限，矛盾。因此不存在两个不交非空开集，这个空间不是 Hausdorff 的。

**命题 5.5** (有限空间中的分离条件)**.** *在有限拓扑空间中，第三章的预序 $x \preceq y \iff y \in N_x$ 是偏序，当且仅当空间为 $T_0$。有限 $T_1$ 空间必为离散空间，因而为 Hausdorff 空间。*

证明. 已知此关系自反且传递，只需考察反对称性。若 $x \preceq y$ 且 $y \preceq x$，最小邻域性质给出 $N_y \subseteq N_x$ 与 $N_x \subseteq N_y$，所以 $N_x = N_y$。于是任何开集若含 $x$，就包含 $N_x$，从而含 $y$；任何开集若含 $y$，也含 $x$。在 $T_0$ 空间中两点不能如此不可区分，故 $x = y$，得到反对称性。若空间

不是 $T_0$，则存在不同点 $x, y$，没有开集恰好包含二者之一。每个含 $x$ 的开集都含 $y$，特别是 $y \in N_x$；同理 $x \in N_y$，所以反对称性失败。若有限空间为 $T_1$，所有单点闭，每个子集为有限个闭单点之并，故闭；其补集也闭，所以每个子集开，得到离散拓扑。 □

**定理 5.6** (度量空间的点分离)**.** *每个度量空间都是 Hausdorff 空间。*

*证明.* 给定不同点 $x, y$，令 $r = d(x,y)/3 > 0$。若有 $z \in B(x,r) \cap B(y,r)$，则

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < 2r = \frac{2}{3} d(x,y),$$

与 $d(x,y) > 0$ 矛盾。两个开球因而不交，且分别包含 $x, y$。 □

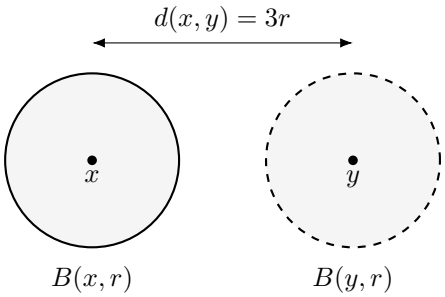



图 5.1: 用两个半径为 $d(x,y)/3$ 的开球分离两点。图以欧氏平面为例，圆周表示边界；一般度量空间中的不交性由三角不等式保证。

**命题 5.7** (Hausdorff 性的对角线判据)**.** *令 $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X$。空间 $X$ Hausdorff，当且仅当 $\Delta_X$ 在积空间中闭。*

*证明.* 若 $X$ Hausdorff，对 $(x,y) \notin \Delta_X$，取不交开集 $U \ni x$、$V \ni y$。矩形 $U \times V$ 不遇对角线：若它含 $(z,z)$，则 $z \in U \cap V$，矛盾。因此对角线的补集开。反过来，若对角线闭，对不同点 $x, y$，选取基本开矩形使

$$(x,y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X.$$

若 $z \in U \cap V$，则 $(z,z)$ 属于上述矩形，与其避开对角线矛盾。所以 $U, V$ 为分离两点的不交开集。 □

**定义 5.8** (拓扑空间中的序列收敛)**.** 序列 $(x_n)$ 称为收敛到 $x$，记作 $x_n \to x$，如果对 $x$ 的每个邻域 $N$，存在正整数 $k$，使所有 $n \ge k$ 都满足 $x_n \in N$。检验开邻域即已足够，因为每个邻域含一个开邻域。

在度量空间中，这与第二章的收敛定义相同：对每个 $r > 0$，尾部属于 $B(x,r)$，就是 $d(x_n, x) < r$ 最终成立；反过来，每个邻域包含一个这样的球。

**命题 5.9** (Hausdorff 空间中的极限与连续映射)**.** *在 Hausdorff 空间中，序列至多有一个极限。若 $Y$ Hausdorff，$f, g : X \to Y$ 连续，则相等点集*

$$E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

*闭。因此两个连续映射若在 $X$ 的一个稠密子集上相等，则处处相等。*

证明. 若 $x_n$ 同时趋于不同点 $x, y$, 取不交开邻域 $U \ni x$、$V \ni y$。收敛给出 $k_1, k_2$, 使 $n \geq k_1$ 时 $x_n \in U$, $n \geq k_2$ 时 $x_n \in V$。对 $n \geq \max\{k_1, k_2\}$, 得到 $x_n \in U \cap V$, 矛盾。映射 $H : X \to Y \times Y$、$H(x) = (f(x), g(x))$ 的两个坐标连续，所以 $H$ 连续。由对角线判据，$E = H^{-1}(\Delta_Y)$ 闭。若 $D \subseteq E$ 且 $D$ 稠密，则闭包的极小性给出 $X = \operatorname{cl} D \subseteq E$，所以 $f = g$。 □

**命题 5.10** (Hausdorff 值域中的闭图像). *若 $f : X \to Y$ 连续且 $Y$ Hausdorff, 则 $\Gamma_f$ 在 $X \times Y$ 中闭。*

证明. 映射 $H : X \times Y \to Y \times Y$、$H(x, y) = (f(x), y)$ 连续：第一坐标是 $f$ 与投影的复合，第二坐标是投影。又 $\Gamma_f = H^{-1}(\Delta_Y)$，而对角线闭，所以图像闭。 □

## 5.2 正则、正规与距离函数

**定义 5.11** (正则性与正规性). 空间 $X$ 称为正则空间，如果对每个闭集 $F$ 与 $x \notin F$，存在不交开集 $U, V$，使 $x \in U$、$F \subseteq V$。称 $X$ 为正规空间，如果对任意不交闭集 $A, B$，有不交开集 $U, V$，使 $A \subseteq U$、$B \subseteq V$。本书的“正则”“正规”本身不包括 $T_1$ 条件。正则且 $T_1$ 称为 $T_3$，正规且 $T_1$ 称为 $T_4$。

**命题 5.12** (邻域缩小的闭包判据). *空间正则，当且仅当对每个开集 $O \ni x$，有开集 $U$ 满足*

$$x \in U \subseteq \operatorname{cl} U \subseteq O.$$

*空间正规，当且仅当对每个闭集 $A$ 及包含它的开集 $O$，有开集 $U$ 满足*

$$A \subseteq U \subseteq \operatorname{cl} U \subseteq O.$$

*此外 $T_4$ 蕴含 $T_3$，$T_3$ 蕴含 Hausdorff 性。*

证明. 若空间正则，将点 $x$ 与闭集 $X \setminus O$ 分离，取不交开集 $U \ni x$、$V \supseteq X \setminus O$。则 $U \subseteq X \setminus V$，右侧闭，故 $\operatorname{cl} U \subseteq X \setminus V \subseteq O$。反之，给定闭集 $F$ 与 $x \notin F$，令 $O = X \setminus F$，选择上述 $U$。开集 $X \setminus \operatorname{cl} U$ 包含 $F$，并与 $U$ 不交，得到正则性。

若空间正规，对不交闭集 $A$、$X \setminus O$ 取不交开邻域 $U, V$，同一个包含链给出 $A \subseteq U \subseteq \operatorname{cl} U \subseteq O$。反之，对不交闭集 $A, B$，令 $O = X \setminus B$，再取满足包含链的 $U$。$U$ 和 $X \setminus \operatorname{cl} U$ 分别包含 $A, B$，且不交，得到正规性。若再有 $T_1$，单点集闭；正规性应用于 $\{x\}$、$F$ 就给出正则性。若空间正则且 $T_1$，对 $x \neq y$ 应用点 $x$ 与闭集 $\{y\}$ 的分离，得到 Hausdorff 条件。 □

**引理 5.13** (到非空集合的距离). *在度量空间中，对非空子集 $A$ 定义*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

*这是有限非负实数，且*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \qquad d(x, A) = 0 \iff x \in \operatorname{cl} A.$$

*因而距离函数连续；若 $A$ 闭，零点集恰为 $A$。*

证明. 距离族非空且以下界 0 有界，由实数完备性有下确界。选定 $a_0 \in A$，得到 $0 \le d(x,A) \le d(x,a_0) < \infty$，所以该下确界为有限非负实数。给定 $\eta > 0$，由下确界定义取 $a \in A$ 使 $d(y,a) < d(y,A) + \eta$。三角不等式给出

$$d(x,A) \le d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a) < d(x,y) + d(y,A) + \eta.$$

若 $d(x,A) > d(x,y) + d(y,A)$，取 $\eta$ 小于差值会产生矛盾，所以 $d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y)$。交换 $x,y$ 得到 $d(y,A) - d(x,A) \le d(x,y)$，两式合并即为绝对值估计。取 $\delta = \varepsilon$ 即可从此估计验证连续性。若 $d(x,A) = 0$，每个 $r > 0$ 都有 $a \in A$ 满足 $d(x,a) < r$，故每个球都与 $A$ 相交，$x \in \operatorname{cl} A$。若 $x \in \operatorname{cl} A$，每个球 $B(x,r)$ 都与 $A$ 相交，从而 $0 \le d(x,A) < r$ 对所有 $r > 0$ 成立，因此 $d(x,A) = 0$。 □

**定理 5.14** (度量空间中的闭集分离). *每个度量空间均为 $T_4$ 空间。更具体地，若 $A, B$ 为不交非空闭集，则*

$$h(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

*定义了连续函数 $h : X \to [0,1]$，满足 $h|_A = 0$、$h|_B = 1$。*

证明. 若分母在某个 $x$ 处为零，非负性使两个距离均为零。由闭性与前一引理，$x \in A \cap B$，矛盾。因此分母处处正，函数运算的连续性说明 $h$ 连续。两个距离非负，所以 $0 \le h \le 1$。在 $A$ 上，分子为零且分母正，故 $h = 0$；在 $B$ 上，$d(x,B) = 0$、$d(x,A) > 0$，故 $h = 1$。开集

$$U = h^{-1}([0, 1/3)), \qquad V = h^{-1}((2/3, 1])$$

分别包含 $A, B$ 且不交。这里两个区间均为 $[0,1]$ 中的相对开集，所以其逆像在 $X$ 中开。若 $A = \varnothing$，取 $U = \varnothing, V = X$；若 $B = \varnothing$，取 $U = X, V = \varnothing$。正规性因此在所有情形成立。度量空间又为 $T_1$，故为 $T_4$，并由前一命题为 $T_3$。 □

**例 5.15** (不交闭集之间的距离可以为零). 在 $\mathbb{R}$ 中，令

$$A = \{n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{n + 1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

二者不交：$n < n + 1/(n+1) < n+1$。任何有界区间只遇到 $A \cup B$ 的有限多个点。对 $x \notin A$，先看 $(x-1, x+1) \cap A$ 中的有限个点；若交为空，$B(x,1)$ 避开 $A$；若不空，取它们与 $x$ 的最小距离的一半再与 $1/2$ 取最小值，即得避开 $A$ 的球。故 $A$ 闭。对 $x \notin B$，用 $(x-1, x+1) \cap B$ 的有限性作上述距离选择，同样得到避开 $B$ 的球，故 $B$ 闭。但点对 $n \in A$、$n + 1/(n+1) \in B$ 的距离为 $1/(n+1)$，趋于零，所以 $\inf\{|a-b| : a \in A, b \in B\} = 0$。闭集分离函数的分母只要求逐点为正，并不要求存在一个全局正下界。

**命题 5.16** (分离性对子空间的遗传). *$T_0$、$T_1$、Hausdorff 性及正则性均对子空间遗传。正规空间的闭子空间正规。*

证明. 对 $A \subseteq X$ 中两点，环境中区分它们的开集与 $A$ 相交，就得到相对开集。若原开集不交，其与 $A$ 的交也不交。这分别验证 $T_0$、$T_1$ 与 Hausdorff 性。若 $X$ 正则，取 $x \in A$ 及其在 $A$ 中的开邻域 $O$。写 $O = A \cap G$，其中 $G$ 在 $X$ 中开。选择环境开集 $U$ 使 $x \in U \subseteq \operatorname{cl}_X U \subseteq G$。则

$$\operatorname{cl}_A(A \cap U) = A \cap \operatorname{cl}_X(A \cap U) \subseteq A \cap \operatorname{cl}_X U \subseteq O.$$

由邻域缩小判据，$A$ 正则。若 $A$ 是正规空间 $X$ 的闭子空间，$F, H$ 为 $A$ 中不交闭集，则它们在 $X$ 中也闭。取环境不交开集 $U \supseteq F$、$V \supseteq H$，相对开集 $A \cap U, A \cap V$ 就分离了 $F, H$。 □

## 5.3 第一可数、第二可数与可分性

**定义 5.17** (第一可数、第二可数与可分)**.** 空间 $X$ 称为第一可数，如果每个点都有可数的邻域基；称为第二可数，如果存在可数族作为整个空间的基；若存在可数稠密子集，则称为可分。

这里“可数”包括有限与空集。有限非空的邻域基可以重复元素，记成以 $\mathbb{N}$ 为指标的族；空空间的基可取空族。以下使用可数集的有限笛卡儿积、可数个可数集的并仍可数这些集合论结论。

**命题 5.18** (度量空间第一可数)**.** *度量空间中，$\{B(x,1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是每个点 $x$ 的可数邻域基。*

*证明.* 给定 $x$ 的邻域 $N$，先取开集 $O$ 使 $x \in O \subseteq N$，再取 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subseteq O$。由阿基米德性质取正整数 $n > 1/r$，于是 $B(x,1/n) \subseteq B(x,r) \subseteq N$。 □

**命题 5.19** (第二可数蕴含第一可数和可分)**.** *每个第二可数空间都是第一可数且可分的。*

*证明.* 设 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ 是全空间的可数基。固定 $x \in X$，令 $\mathcal{B}_x = \{B_n : x \in B_n\}$。若 $N$ 是 $x$ 的邻域，存在开集 $U$ 使 $x \in U \subseteq N$，再由基性质取 $B_n$ 满足 $x \in B_n \subseteq U$。所以 $\mathcal{B}_x$ 是可数邻域基，$X$ 第一可数。

对每个非空 $B_n$ 选取一点 $x_n \in B_n$，令 $D = \{x_n : B_n \neq \varnothing\}$。它至多可数。任意非空开集 $U$ 含某个基元素 $B_n$，该元素非空，所以 $x_n \in D \cap U$。因此 $D$ 稠密。 □

**定理 5.20** (可分度量空间恰有可数基)**.** *度量空间 $(X,d)$ 可分，当且仅当它第二可数。若 $D$ 是可数稠密集，则*

$$\mathcal{B}_D = \{B_d(a,q) : a \in D,\ q \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$

*是一个可数基。*

*证明.* 第二可数推出可分已由命题 5.19 证明。反过来，设 $D$ 可数且稠密。族 $\mathcal{B}_D$ 可数。给定开集 $U$ 和 $x \in U$，取 $\varepsilon > 0$ 使 $B(x,\varepsilon) \subseteq U$。稠密性给出 $a \in D \cap B(x,\varepsilon/3)$，于是 $d(a,x) < \varepsilon/3$。有理数稠密，故可取正有理数 $q$ 满足

$$d(a,x) < q < \varepsilon - d(a,x).$$

于是 $x \in B(a,q)$。若 $y \in B(a,q)$，则

$$d(y,x) \le d(y,a) + d(a,x) < q + d(a,x) < \varepsilon,$$

所以 $B(a,q) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq U$。这正是基的局部细化条件。 □

**推论 5.21** (欧氏空间的可数基)**.** *通常 $\mathbb{R}^n$ 是可分、第一可数和第二可数的。有理中心有理半径的球，以及有理端点矩形，均可作为可数基。*

*证明.* 给定 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\varepsilon > 0$，对每个坐标选取 $q_i \in \mathbb{Q}$ 使 $|x_i - q_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$，则 $\|x - q\|_2 < \varepsilon$。所以 $\mathbb{Q}^n$ 稠密，再用定理 5.20。有理矩形基在命题 3.17 中已直接证明，其基元素由有限个有理数确定，故可数。 □

**命题 5.22** (可数性对子空间的遗传)**.** *若 $X$ 第二可数，则每个子空间 $A \subseteq X$ 第二可数；若 $X$ 第一可数，则每个子空间第一可数。因此可分度量空间的每个子空间都可分。*

证明. 若 $\mathcal{B}$ 是 $X$ 的可数基，则

$$\mathcal{B}|_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$$

是子空间的基，仍可数。若 $x \in A$，$\mathcal{C}_x$ 是 $X$ 中的可数邻域基，则每个 $A \cap C$ 都包含 $x$ 的一个相对开邻域。族 $\{A \cap C : C \in \mathcal{C}_x\}$ 是 $A$ 中的邻域基：给定相对邻域 $N$，取开集 $U \subseteq X$ 使 $x \in A \cap U \subseteq N$，再从 $\mathcal{C}_x$ 取 $C \subseteq U$。前两句给出子空间第二可数性。若 $X$ 可分度量，则第二可数；子空间仍是度量空间，再由定理 5.20 得到可分性。 □

**定义 5.23** (开覆盖与 Lindelöf 性)**.** 一族开集 $\mathcal{U}$ 称为 $X$ 的开覆盖，如果 $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$。子族仍覆盖 $X$ 时称为子覆盖。若每个开覆盖都有至多可数的子覆盖，则称 $X$ 为 Lindelöf 空间。

**定理 5.24** (第二可数蕴含 Lindelöf 性)**.** *第二可数空间的任意开覆盖都有可数子覆盖。*

证明. 设 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ 为可数基，$\mathcal{U}$ 为开覆盖。令

$$I = \{n : B_n \subseteq U \text{ 对某个} U \in \mathcal{U}\}.$$

对每个 $n \in I$ 选一个 $U_n \in \mathcal{U}$ 使 $B_n \subseteq U_n$。族 $\{U_n : n \in I\}$ 可数。给定 $x \in X$，先由覆盖选取 $U \ni x$，再取 $B_n$ 使 $x \in B_n \subseteq U$。于是 $n \in I$，并且 $x \in U_n$。所以所选族覆盖 $X$。 □

**命题 5.25** (两种可数开集族判据)**.** *若 $X$ 可分，则任何由两两不交非空开集组成的族至多可数。若 $X$ 为度量空间，则下列条件等价：可分；第二可数；存在可数非空开集族 $\mathcal{C}$，使每个非空开集包含其中一个成员。空空间在最后一个条件中取空族。*

证明. 设 $D$ 为可数稠密集，将其点用不同的自然数编号。对每个非空开集 $U$，令 $n(U)$ 为 $U \cap D$ 中最小的编号。稠密性保证该编号存在。若两两不交开集族中的 $U, V$ 满足 $n(U) = n(V)$，则同一点同时在 $U, V$ 中，只能有 $U = V$。所以这个族到 $\mathbb{N}$ 有单射，至多可数。

度量情形中，前两个条件的等价已证明。第二可数给出最后一个条件，只需从可数基中删除空集。反之，从最后一个条件的每个 $C$ 选择一点 $c_C$，形成可数集 $D$。任意非空开集 $U$ 包含某个 $C$，所以 $c_C \in D \cap U$。这说明 $D$ 稠密，得到可分性。 □

**例 5.26** (给定稠密集与子空间的交未必稠密)**.** 在 $\mathbb{R}$ 中，取稠密集 $D = \mathbb{Q}$、子空间 $A = \{\sqrt{2}\}$。若 $\sqrt{2} = p/q$ 为最简正整数比，则 $p^2 = 2q^2$ 使 $p$ 偶；写 $p = 2k$ 又得 $q^2 = 2k^2$，所以 $q$ 也偶，与最简矛盾。因此 $D \cap A = \varnothing$，其在非空空间 $A$ 中不稠密。可分度量空间的子空间可分，需要重新选取稠密集，不能直接取这个交集。

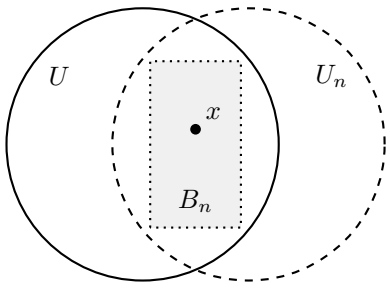



图 5.2: 含 $x$ 的覆盖成员 $U$ 中有基元素 $B_n$。按编号选出的覆盖成员 $U_n$ 可以不同于 $U$，但也包含整个 $B_n$，所以仍覆盖 $x$。图中圆形、矩形均示意开集，曲线只标示它们的边界。

## 5.4 第一可数空间中的序列判据

**引理 5.27** (可数邻域基的嵌套化)**.** *若 $x$ 有可数邻域基 $\{B_1, B_2, \dots\}$，则存在递减的开邻域基 $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$，且 $C_n \subseteq B_n$。*

*证明.* 对每个 $B_i$，选取开集 $U_i$ 使 $x \in U_i \subseteq B_i$，令

$$C_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

有限交给出开邻域，且 $C_{n+1} \subseteq C_n$、$C_n \subseteq B_n$。给定任意邻域 $N$，由原邻域基取 $B_k \subseteq N$，于是 $C_k \subseteq B_k \subseteq N$，所以 $\{C_n\}$ 仍为邻域基。 □

**定理 5.28** (第一可数空间的序列闭包判据)**.** *若 $X$ 第一可数，则对任意 $A \subseteq X$，*

$$x \in \operatorname{cl}_X A \iff \exists (a_n) \subseteq A, \quad a_n \to x.$$

*因此 $F \subseteq X$ 闭，当且仅当每个取值于 $F$ 的收敛序列的极限仍属于 $F$。*

*证明.* 若 $a_n \in A$ 且 $a_n \to x$，任意邻域从某项起包含 $a_n$，所以与 $A$ 相交，故 $x \in \operatorname{cl} A$。

反之，若 $x \in \operatorname{cl} A$，取引理给出的递减邻域基 $C_n$。闭包的邻域刻画说明每个 $C_n$ 与 $A$ 相交，选取 $a_n \in A \cap C_n$。给定邻域 $N$，取 $C_k \subseteq N$，则 $n \geq k$ 时 $a_n \in C_n \subseteq C_k \subseteq N$，所以 $a_n \to x$。闭集的序列判据由 $\operatorname{cl} F = F$ 直接得到；反向若不闭，对 $x \in \operatorname{cl} F \setminus F$ 应用已证构造，得到矛盾序列。 □

**推论 5.29** (连续性的序列判据)**.** *若 $f : X \to Y$ 连续，则对每个 $x_n \to x$，都有 $f(x_n) \to f(x)$。反过来，若 $X$ 第一可数，且上述蕴含对每个 $x$ 及每个趋于 $x$ 的序列成立，则 $f$ 连续；不要求 $Y$ 第一可数。*

*证明.* 给定 $x_n \to x$ 和邻域 $N \ni f(x)$，连续性使 $f^{-1}(N)$ 成为 $x$ 的邻域，所以 $x_n$ 的尾部落在此逆像中，得到 $f(x_n) \to f(x)$。

反之，若 $f$ 不连续，则存在 $x$ 及开集 $V \ni f(x)$，使 $f^{-1}(V)$ 不是 $x$ 的邻域。取递减可数邻域基 $C_n$，每个 $C_n \setminus f^{-1}(V)$ 非空；否则 $f^{-1}(V)$ 将包含邻域 $C_n$，与它不是邻域矛盾。选 $x_n$ 属于这个差集，则 $x_n \to x$，但所有 $f(x_n) \notin V$，所以不能收敛到 $f(x)$，与假设矛盾。 □

**命题 5.30** (聚点的序列刻画)**.** *若 $X$ 第一可数且 $T_1$，则*

$$x \in A' \iff \exists (a_n) \subseteq A \setminus \{x\}, \quad a_n \to x.$$

*序列可以选为取值两两不同。*

*证明.* 序列方向直接由聚点定义：每个邻域从某项起含有不同于 $x$ 的序列项。反过来，用递减邻域基 $C_n$，每个 $C_n \cap (A \setminus \{x\})$ 非空，选取 $a_n$ 得到收敛序列。要保证不同，归纳时已选 $a_1, \dots, a_{n-1}$ 后，集合 $X \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ 是含 $x$ 的开邻域，因为 $T_1$ 使有限集闭。它与 $C_n$ 的交仍是 $x$ 的邻域，故与 $A \setminus \{x\}$ 相交；从交集中选取 $a_n$ 即可。 □

**命题 5.31** (第一可数空间中的极限唯一性与分离)**.** *若 $X$ 第一可数，则 $X$ Hausdorff 当且仅当每个序列至多有一个极限。*

证明. Hausdorff 方向已经证明。反之，若 $X$ 不是 Hausdorff，存在不同点 $x, y$，它们的任意两个开邻域都相交。分别取递减的可数开邻域基 $U_n$、$V_n$。每个 $U_n \cap V_n$ 非空，选取 $z_n$ 属于此交。对 $x$ 的任意邻域 $N$，取 $U_k \subseteq N$，则 $n \geq k$ 时 $z_n \in U_n \subseteq U_k \subseteq N$，所以 $z_n \to x$。对 $y$ 的任意邻域 $M$，取 $V_j \subseteq M$，则 $n \geq j$ 时 $z_n \in V_n \subseteq V_j \subseteq M$，所以 $z_n \to y$。这与序列极限唯一矛盾。 □

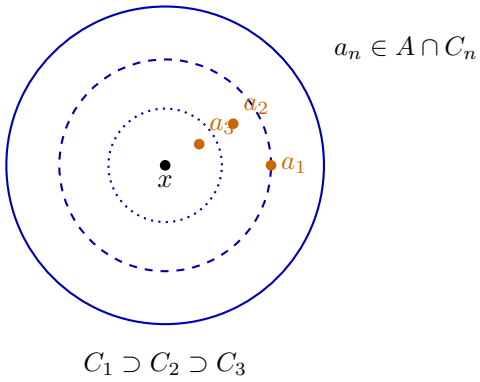



图 5.3: 在递减邻域基中逐项选点。每个后继点位于更小的邻域中，故序列的尾部会落入给定的任意邻域。圆盘仅示意邻域的包含关系，一般拓扑空间中的 $C_n$ 不要求是球，也不要求存在度量。

## 5.5　余可数拓扑与序列的边界

**命题 5.32** (不可数余可数空间不是第一可数). *若 $X$ 不可数，取余可数拓扑*

$$\tau_{\mathrm{cc}} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ 至多可数}\},$$

*则每个点都没有可数邻域基。*

证明. 固定 $x$，反设存在可数邻域基。由引理 5.27，可取由开邻域组成的可数邻域基 $\{U_n\}$。令 $C_n = X \setminus U_n$，则每个 $C_n$ 至多可数且不含 $x$。集合 $C = \{x\} \cup \bigcup_n C_n$ 至多可数，从不可数的 $X$ 中取 $y \notin C$。开集 $V = X \setminus \{y\}$ 含 $x$，基性质要求某个 $U_n \subseteq V$。但 $y \notin C_n$，即 $y \in U_n$，矛盾。 □

**定理 5.33** (余可数拓扑中的序列极限). *在不可数余可数空间中，$x_n \to x$ 当且仅当序列从某项起恒等于 $x$。*

证明. 令 $C = \{x_n : x_n \neq x\}$。这是不含 $x$ 的可数集，所以 $U = X \setminus C$ 是含 $x$ 的开邻域。收敛要求序列的尾部落在 $U$ 中，而 $U$ 中唯一可能出现的序列值是 $x$。故只有有限多个 $n$ 满足 $x_n \neq x$，即序列最终恒等于 $x$。反之，若最终恒等于 $x$，则每个含 $x$ 的邻域都包含序列的这段尾部，所以序列收敛到 $x$。 □

**例 5.34** (序列极限唯一并不蕴含 Hausdorff 性). 不可数余可数空间中，若同一序列趋于 $x$ 和 $y$，由前一定理，它在某段尾部恒等于 $x$，又在某段尾部恒等于 $y$。取两段尾部的交，得到 $x = y$。然而任意两个非空开集 $U, V$ 都相交：否则 $X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ 是两个至多可数集之并，与不可数性矛盾。所以它不是 Hausdorff 空间。

另一方向的现象发生在余有限拓扑中。若 $(x_n)$ 两两不同，则它收敛到空间中每个点：给定非空开邻域 $U$，补集有限，故序列只有有限项落在补集中。这也直接给出 $T_1$ 空间中极限不唯一的实例。

**例 5.35** (闭包不能由序列探测)**.** 取 $x \in X$，令 $A = X \setminus \{x\}$。若含 $x$ 的余可数开集 $U$ 与 $A$ 不交，则 $U \subseteq \{x\}$，从而 $U = \{x\}$。但 $X \setminus \{x\}$ 不可数，所以 $\{x\}$ 不是开集。故 $x \in \operatorname{cl} A$，并且 $\operatorname{cl} A = X$。另一方面，$A$ 中的序列不可能收敛到 $x$，因为余可数空间中的收敛序列必须最终等于极限。这说明一般拓扑空间中不能无条件使用序列闭包判据。

**命题 5.36** (余可数拓扑中的闭集和稠密集)**.** *在不可数余可数拓扑中，闭集恰为 $X$ 以及至多可数集；每个不可数子集稠密，每个至多可数子集闭。*

*证明.* 闭集是余可数开集的补集，故恰为全集与至多可数集。若 $A$ 不可数而某个非空开集 $U$ 与它不交，则 $A \subseteq X \setminus U$，右侧至多可数，矛盾。因此每个非空开集都与 $A$ 相交，$A$ 稠密。 □

**例 5.37** (序列连续但不连续)**.** 令 $X$ 不可数，考虑恒等规则

$$f : (X, \tau_{\mathrm{cc}}) \longrightarrow (X, \tau_{\mathrm{discrete}}).$$

余可数拓扑中的收敛序列最终恒等于极限，所以其像在离散拓扑中也收敛。然而 $f$ 不连续，因为离散空间中的单点集开，而其逆像是余可数空间中不开的单点集。这给出“保持所有序列极限”不推出连续性的具体反例。

## 5.6 可数性的进一步保持性质

**命题 5.38** (第二可数空间中的可数稠密子族)**.** *设 $X$ 第二可数，$\mathcal{U}$ 为开集族。若 $\bigcup \mathcal{U}$ 稠密，则存在可数子族 $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$，使 $\bigcup \mathcal{U}_0$ 稠密。*

*证明.* 取可数基 $\mathcal{B} = \{B_n\}$。对每个满足 $B_n \cap \bigcup \mathcal{U} \neq \varnothing$ 的 $n$，选取 $U_n \in \mathcal{U}$ 使 $B_n \cap U_n \neq \varnothing$，令 $\mathcal{U}_0 = \{U_n\}$。给定非空开集 $W$，稠密性给出 $x \in W \cap \bigcup \mathcal{U}$。取 $B_n$ 使 $x \in B_n \subseteq W$。按选择，$B_n \cap U_n \neq \varnothing$，故 $W \cap \bigcup \mathcal{U}_0 \neq \varnothing$。 □

**命题 5.39** (连续开满射的第二可数像)**.** *若 $X$ 第二可数，且 $f : X \to Y$ 是连续开满射，则 $Y$ 第二可数。*

*证明.* 设 $\mathcal{B}$ 为 $X$ 的可数基，令 $\mathcal{C} = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$。族 $\mathcal{C}$ 可数且由开性知其成员开。若 $V \subseteq Y$ 开、$y \in V$，取 $x$ 使 $f(x) = y$。连续性使 $f^{-1}(V)$ 开，取 $x \in B \subseteq f^{-1}(V)$，其中 $B \in \mathcal{B}$。于是 $y \in f(B) \subseteq V$，故 $\mathcal{C}$ 为基。 □

**命题 5.40** (拓扑和与有限积的可数性)**.** *有限个第二可数空间的积是第二可数；可数个第二可数空间的拓扑和是第二可数。有限个第一可数空间的积是第一可数；任意族第一可数空间的拓扑和第一可数。*

*证明.* 有限积中各空间取可数基 $\mathcal{B}_i$，所有矩形 $\prod_i B_i$ 的指标来自有限个可数集的笛卡儿积，仍可数；第四章已证明这些矩形构成积拓扑的基。固定积点 $x = (x_i)$，各坐标取可数邻域基 $\mathcal{C}_{i,x_i}$。所有矩形 $\prod_i C_i$ 构成可数邻域基：给定积邻域，先细化为基本矩形，即取 $x \in \prod_i U_i$ 包含于该邻域。在每个坐标选取 $C_i \in \mathcal{C}_{i,x_i}$ 满足 $C_i \subseteq U_i$，则 $x \in \prod_i C_i \subseteq \prod_i U_i$。每个 $C_i$ 含一个开邻域，这些开邻域之积说明 $\prod_i C_i$ 确为积点的邻域。

拓扑和中令每个分支的可数基为 $\mathcal{B}_\alpha$。若指标集可数，族 $\bigcup_\alpha \{j_\alpha(B) : B \in \mathcal{B}_\alpha\}$ 是可数并集，且构成全空间的基：给定开集 $U$ 中点 $(\alpha, x)$，逆像 $j_\alpha^{-1}(U)$ 开，选取 $x \in B \subseteq j_\alpha^{-1}(U)$，便有 $(\alpha, x) \in j_\alpha(B) \subseteq U$。若各分支第一可数，对 $(\alpha, x)$ 取该分支中 $x$ 的可数邻域基 $\mathcal{C}_x$。每个 $j_\alpha(C)$ 是拓扑和中的邻域，因为 $C$ 包含分支中的开邻域，而 $j_\alpha$ 将分支开集送到拓扑和开集。拓扑和中任意邻域在第 $\alpha$ 个分支的逆像是 $x$ 的邻域，故包含某个 $C \in \mathcal{C}_x$。因此 $\{j_\alpha(C) : C \in \mathcal{C}_x\}$ 为可数邻域基，不需要分支数可数。 □

**命题 5.41** (拓扑和的可数性充要条件)**.** *拓扑和第二可数，当且仅当每个分支第二可数，且非空分支至多可数。拓扑和可分，当且仅当每个分支可分，且非空分支至多可数。有限个可分空间的积可分。*

*证明.* 若拓扑和第二可数，每个分支作为子空间第二可数。全空间又可分，而非空分支组成两两不交非空开集族，由命题 5.25，非空分支至多可数。反向由前一命题的可数拓扑和基构造得到，空分支不贡献任何点或基元素。

若 $D$ 在拓扑和中可数且稠密，每个非空分支作为开集必须与 $D$ 相交，各分支不交使其数目至多可数。对分支中的非空开集 $U$，$j_\alpha(U)$ 在整个拓扑和中开，故遇到 $D$；因此 $j_\alpha^{-1}(D)$ 在该分支中为可数稠密集。反之，若非空分支至多可数，各取可数稠密集 $D_\alpha$，则 $\bigcup_\alpha j_\alpha(D_\alpha)$ 可数，且与每个非空开集相交，故稠密。

最后，在有限积中，各因子选择可数稠密集 $D_i$。$\prod_i D_i$ 可数；每个非空基本矩形 $\prod_i U_i$ 的各因子非空，分别选择 $d_i \in D_i \cap U_i$，便在矩形中得到该积稠密集的一点。若积为空，空集本身就是可数稠密集。 □

**命题 5.42** (分离性对有限积的保持)**.** *有限个 $T_0$、$T_1$ 或 Hausdorff 空间的积，分别仍为同类空间。任意族空间的拓扑和为 Hausdorff，当且仅当每个分支为 Hausdorff。*

*证明.* 设 $x = (x_i)$、$y = (y_i)$ 是积中的不同点，取坐标 $j$ 使 $x_j \neq y_j$。若第 $j$ 个空间为 $T_0$，取开集 $U_j$ 区分这两个坐标，其余坐标取全集；所得柱集是积开集，区分 $x, y$。若各因子为 $T_1$，在第 $j$ 个坐标取分别排除另一点的开集，柱集给出 $T_1$。若各因子 Hausdorff，在第 $j$ 个坐标取不交开集，柱集不交，给出 Hausdorff 性。

若拓扑和 Hausdorff，同一分支的两点可用拓扑和中的开集分离，与该分支相交后得到分支中的不交开集，所以每个分支 Hausdorff。反过来，若两点来自不同分支，则各分支的像都是开集且不交；若来自同一分支，使用该分支的 Hausdorff 邻域，并把它们嵌入拓扑和。 □

**例 5.43** (不可数拓扑和的第二可数性障碍)**.** 不可数个非空单点空间的拓扑和是不可数离散空间。每个单点分支本身第二可数，但拓扑和具有不可数多个单点开集，不能由可数基覆盖：若 $\mathcal{B}$ 可数，每个 $B \in \mathcal{B}$ 在离散空间中是某个子集；要细化每个单点开集 $\{x\}$，基中必须有包含 $x$ 且包含于 $\{x\}$ 的成员，即必须包含 $\{x\}$。这样基至少不可数，矛盾。

## 5.7 下限直线与不可逆的可数性蕴含

**定义 5.44** (下限直线)**.** 记 $\mathbb{R}_\ell$ 为以所有半开区间 $[a, b)$、$a < b$，为基的实直线。第三章已验证它们生成拓扑，且此拓扑严格细于通常实直线拓扑。

**定理 5.45** (第一可数且可分但非第二可数)**.** *下限直线 $\mathbb{R}_\ell$ 第一可数、可分且 Hausdorff，但不是第二可数空间，因而不能由任何度量产生其拓扑。*

*证明.* 固定 $x$，族 $\{[x, x+1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ 为邻域基。事实上，任意含 $x$ 的基本区间 $[a,b)$ 满足 $a \le x < b$，取 $n > 1/(b-x)$ 即有 $[x, x+1/n) \subseteq [a,b)$。非空下限开集含某个 $[a,b)$，而通常开区间 $(a,b)$ 含有理数，所以 $\mathbb{Q}$ 是下限直线中的可数稠密集。若 $x < y$，开邻域 $[x,y)$、$[y,y+1)$ 不交，所以它 Hausdorff。

设 $\mathcal{B}$ 为任意拓扑基。对每个 $x \in \mathbb{R}$，由基性质在开集 $[x, x+1)$ 中选取

$$x \in B_x \subseteq [x, x+1), \qquad B_x \in \mathcal{B}.$$

若 $x < y$，则 $x \in B_x$，但 $B_y \subseteq [y, y+1)$ 不含 $x$，所以 $B_x \neq B_y$。若 $y < x$，同理 $y \in B_y$ 而 $y \notin B_x$。因此 $x \mapsto B_x$ 是单射，任何基的基数都至少为实数集的基数，不可能可数。若有某个度量产生下限拓扑，可分性将由定理 5.20 推出第二可数性，矛盾。 □

**命题 5.46** (下限直线中序列的收敛)**.** *对实数序列 $(x_n)$ 和 $x \in \mathbb{R}$，下列条件等价：*

1. *$x_n \to x$ 在下限拓扑中成立；*
2. *$x_n \to x$ 在通常拓扑中成立，且存在 $k$ 使所有 $n \ge k$ 满足 $x_n \ge x$。*

*证明.* 从下限直线到通常直线的恒等映射连续，故下限收敛给出通常收敛。又 $[x, x+1)$ 是下限开邻域，收敛使尾部落在其中，所以最终 $x_n \ge x$。反过来，若通常收敛且最终 $x_n \ge x$，给定下限基本邻域 $[x, x+\varepsilon)$，通常收敛给出 $m$ 使 $n \ge m$ 时 $|x_n - x| < \varepsilon$。再要求 $n \ge k$，便得 $x \le x_n < x + \varepsilon$。这些基本邻域构成邻域基，故下限收敛成立。 □

**例 5.47** (同一实数列的两个拓扑判别)**.** 序列 $1/n$ 在通常拓扑和下限拓扑中都收敛到 $0$；序列 $-1/n$ 在通常拓扑中收敛到 $0$，却不在下限拓扑中收敛到 $0$，因为它的所有项都不属于开邻域 $[0,1)$。它也没有其他下限极限：若下限收敛到 $y$，通常拓扑中也趋于 $y$，而通常实直线 Hausdorff，极限唯一，所以必须 $y = 0$，矛盾。

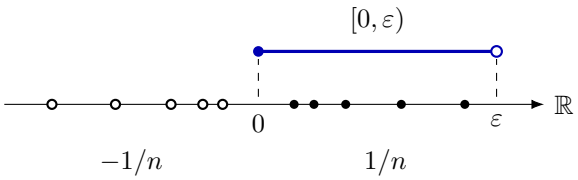



图 5.4: 在下限拓扑中趋于 $0$ 还要求最终位于 $0$ 的右侧或等于 $0$。上方半开区间为排版上移，空心右端点不属于区间。下方只示意两列在原点两侧的分布，不表示上方区间中列出了全部序列项。

**定理 5.48** (可分性不对一般子空间遗传)**.** *空间 $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ 第一可数、可分且 Hausdorff。其子空间*

$$L = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$$

*是不可数闭离散子空间，因而不可分。*

*证明.* 两个因子都第一可数且 Hausdorff，所以由有限积的保持性质，积亦如此。任意非空基本矩形 $[a,b) \times [c,d)$ 中，分别在 $(a,b)$、$(c,d)$ 选取有理数 $p, q$，就有 $(p,q)$ 属于此矩形。因此可数集 $\mathbb{Q}^2$ 稠密，积空间可分。

先证 $L$ 闭。对 $(a,b)\notin L$，有 $a+b\neq 0$。若 $a+b>0$，基本矩形 $[a,a+1)\times[b,b+1)$ 中每点满足 $x+y\geq a+b>0$，故避开 $L$。若 $a+b<0$，令 $\varepsilon=-(a+b)/3>0$。在矩形 $[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\varepsilon)$ 中有

$$x+y<a+b+2\varepsilon=(a+b)/3<0,$$

故此矩形也避开 $L$。于是补集开。

固定 $p_t=(t,-t)\in L$。矩形

$$U_t=[t,t+1)\times[-t,-t+1)$$

与 $L$ 的交只有 $p_t$：若 $(s,-s)\in U_t$，则 $s\geq t$ 且 $-s\geq -t$，后者等价于 $s\leq t$，故 $s=t$。因此 $\{p_t\}$ 在 $L$ 中开，每个子集为单点开集之并，$L$ 离散。映射 $t\mapsto p_t$ 为双射，所以 $L$ 不可数。若 $D\subseteq L$ 稠密，每个单点开集必须与 $D$ 相交，故 $D=L$ 不可数。因此 $L$ 不可分。　□

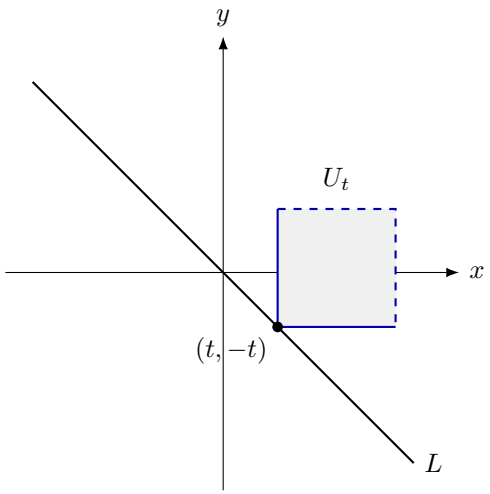



图 5.5: 下限平面的反对角线 $L$。从 $(t,-t)$ 向右上方延伸的基本矩形与 $L$ 仅交于左下角。实线表示包含的左、下边，虚线表示不含的上、右边；图中矩形长度作了缩放，不改变交集计算。

**例 5.49** (第一可数不蕴含可分)**.** 不可数离散空间的每个点都有单元素邻域基 $\{\{x\}\}$，所以第一可数，也由离散度量成为 Hausdorff 度量空间。但稠密集必须遇到每个单点开集，因而只能是全空间，不能可数。结合下限直线，可分且第一可数也不足以推出第二可数。

**例 5.50** (可分不蕴含第一可数)**.** 在实数集上取余有限拓扑，记为 $X$。任取非空开集 $U$，补集有限，而 $\mathbb{N}$ 无限，所以 $U\cap\mathbb{N}\neq\varnothing$。因此可数集 $\mathbb{N}$ 在 $X$ 中稠密。固定 $x$，反设存在可数邻域基。将其逐项缩为开邻域，可得可数开邻域基 $\{U_n\}$。每个 $X\setminus U_n$ 有限，所以 $C=\{x\}\cup\bigcup_n(X\setminus U_n)$ 至多可数。取 $y\in\mathbb{R}\setminus C$。开集 $X\setminus\{y\}$ 含 $x$，但每个 $U_n$ 都含 $y$，没有一个包含于此开集，违反邻域基定义。因此 $X$ 在每点都不是第一可数的。

## 5.8　Lindelöf 性与闭集分离

**命题 5.51** (Lindelöf 性的闭子空间与连续像)**.** *Lindelöf 空间的闭子空间仍 Lindelöf；Lindelöf 空间在连续满射下的像仍 Lindelöf。*

证明. 设 $F$ 在 Lindelöf 空间 $X$ 中闭, $(V_\alpha)$ 是 $F$ 的相对开覆盖。写 $V_\alpha = F \cap U_\alpha$, 其中 $U_\alpha$ 在 $X$ 中开。族 $(U_\alpha)$ 再加上 $X \setminus F$ 就是 $X$ 的开覆盖。抽取至多可数子覆盖, 删去其中可能出现的 $X \setminus F$, 再与 $F$ 相交, 得到原相对覆盖的至多可数子覆盖。设 $f : X \to Y$ 连续满射, $(W_\alpha)$ 覆盖 $Y$。逆像 $(f^{-1}(W_\alpha))$ 是 $X$ 的开覆盖, 抽取可数子覆盖 $(f^{-1}(W_{\alpha_n}))$。给定 $y \in Y$, 由满射取 $x$ 使 $f(x) = y$, 某个 $n$ 满足 $x \in f^{-1}(W_{\alpha_n})$, 所以 $y \in W_{\alpha_n}$。于是 $(W_{\alpha_n})$ 覆盖 $Y$。 □

**定理 5.52** (度量空间中的 Lindelöf 性)**.** *对度量空间, 可分性、第二可数性和 Lindelöf 性等价。*

证明. 前两者等价且蕴含 Lindelöf 性已证明。设空间非空且 Lindelöf。固定正整数 $n$, 以所有点为中心、半径为 $1/n$ 的开球覆盖全空间。选取至多可数个中心 $x_{n,k}$, 使

$$X = \bigcup_k B(x_{n,k}, 1/n).$$

令 $D = \{x_{n,k} : n \geq 1,\ k \text{ 为所选球的指标}\}$, 这是可数集。给定非空开集 $U$, 取 $x \in U$ 以及 $\varepsilon > 0$ 使 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$。选取 $n > 1/\varepsilon$, 因第 $n$ 族球覆盖 $X$, 有 $k$ 满足 $d(x, x_{n,k}) < 1/n < \varepsilon$。故 $x_{n,k} \in D \cap U$。每个非空开集都遇到 $D$, 所以 $D$ 稠密。空空间可直接取 $D = \varnothing$。 □

**定理 5.53** (正则 Lindelöf 空间正规)**.** *若空间正则且 Lindelöf, 则空间正规。特别地, 正则第二可数空间正规。*

证明. 给定不交闭集 $A, B$。若其中之一为空, 分别用空集、全集分离。以下设二者非空。对每个 $a \in A$, 用正则性的邻域缩小判据选取开集 $U_a$, 使

$$a \in U_a \subseteq \operatorname{cl} U_a \subseteq X \setminus B.$$

$A$ 是 Lindelöf 空间的闭子空间, 因此存在至多可数子族 $U_1, U_2, \ldots$ 覆盖 $A$, 且 $\operatorname{cl} U_n \cap B = \varnothing$。同理, 对每个 $b \in B$ 先选开集 $V_b$ 使其闭包避开 $A$, 再用 $B$ 的 Lindelöf 性, 得到覆盖 $B$ 的至多可数族 $V_1, V_2, \ldots$, 满足 $\operatorname{cl} V_n \cap A = \varnothing$。若选出的非空子覆盖有限, 重复成员使之成为序列即可。

令

$$P_n = U_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{cl} V_j, \qquad Q_n = V_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{cl} U_j, \qquad P = \bigcup_{n \geq 1} P_n, \quad Q = \bigcup_{n \geq 1} Q_n.$$

每个被删去的集合是有限个闭集之并, 所以 $P_n, Q_n$ 开, $P, Q$ 开。对 $a \in A$, 取 $n$ 使 $a \in U_n$。所有 $\operatorname{cl} V_j$ 都避开 $A$, 故 $a \in P_n$, 所以 $A \subseteq P$。对 $b \in B$, 取 $m$ 使 $b \in V_m$, 所有 $\operatorname{cl} U_j$ 都避开 $B$, 故 $b \in Q_m$, 所以 $B \subseteq Q$。

若 $z \in P \cap Q$, 选择 $n, m$ 使 $z \in P_n \cap Q_m$。若 $m \leq n$, $P_n$ 的定义排除了 $\operatorname{cl} V_m$, 但 $Q_m \subseteq V_m \subseteq \operatorname{cl} V_m$, 矛盾。若 $n \leq m$, $Q_m$ 排除了 $\operatorname{cl} U_n$, 但 $P_n \subseteq U_n \subseteq \operatorname{cl} U_n$, 也矛盾。因此 $P \cap Q = \varnothing$, 正规性得证。第二可数蕴含 Lindelöf, 给出最后结论。 □

**定理 5.54** (下限直线的开覆盖及其平方)**.** *下限直线 Lindelöf、正则且正规, 但下限平面 $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ 不是 Lindelöf 空间。因此 Lindelöf 性一般不对两个因子的积保持。*

证明. 给定下限直线的开覆盖 $\mathcal{U}$, 对每个实数 $x$ 取 $U_x \in \mathcal{U}$ 和 $b_x > x$, 使 $[x, b_x) \subseteq U_x$。令

$$O = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x, b_x), \qquad C = \mathbb{R} \setminus O.$$

这里 $O$ 对通常实直线拓扑开，是第二可数空间的子空间，故 Lindelöf。族 $\{(x, b_x) : x \in \mathbb{R}\}$ 是 $O$ 的通常开覆盖，所以存在至多可数个指标 $x_1, x_2, \dots$ 使 $O = \bigcup_n (x_n, b_{x_n})$。因此原覆盖中的 $U_{x_n}$ 已覆盖 $O$。

证明剩余集 $C$ 至多可数。对 $x < y$ 且 $x, y \in C$，由于 $y \notin O$，特别地 $y \notin (x, b_x)$，又 $y > x$，故 $y \geq b_x$。所以通常开区间 $(x, b_x)$、$(y, b_y)$ 不交。给每个 $x \in C$ 选择一个有理数 $q_x \in (x, b_x)$。这些区间两两不交，使 $x \mapsto q_x$ 单射，因此 $C$ 至多可数。将 $\{U_x : x \in C\}$ 加入已选的 $\{U_{x_n}\}$，得到原覆盖的可数子覆盖。这证明下限直线 Lindelöf。

第三章已证明 $[a, b)$ 在下限拓扑中既开又闭。给定开集 $G \ni x$，取 $[x, b) \subseteq G$，令 $V = [x, b)$，则 $x \in V = \operatorname{cl} V \subseteq G$。由缩小判据，下限直线正则；再由前一定理及 Lindelöf 性得到正规性。

若下限平面 Lindelöf，则其闭子空间反对角线 $L$ 也 Lindelöf。然而 $L$ 是不可数离散空间，它的单点开覆盖 $\{\{p\} : p \in L\}$ 没有可数子覆盖：可数个单点只能覆盖可数多个点。这产生矛盾，所以积空间不是 Lindelöf。 □

# 6 紧性及其度量刻画

## 6.1 开覆盖与紧子空间

**定义 6.1** (紧空间与紧子集)**.** 拓扑空间 $X$ 称为紧空间，如果它的每个开覆盖都有有限子覆盖。也就是说，若 $\mathcal{U}$ 是由 $X$ 的开集组成的族，且 $X=\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U$，则存在有限子族 $\mathcal{U}_0\subseteq\mathcal{U}$，使 $X=\bigcup_{U\in\mathcal{U}_0}U$。子集 $K\subseteq X$ 称为紧子集，如果它在子空间拓扑下是紧空间。本书的紧性定义不附加 Hausdorff 条件。

“每个开覆盖” 中的量词不能省略。对某一个覆盖选出有限子覆盖，并不能判定空间紧。允许选取空子族，因此空空间紧；非空空间的子覆盖至少含一个成员。

**命题 6.2** (用环境开集检验紧性)**.** 子集 $K\subseteq X$ 紧，当且仅当每个由环境开集组成、满足 $K\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ 的族都有有限子族覆盖 $K$。只用 $X$ 的某个拓扑基中的成员作覆盖，也能检验这个条件。

*证明.* 若 $K$ 紧，族 $K\cap U_\alpha$ 是 $K$ 的相对开覆盖。取其有限子覆盖，对应的有限个 $U_\alpha$ 就覆盖 $K$。反过来，对任意相对开覆盖 $V_\alpha$，逐项写成 $V_\alpha=K\cap U_\alpha$，其中 $U_\alpha$ 在 $X$ 中开。环境开集 $U_\alpha$ 覆盖 $K$，有限抽取后再与 $K$ 相交，就得到原相对覆盖的有限子覆盖。

设只对某个基 $\mathcal{B}$ 的覆盖知道有限抽取性质。给定任意环境开覆盖 $(U_\alpha)$，对每个 $x\in K$ 选取指标 $\alpha(x)$ 和基元素 $B_x$，使

$$x\in B_x\subseteq U_{\alpha(x)}.$$

基元素 $B_x$ 覆盖 $K$，故其中有限个 $B_{x_1},\dots,B_{x_m}$ 已覆盖 $K$。相应的 $U_{\alpha(x_i)}$ 也覆盖 $K$。空集情形直接取空子族。 □

图 6.1 将一个具体覆盖的成员错行画出。每个点必须至少落在一个区间内，区间之间的重叠使连接处没有遗漏。

**命题 6.3** (有限集、离散空间与有限并)**.** 任何拓扑空间中的有限子集都紧。离散空间紧，当且仅当它的点数有限。有限个紧子集的并仍紧。

*证明.* 若 $K=\{x_1,\dots,x_m\}$，从任意覆盖中为每个 $x_i$ 选一个包含它的成员，所选成员至多 $m$ 个，覆盖 $K$。若离散空间紧，其单点开覆盖必须有有限子覆盖，所以整个空间只有有限多个点；反向已由第一句证明。

设 $K=K_1\cup\cdots\cup K_m$，各 $K_i$ 紧。给定覆盖 $K$ 的环境开集族，它也覆盖每个 $K_i$。对第 $i$ 个子集抽取有限子覆盖，再把这有限多个有限子族合并，便覆盖 $K$。 □

**例 6.4** (两个没有有限子覆盖的覆盖)**.** 通常实直线的开覆盖 $\{(-n,n):n\geq1\}$ 没有有限子覆盖，因为有限子族包含于某个 $(-N,N)$，不能覆盖 $N+1$。在子空间 $(0,1)$ 中，$U_n=(1/n,1)$、$n\geq2$，都是相对开集。每个 $x\in(0,1)$ 在 $n>1/x$ 时属于 $U_n$，所以它们覆盖 $(0,1)$。任意有限子族的并等于其中指标最大的 $U_N$，遗漏 $1/(2N)$。因此 $(0,1)$ 也不紧。

**定理 6.5** (闭子空间与连续像)**.** 紧空间的闭子空间紧。紧空间在连续映射下的像紧；这里像集取子空间拓扑。

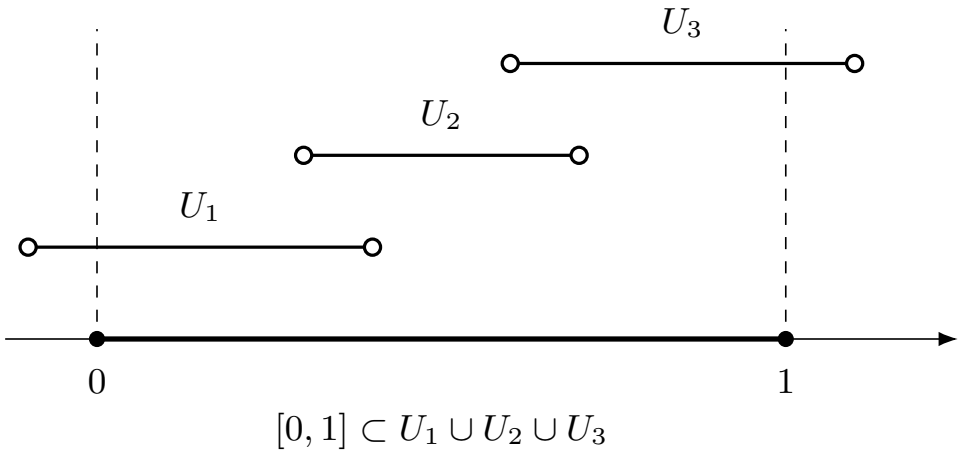



图 6.1: 三个通常开区间 $U_1 = (-1/10, 2/5)$、$U_2 = (3/10, 7/10)$、$U_3 = (3/5, 11/10)$ 覆盖 $[0,1]$。区间上移以便区分；空心端点表示不取端点。紧性要求对任意开覆盖都能选出有限子覆盖，单幅图只展示这一个覆盖。

证明. 设 $F$ 在紧空间 $X$ 中闭。若环境开集 $U_\alpha$ 覆盖 $F$，则把 $X \setminus F$ 加入后得到 $X$ 的开覆盖。取有限子覆盖，删去可能出现的 $X \setminus F$，剩余成员仍覆盖 $F$。由命题 6.2，$F$ 紧。

设 $f : X \to Y$ 连续，环境开集 $V_\alpha$ 覆盖 $f(X)$。逆像 $f^{-1}(V_\alpha)$ 开且覆盖 $X$，从中抽取有限子覆盖 $f^{-1}(V_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(V_{\alpha_m})$。对 $y \in f(X)$，取 $x \in X$ 使 $f(x) = y$；某个所选逆像包含 $x$，故对应的 $V_{\alpha_i}$ 包含 $y$。于是 $f(X)$ 紧。 □

**推论 6.6** (同胚不改变紧性)**.** 同胚空间同时紧或同时不紧。

证明. 同胚及其逆映射都连续，对两个方向分别使用连续像定理即可。 □

## 6.2 有限交性质与嵌套紧集

**定义 6.7** (有限交性质)**.** 集合族 $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ 称为具有有限交性质，如果每个有限指标集 $J \subseteq I$ 都满足 $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \varnothing$。所有交集都相对于一个预先指定的空间 $X$；空指标集的交约定为 $X$。

**定理 6.8** (紧性的闭集刻画)**.** 空间 $X$ 紧，当且仅当每个具有有限交性质的闭集族都有非空总交集。

证明. 设 $X$ 紧，$(F_\alpha)$ 为具有有限交性质的闭集族。若总交为空，De Morgan 公式给出

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha).$$

紧性给出有限个补集覆盖 $X$，再取补集，便得到对应的有限交为空，矛盾。反过来，给定开覆盖 $(U_\alpha)$，假设它没有有限子覆盖。则任意有限指标集 $J$ 都满足

$$\bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus U_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \varnothing.$$

闭集族因此具有有限交性质，但总交是覆盖之并的补集，即为空，与假设矛盾。对空空间，任何闭集族都不具有上述有限交性质，右侧条件真，和空空间紧一致。 □

**推论 6.9** (紧空间中的递减闭集)**.** *若 $X$ 紧，且 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ 为非空闭子集，则 $\bigcap_{n\ge 1} F_n \neq \varnothing$。更一般地，若一族环境闭集具有有限交性质，且其中至少一个成员紧，则总交非空。*

*证明.* 递减族的每个有限交等于其中指标最大的成员，故具有有限交性质，应用前一定理。在一般情形中，取紧成员 $F_{\alpha_0}$。相对闭集族 $F_{\alpha_0} \cap F_\alpha$ 在这个紧空间中仍具有有限交性质，因为任取有限个这样的成员，其交等于原族的一个有限交。由闭集刻画，它们的总交非空，而这正是原族的总交。 □

第二章的 Cantor 嵌套闭集定理用完备性和直径趋零保证交非空。这里用紧性，不需要直径条件；但没有直径条件时，公共点可以不唯一。例如在有限离散空间 $X = \{0, 1\}$ 中取所有 $F_n = X$，总交包含两个点。

**定义 6.10** (序列紧性)**.** 若空间中的每个序列都有一个在该空间中收敛的子列，则称空间序列紧。子列写为 $(x_{n_k})$，指标必须满足 $n_1 < n_2 < \cdots$。

**定理 6.11** (紧性与第一可数性给出收敛子列)**.** *紧且第一可数的空间序列紧。特别地，紧度量空间序列紧。*

*证明.* 对给定序列 $(x_n)$，令

$$F_m = \mathrm{cl}_X\{x_n : n \ge m\}.$$

这些闭集非空且递减，故存在 $x \in \bigcap_m F_m$。由第一可数性，取 $x$ 的递减开邻域基 $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$。先选 $n_1 \ge 1$ 使 $x_{n_1} \in C_1$。已选 $n_{k-1}$ 后，因为 $x \in F_{n_{k-1}+1}$，开邻域 $C_k$ 与尾部 $\{x_n : n \ge n_{k-1}+1\}$ 相交；因此可取 $n_k > n_{k-1}$，使 $x_{n_k} \in C_k$。给定 $x$ 的邻域 $N$，取 $C_j \subseteq N$。对 $k \ge j$，有 $x_{n_k} \in C_k \subseteq C_j \subseteq N$，所以子列收敛到 $x$。度量空间第一可数，故满足前述结论的假设。 □

## 6.3 紧集与 Hausdorff 分离

**引理 6.12** (点与紧集的分离)**.** *在 Hausdorff 空间 $X$ 中，若 $K$ 紧且 $p \notin K$，则存在不交开集 $U, V$，使 $p \in U$、$K \subseteq V$。*

*证明.* 若 $K$ 为空，取 $U = X, V = \varnothing$。以下设 $K \neq \varnothing$。对每个 $y \in K$，Hausdorff 性给出不交开集 $U_y \ni p$、$V_y \ni y$。族 $(V_y)_{y\in K}$ 覆盖 $K$，取有限子覆盖 $V_{y_1}, \ldots, V_{y_m}$。令

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{y_i}, \qquad V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{y_i}.$$

有限交保证 $U$ 开且含 $p$，并集 $V$ 开且含 $K$。若 $z \in U \cap V$，则某个 $i$ 满足 $z \in V_{y_i}$，同时 $z \in U \subseteq U_{y_i}$，与两者不交矛盾。 □

图 6.2 对应证明中的有限交与有限并。对点的一侧取交，使它同时避开所有已选的覆盖成员；对紧集的一侧取并，使整块集合被覆盖。

**定理 6.13** (Hausdorff 空间中的紧子集闭)**.** *Hausdorff 空间的每个紧子集都是闭集。紧 Hausdorff 空间为 $T_4$ 空间。*

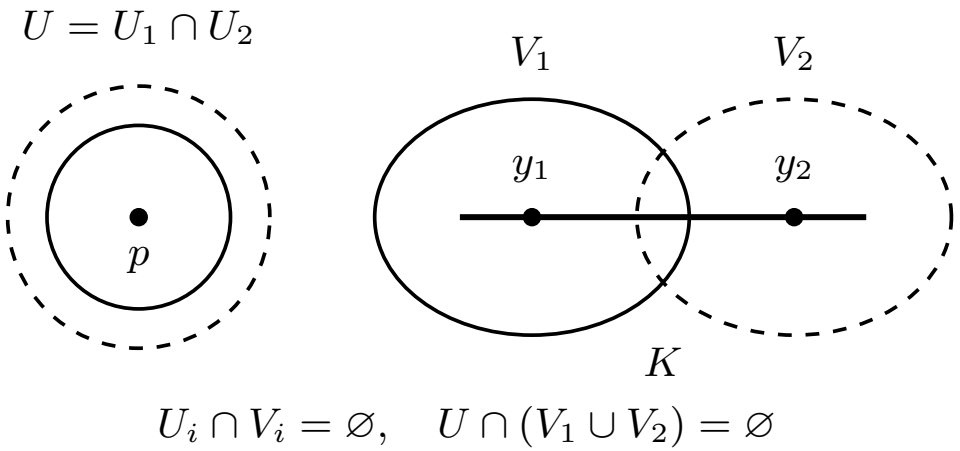



图 6.2: 点 $p$ 与紧集 $K$ 的分离。图中只画两个覆盖成员；$U_i$ 与对应的 $V_i$ 不交。对 $U_i$ 取有限交、对 $V_i$ 取有限并，便得到同时分离 $p$ 与整个 $K$ 的开集。曲线示意开集边界。

证明. 若 $p \notin K$，前一引理给出含 $p$ 且避开 $K$ 的开集。所以 $X \setminus K$ 中每点都有包含于补集的开邻域，补集开，$K$ 闭。

现设整个 $X$ 紧且 Hausdorff。给定不交闭集 $A, B$，它们都紧。若其中之一为空，用空集与全集分离。否则对每个 $a \in A$，前一引理给出不交开集 $P_a \ni a$、$Q_a \supseteq B$。用 $A$ 的紧性选取有限个 $P_{a_1}, \dots, P_{a_m}$ 覆盖 $A$，再令

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_{a_i}, \qquad Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_{a_i}.$$

它们是分别包含 $A, B$ 的开集。若 $z \in P \cap Q$，选择包含 $z$ 的某个 $P_{a_i}$，又有 $z \in Q_{a_i}$，矛盾。因此空间正规。Hausdorff 性蕴含 $T_1$，故它为 $T_4$。 □

**例 6.14** (紧子集的闭性需要分离条件)**.** Sierpiński 空间 $\{0,1\}$ 的开集为 $\varnothing, \{1\}, \{0,1\}$。有限集 $\{1\}$ 紧，但不闭，因为它的补集 $\{0\}$ 不开。因此仅凭环境空间紧，也不能保证其中每个紧子集闭。

**定理 6.15** (从紧空间到 Hausdorff 空间的映射)**.** *若 $X$ 紧、$Y$ Hausdorff，$f : X \to Y$ 连续，则 $f$ 为闭映射。若再有双射性，则 $f$ 为同胚；若只有单射性，则 $f$ 为嵌入。*

证明. 给定 $X$ 的闭子集 $F$，闭子空间定理给出 $F$ 紧，连续像定理给出 $f(F)$ 紧。因 $Y$ Hausdorff，$f(F)$ 在 $Y$ 中闭，所以 $f$ 是闭映射。若 $f$ 双射，记其逆为 $g : Y \to X$。对任意闭集 $F \subseteq X$，$g^{-1}(F) = f(F)$ 在 $Y$ 中闭，故 $g$ 连续。若 $f$ 单射，将值域缩为 $f(X)$。它是 Hausdorff 子空间，映射 $X \to f(X)$ 是连续双射，由已证结论为同胚，正是嵌入定义。 □

**命题 6.16** (紧集的交)**.** *在 Hausdorff 空间中，任意非空族紧子集的交仍紧。这里“非空族”要求至少有一个成员，交集本身可以为空。*

证明. 每个紧子集都闭，所以它们的交 $K$ 在环境中闭。选一个成员 $K_0$，则 $K \subseteq K_0$，且 $K$ 在 $K_0$ 中闭。闭子空间定理给出 $K$ 紧。若族为空，总交是环境空间，环境空间没有被假设为紧，所以不能删去非空族条件。 □

## 6.4 管状引理、有限积与闭投影

**引理 6.17** (管状引理)**.** 设 $K$ 是空间 $Y$ 的紧子集，$x_0 \in X$，$W \subseteq X \times Y$ 开且包含 $\{x_0\} \times K$。则存在 $x_0$ 的开邻域 $U$，使 $U \times K \subseteq W$。

证明. $K = \varnothing$ 时取 $U = X$。否则对每个 $y \in K$，积拓扑的基性质给出开集 $U_y \subseteq X$、$V_y \subseteq Y$，使

$$(x_0, y) \in U_y \times V_y \subseteq W.$$

用紧性从 $(V_y)$ 中抽取有限覆盖 $V_{y_1}, \dots, V_{y_m}$，令 $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{y_i}$。它开且含 $x_0$。若 $(x, y) \in U \times K$，选 $i$ 使 $y \in V_{y_i}$，则 $x \in U \subseteq U_{y_i}$，故 $(x, y) \in U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq W$。 □

图 6.3 中，两个竖向开区间覆盖整条紧纤维。横向邻域取交后，每个高度上总有一个原矩形可用，所以共同的横向宽度能延伸到整条纤维。

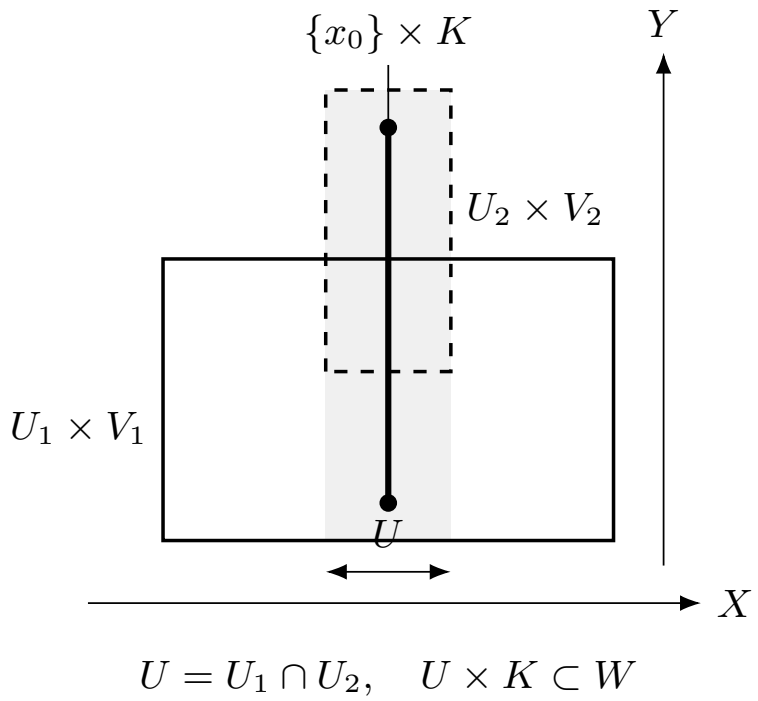



图 6.3: 管状引理的一个坐标模型。$K = [-1, 1]$，$U_1 = (-6/5, 6/5)$、$U_2 = (-1/3, 1/3)$，$V_1 = (-6/5, 3/10)$、$V_2 = (-3/10, 6/5)$。取 $U = U_1 \cap U_2$ 后，阴影条带中位于 $U \times K$ 的部分被两个开矩形覆盖。矩形线框表示不属于开矩形的边界。

**定理 6.18** (有限积紧性)**.** 有限个紧空间的积紧。

证明. 先证两个因子 $X, Y$ 的情形。若一个因子为空，积为空，已经紧。设二者非空，给定 $X \times Y$ 的开覆盖 $\mathcal{W}$。固定 $x \in X$，映射 $j_x : Y \to X \times Y$、$j_x(y) = (x, y)$ 的两个坐标连续，故连续；其像 $\{x\} \times Y$ 紧。因此有限个覆盖成员 $W_{x,1}, \dots, W_{x,m(x)}$ 已覆盖这条纤维。它们的并 $N_x$ 开且包含纤维。由管状引理，有开邻域 $U_x \ni x$ 使

$$U_x \times Y \subseteq N_x = \bigcup_{i=1}^{m(x)} W_{x,i}.$$

族 $(U_x)_{x\in X}$ 覆盖 $X$。用紧性抽取有限个 $U_{x_1},\dots,U_{x_s}$。相应的覆盖成员

$$\{W_{x_j,i} : 1\le j\le s,\ 1\le i\le m(x_j)\}$$

总数有限。给定 $(x,y)$，先选 $j$ 使 $x\in U_{x_j}$，再由 $U_{x_j}\times Y\subseteq N_{x_j}$ 得到某个所选 $W_{x_j,i}$ 包含该点。这些成员遂覆盖整个积。对三个以上有限个因子，反复使用两个因子的结论与第四章的分组同胚。若取零个因子，约定其积为单点空间，也紧。 □

**命题 6.19** (紧因子的投影是闭映射)**.** *若 $K$ 紧，则投影 $\pi_X : X\times K\to X$ 是闭映射；不要求 $X$ Hausdorff。*

*证明.* 给定闭集 $F\subseteq X\times K$，若 $x\notin\pi_X(F)$，则 $\{x\}\times K$ 包含于开集 $(X\times K)\setminus F$。管状引理给出开邻域 $U\ni x$，使 $U\times K$ 避开 $F$。于是 $U\cap\pi_X(F)=\varnothing$。投影的补集因而开，投影闭。若 $K=\varnothing$，唯一的闭集投影为空，结论仍成立。 □

**例 6.20** (没有紧因子时闭投影失效)**.** 在 $\mathbb{R}^2$ 中，集合 $F=\{(x,y) : xy=1\}$ 是连续函数 $(x,y)\mapsto xy$ 对闭集 $\{1\}$ 的逆像，因而闭。但它的第一坐标投影是 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$，不是闭集：$1/n$ 都在投影中，却收敛到不在投影中的 $0$。

**命题 6.21** (拓扑和的紧性)**.** *拓扑和 $\coprod_{\alpha\in I}X_\alpha$ 紧，当且仅当只有有限个非空分支，且每个分支紧。*

*证明.* 若拓扑和紧，各分支的像是开集，且全体分支的像构成开覆盖。有限子覆盖只能覆盖有限个非空分支，故非空分支总数有限。每个分支的像也闭，因为其补集是其他分支的开并；它作为紧空间的闭子空间紧，再用与 $X_\alpha$ 的同胚得到分支紧。反之，有限个非空紧分支的像都是紧子集，它们的有限并就是整个拓扑和，因而紧。 □

## 6.5 全有界性与有限网

**定义 6.22** (有限网与全有界性)**.** 设 $(X,d)$ 为度量空间。若有限集 $E\subseteq X$ 满足

$$X=\bigcup_{a\in E}B_d(a,\varepsilon),$$

则称 $E$ 为一个有限 $\varepsilon$-网。若对每个 $\varepsilon>0$ 都有这样的有限网，则称 $(X,d)$ 全有界。子集的全有界性指它在限制度量下全有界，因此球心原则上选在该子集中。

有限 $\varepsilon$-网允许依赖于 $\varepsilon$，网中点数也允许随半径缩小而增加。有界性只要求一个足够大的球覆盖空间，全有界性则要求每个尺度下都能用有限多个小球覆盖。

图 6.4 中，各球心之间的间隔小于两个半径之和，相邻球在区间上重叠。全有界性要求这样的有限覆盖对任意小的半径都存在。

**命题 6.23** (全有界性、有界性与遗传)**.** *全有界空间有界，且其每个子空间全有界。子集 $A\subseteq X$ 全有界，当且仅当对每个 $\varepsilon>0$，可以用有限个半径为 $\varepsilon$、球心在环境空间 $X$ 中的球覆盖 $A$。全有界空间可分。*

*证明.* 空空间的各项结论直接成立。以下设 $X\neq\varnothing$。取有限 1-网 $\{a_1,\dots,a_m\}$，并令

$$M=\max_{1\le i\le m}d(a_1,a_i).$$

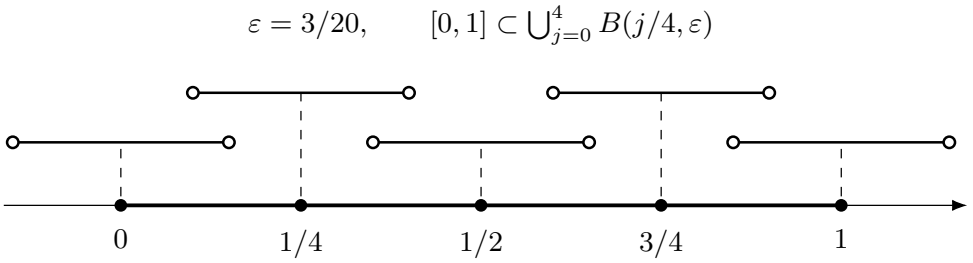



图 6.4: $[0,1]$ 的一个有限 3/20-网。五个中心的间距为 $1/4$，任一点到最近中心的距离至多 $1/8 < 3/20$。上方线段表示环境实直线中的开球，与 $[0,1]$ 相交才是子空间球。

任取 $x \in X$，有某个 $i$ 使 $d(x, a_i) < 1$，于是

$$d(x, a_1) \le d(x, a_i) + d(a_i, a_1) < 1 + M.$$

所以空间有界。

若 $A$ 本身全有界，其子空间球就是环境球与 $A$ 的交，故有环境球覆盖。反之，给定 $\varepsilon > 0$，先用有限个环境球 $B_X(c_i, \varepsilon/2)$ 覆盖 $A$。删去与 $A$ 不相交的球；对每个剩余球选 $a_i \in A \cap B_X(c_i, \varepsilon/2)$。若 $a \in A \cap B_X(c_i, \varepsilon/2)$，则

$$d(a, a_i) \le d(a, c_i) + d(c_i, a_i) < \varepsilon.$$

所以 $B_A(a_i, \varepsilon)$ 覆盖 $A$，得到全有界性。若 $X$ 全有界，环境中每个有限小球覆盖当然也覆盖其任意子集，再由刚证的球心转换，得到遗传性。

最后，对每个 $n \ge 1$ 取一个有限 $1/n$-网 $E_n$，令 $D = \bigcup_n E_n$。这是可数集。给定 $x \in X$、$r > 0$，选 $n$ 使 $1/n < r$；网性质给出 $a \in E_n$ 满足 $d(x, a) < 1/n < r$。因此每个非空球遇到 $D$，$D$ 稠密，空间可分。 □

**命题 6.24** (全有界性的闭包与有限并)**.** *全有界子集的闭包全有界；有限个全有界子集的并全有界。*

*证明.* 设 $A \ne \varnothing$ 全有界。给定 $\varepsilon > 0$，取有限个 $a_i \in A$ 使 $A \subseteq \bigcup_i B(a_i, \varepsilon/2)$。闭包保持有限并，且开球闭包包含于相同半径的闭球，故

$$\operatorname{cl}_X A \subseteq \bigcup_i \operatorname{cl}_X B(a_i, \varepsilon/2) \subseteq \bigcup_i \{x : d(x, a_i) \le \varepsilon/2\} \subseteq \bigcup_i B(a_i, \varepsilon).$$

球心属于 $A \subseteq \operatorname{cl} A$，所以这是闭包的有限网。空集的闭包为空，结论也成立。对有限并 $A_1 \cup \cdots \cup A_m$，在每个 $A_i$ 中取有限 $\varepsilon$-网，再把网合并即可。 □

**引理 6.25** (非全有界空间中的分离序列)**.** *若 $X$ 不全有界，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与序列 $(x_n)$，使*

$$d(x_n, x_m) \ge \varepsilon_0 \qquad (n \ne m).$$

*因而这列没有 Cauchy 子列，也没有收敛子列。*

*证明.* 否定全有界性的量词，存在 $\varepsilon_0 > 0$，没有有限个半径为 $\varepsilon_0$ 的球覆盖 $X$。该空间非空，任取 $x_1$。已取 $x_1, \dots, x_n$ 后，有限并 $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_0)$ 不能等于 $X$，从其补集取 $x_{n+1}$。它与每个已选点的距离至少为 $\varepsilon_0$。这样归纳得到所需序列。若有 Cauchy 子列，对误差 $\varepsilon_0$ 应有尾部任意两项距离严格小于 $\varepsilon_0$，与构造矛盾。收敛列是 Cauchy 列，故也不存在收敛子列。 □

**定理 6.26** (全有界性的子列刻画)**.** *度量空间全有界，当且仅当其中每个序列都有 Cauchy 子列。*

*证明.* 若 $X$ 全有界，给定序列 $(x_n)$，令 $I_0=\mathbb{N}$。对每个 $k\ge 1$，用有限个半径为 $2^{-k}$ 的球覆盖 $X$。假定无限指标集 $I_{k-1}$ 已选定。若每个球只包含有限多个满足 $n\in I_{k-1}$ 的序列项指标，有限并也只能给出有限多个这样的指标，不能覆盖无限集 $I_{k-1}$。因此有一个球 $B(c_k,2^{-k})$，使

$$I_k=\{n\in I_{k-1}: x_n\in B(c_k,2^{-k})\}$$

无限。如此得到 $I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$。注意这里选择的是指标，序列项即使反复取同一个值也不妨碍构造。

从 $I_1$ 选 $n_1$。已选 $n_{k-1}$ 后，因为无限的自然数子集无上界，可从 $I_k$ 选 $n_k>n_{k-1}$。对 $i,j\ge k$，$n_i,n_j\in I_k$，所以

$$d(x_{n_i},x_{n_j})\le d(x_{n_i},c_k)+d(c_k,x_{n_j})<2^{1-k}.$$

给定 $\varepsilon>0$，取 $k$ 使 $2^{1-k}<\varepsilon$，便验证子列为 Cauchy 列。反向取逆否命题：若不全有界，前一引理给出的序列没有 Cauchy 子列，故不满足所述性质。 □

图 6.5 展示一条可直接计算的子列。一般构造中的球未必递减，递减的是指标集 $I_k$；后选的每个指标都属于先前的 $I_k$，这才保证尾部项同时落入同一个小球。

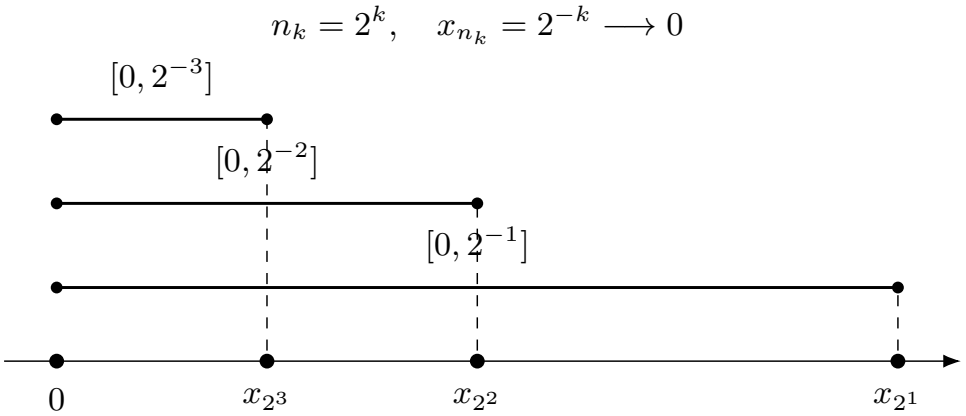



图 6.5: 以 $x_n=1/n$ 示意嵌套选择。指标集 $I_k=\{n: n\ge 2^k\}$ 逐次缩小，选 $n_k=2^k$ 得到严格递增指标。任意 $j\ge k$ 都有 $x_{n_j}\in[0,2^{-k}]$；一般证明用小球的直径控制替代这些区间。

**例 6.27** (有界但不全有界的完备空间)**.** 令 $X$ 为无限集合，取离散度量 $d(x,y)=1$ ($x\ne y$ 时)。空间直径为 1，所以有界。Cauchy 条件用于误差 $1/2$ 时要求尾部任意两项相同，故每条 Cauchy 列最终常值，空间完备。但半径 $1/2$ 的球全是单点集，有限个这样的球不能覆盖无限集，所以不全有界，也不紧。由此可见，度量空间中“闭且有界”不能直接代替紧性。

## 6.6 度量空间中紧性的三个等价条件

**引理 6.28** (序列紧性给出 Lebesgue 数)**.** *设 $(X,d)$ 序列紧，$\mathcal{U}$ 是它的开覆盖。则存在 $\delta>0$，使对每个 $x\in X$，都有某个 $U\in\mathcal{U}$ 满足 $B(x,\delta)\subseteq U$。这样的 $\delta$ 称为该覆盖的一个 Lebesgue 数。*

证明. 若 $X=\varnothing$，任取 $\delta>0$。设 $X\neq\varnothing$，反设结论不成立。对每个 $n\geq 1$，选择 $x_n\in X$，使 $B(x_n,1/n)$ 不包含于覆盖的任何一个成员。取收敛子列 $x_{n_k}\to x$。从覆盖中选 $U\ni x$，再由开性选 $r>0$ 使 $B(x,r)\subseteq U$。当 $k$ 足够大时，同时有

$$d(x_{n_k},x)<r/2,\qquad 1/n_k<r/2.$$

于是任意 $z\in B(x_{n_k},1/n_k)$ 满足

$$d(z,x)\leq d(z,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<1/n_k+r/2<r,$$

故 $B(x_{n_k},1/n_k)\subseteq U$，与 $x_{n_k}$ 的选择矛盾。 □

**定理 6.29** (度量紧性的等价刻画). 对度量空间 $(X,d)$，下列三个条件等价：

1. $X$ 紧；
2. $X$ 序列紧；
3. $X$ 完备且全有界。

证明. (1) ⇒ (2) 已由定理 6.11 证明。它用尾部闭包和第一可数邻域基抽取子列，没有预设本定理的其他方向。

证明 (2) ⇒ (3)。若不全有界，引理 6.25 给出没有收敛子列的序列，违反序列紧性。故 $X$ 全有界。任取 Cauchy 列 $(x_n)$，由序列紧性取一条子列 $x_{n_k}\to x\in X$。给定 $\varepsilon>0$，由 Cauchy 性取 $N$，使 $m,n\geq N$ 时 $d(x_m,x_n)<\varepsilon/2$。再选一个足够大的 $k$，同时满足 $n_k\geq N$ 与 $d(x_{n_k},x)<\varepsilon/2$。对每个 $n\geq N$，有

$$d(x_n,x)\leq d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\varepsilon.$$

因此全列收敛到 $x$，空间完备。

证明 (3) ⇒ (2)。全有界性由定理 6.26 保证每条序列有 Cauchy 子列；完备性使该子列收敛于 $X$ 中某点，所以空间序列紧。

最后证明 (2) ⇒ (1)。设 $\mathcal{U}$ 是开覆盖。由已经证明的 (2) ⇒ (3)，空间全有界；由引理 6.28，覆盖有 Lebesgue 数 $\delta>0$。取有限 $\delta$-网 $\{a_1,\dots,a_m\}$。对每个中心选 $U_i\in\mathcal{U}$，使 $B(a_i,\delta)\subseteq U_i$。则

$$X=\bigcup_{i=1}^{m}B(a_i,\delta)\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}U_i.$$

所选的有限个原覆盖成员已经覆盖空间，紧性得证。空空间三个条件均成立，有限网可取空集。 □

**推论 6.30** (紧度量空间的可数性). 紧度量空间可分且第二可数，每个开覆盖都有 *Lebesgue* 数。

证明. 紧性给出全有界性，命题 6.23 给出可分性。再由第五章可分度量空间的可数基定理得到第二可数性。紧性也给出序列紧性，应用 Lebesgue 数引理即可。 □

**命题 6.31** (另一种有限覆盖证明). 完备且全有界的度量空间紧。下面给出直接从开覆盖出发的证明。

证明. 反设有开覆盖 $\mathcal{U}$ 没有有限子覆盖。记 $A_0 = X$，将“不能被 $\mathcal{U}$ 中有限个成员覆盖”记为性质 $(*)$。假定 $A_{k-1}$ 具有性质 $(*)$。用有限个半径为 $2^{-k}$ 的球覆盖 $X$。若 $A_{k-1}$ 与每个球的交都能被有限个原覆盖成员覆盖，合并这有限多个有限子族就覆盖 $A_{k-1}$，矛盾。因此可选一个球 $B(c_k, 2^{-k})$，使

$$A_k = A_{k-1} \cap B(c_k, 2^{-k})$$

仍具有性质 $(*)$。这些集合非空、递减，且直径不超过 $2^{1-k}$。选 $x_k \in A_k$。对 $i, j \geq k$，二者都在 $A_k$，故 $d(x_i, x_j) \leq 2^{1-k}$。这使 $(x_k)$ 为 Cauchy 列，由完备性有 $x_k \to x \in X$。取覆盖成员 $U \ni x$，再取 $r > 0$ 使 $B(x, r) \subseteq U$。选足够大的 $k$，使 $d(x_k, x) < r/2$ 且 $2^{1-k} < r/2$。对任意 $a \in A_k$，因为 $x_k \in A_k$，

$$d(a, x) \leq d(a, x_k) + d(x_k, x) \leq 2^{1-k} + d(x_k, x) < r.$$

所以 $A_k \subseteq U$，单个覆盖成员已覆盖 $A_k$，违反性质 $(*)$。 □

**例 6.32** (全有界性不能代替完备性)**.** 通常度量下的 $(0, 1)$ 全有界。事实上，对给定 $\varepsilon > 0$，选整数 $m$ 使 $1/m < \varepsilon$，用有限个中点 $(2j-1)/(2m)$、$1 \leq j \leq m$，就能覆盖全部 $(0, 1)$：每点到对应小区间中点的距离至多 $1/(2m) < \varepsilon$。但 Cauchy 列 $x_n = 1/(n+1)$ 没有 $(0, 1)$ 中的极限。若在子空间收敛到 $x \in (0, 1)$，在环境实直线中也收敛到 $x$，而它在实直线中收敛到 $0$，由极限唯一性得 $x = 0$，矛盾。因此空间不完备，也不紧。

**命题 6.33** (全有界性的度量依赖)**.** *全有界性不是拓扑性质。它在双 Lipschitz 等价的度量之间保持。*

证明. 在实直线上，通常度量不全有界，因为它无界。令 $\phi(x) = x/(1+|x|)$，并定义 $\rho(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$。例 4.23 已证明 $\phi$ 是通常实直线到 $(-1, 1)$ 的同胚，$\rho$ 因而与通常度量产生同一拓扑。$(-1, 1)$ 用有限等分中点构造每个尺度的有限网，故全有界；$\phi$ 作为从 $(\mathbb{R}, \rho)$ 到 $(-1, 1)$ 的等距双射，把这些有限网拉回，得到 $(\mathbb{R}, \rho)$ 全有界。

若 $c\, d(x, y) \leq \rho(x, y) \leq C\, d(x, y)$，其中 $c, C > 0$，$d$ 的有限 $\varepsilon/C$-网也是 $\rho$ 的有限 $\varepsilon$-网，因为 $d(x, a) < \varepsilon/C$ 蕴含 $\rho(x, a) < \varepsilon$。反向用 $d \leq \rho/c$ 得到同样结论。 □

## 6.7 欧氏空间中的 Heine–Borel 定理

**引理 6.34** (欧氏空间中的有界集全有界)**.** *欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集全有界，当且仅当它有界。*

证明. 全有界推出有界已在命题 6.23 证明。反之，设 $A$ 有界。空集直接处理；否则取 $M > 0$，使 $A \subseteq [-M, M]^n$。给定 $\varepsilon > 0$，选正整数 $m$ 使 $2M\sqrt{n}/m < \varepsilon$。令

$$G = \left\{ \left( -M + \frac{2Mj_1}{m}, \dots, -M + \frac{2Mj_n}{m} \right) : j_i \in \{0, 1, \dots, m\} \right\}.$$

这是包含 $(m+1)^n$ 个点的有限集。对每个 $x \in [-M, M]^n$，逐坐标选择 $a_i = -M + 2Mj_i/m$，使 $0 \leq x_i - a_i \leq 2M/m$。当 $x_i = M$ 时允许取 $j_i = m$。于是相应的 $a = (a_1, \dots, a_n) \in G$ 满足

$$\|x - a\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2M\sqrt{n}}{m} < \varepsilon.$$

所以以 $G$ 为球心的环境球覆盖 $A$。对每个尺度都如此，再用命题 6.23 将球心选回 $A$，得到 $A$ 全有界。 □

**定理 6.35** (Heine–Borel 定理)**.** *对通常欧氏空间中的子集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，*

$$K \text{ 紧} \quad \Longleftrightarrow \quad K \text{ 闭且有界.}$$

*证明.* 若 $K$ 紧，由欧氏空间的 Hausdorff 性和定理 6.13，$K$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中闭。度量紧性等价定理给出 $K$ 全有界，因而有界。反过来，若 $K$ 闭且有界，$\mathbb{R}^n$ 的完备性由定理 2.38 已证明，闭子空间定理 2.40 给出 $K$ 完备。前一引理给出 $K$ 全有界，所以度量紧性等价定理给出 $K$ 紧。 □

**例 6.36** (闭盒体、球和球面)**.** 闭盒体 $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$、闭球 $\{x : \|x-a\|_2 \le r\}$ 与球面 $\{x : \|x-a\|_2 = r\}$ 都紧，其中 $r \ge 0$。闭盒体的每个坐标限制是连续坐标投影对闭区间的逆像，有限交仍闭，并且坐标范围有界，故盒体有界。反三角不等式给出

$$\big|\|x-a\|_2 - \|y-a\|_2\big| \le \|x-y\|_2 ,$$

所以范数函数连续。闭球和球面分别是闭集 $(-\infty, r]$、$\{r\}$ 的逆像，且都包含于半径为 $r+1$ 的有界球中。Heine–Borel 定理遂给出上述紧性。特别地，$[0,1]$ 紧，但它的子空间 $(0,1)$ 不紧，说明一般子空间未必继承紧性。

**推论 6.37** (有限维的有界子列定理)**.** *$\mathbb{R}^n$ 中每个有界序列都有收敛子列。*

*证明.* 有界序列包含于某个闭盒体 $[-M, M]^n$。这个盒体紧且是度量空间，故序列紧。所抽取的子列收敛于盒体中的点，也就在环境空间中收敛。 □

**定义 6.38** (相对紧)**.** 子集 $A \subseteq X$ 称为相对紧，如果其环境闭包 $\mathrm{cl}_X A$ 紧。这里相对紧总是相对于指定的环境空间而言。

**命题 6.39** (完备环境中的相对紧性)**.** *若 $X$ 是完备度量空间，则 $A \subseteq X$ 相对紧，当且仅当 $A$ 全有界。特别地，欧氏空间中的相对紧集恰为有界集。*

*证明.* 若闭包紧，闭包全有界，它的子空间 $A$ 也全有界。反之，若 $A$ 全有界，命题 6.24 给出闭包全有界；闭包是完备空间的闭子空间，故完备。应用度量紧性等价定理，闭包紧。在欧氏空间中，有界与全有界由引理 6.34 等价，得到最后结论。 □

**例 6.40** (相对紧性依赖环境)**.** 集合 $A = (0,1)$ 在环境 $\mathbb{R}$ 中的闭包是紧集 $[0,1]$，因而相对紧。若环境改为 $X = (0,1)$，则 $A = X$ 在这个环境中的闭包仍为自身，它不紧，所以不再相对紧。限制度量完全相同，改变的是取闭包时允许加入的点。

## 6.8 连续函数的极值与一致控制

**定理 6.41** (紧空间上的极值定理)**.** *若 $X$ 非空且紧，$f : X \to \mathbb{R}$ 连续，则 $f$ 有界，且存在 $x_-, x_+ \in X$，使对所有 $x \in X$，*

$$f(x_-) \le f(x) \le f(x_+).$$

*证明.* 连续像 $K = f(X)$ 非空且紧。由实直线中的 Heine–Borel 定理，$K$ 闭且有界。实数完备性保证 $s = \sup K$、$t = \inf K$ 是有限实数。给定 $\varepsilon > 0$，上确界的定义给出 $y \in K$，使 $s - \varepsilon < y \le s$。所以 $s$ 的每个球都与 $K$ 相交，$s \in \mathrm{cl}\, K = K$。同样，下确界定义给出 $t \le z < t + \varepsilon$ 的 $z \in K$，从而 $t \in K$。由 $K = f(X)$，选 $x_+, x_-$ 使 $f(x_+) = s$、$f(x_-) = t$，即得结论。 □

**命题 6.42** (紧集与闭集的正距离)**.** 在度量空间中，若 $K$ 为非空紧集、$F$ 为非空闭集，且 $K\cap F=\varnothing$，则

$$\operatorname{dist}(K,F)=\inf\{d(x,y):x\in K,y\in F\}>0.$$

若 $K,L$ 都是非空紧集，则二者的距离由某一对点取得。

证明. 函数 $x\mapsto d(x,F)$ 连续，故在 $K$ 上取到最小值 $m=d(x_0,F)$。因 $F$ 闭且 $x_0\notin F$，距离函数的零点判据给出 $m>0$。每个点对的距离都至少为 $d(x,F)\geq m$，所以 $m$ 是所有点对距离的下界。反过来，对任意 $\eta>0$，下确界定义给出 $y\in F$ 使 $d(x_0,y)<d(x_0,F)+\eta=m+\eta$。故所有点对距离的下确界不大于 $m$，于是恰为 $m>0$。

若两个集合都紧，有限积 $K\times L$ 紧。函数 $(x,y)\mapsto d(x,y)$ 连续，因为

$$|d(x,y)-d(x',y')|\leq d(x,x')+d(y,y').$$

给定误差 $\varepsilon>0$，分别限制两个坐标距离小于 $\varepsilon/2$，就得到函数值之差小于 $\varepsilon$，这也直接验证了积拓扑下的连续性。极值定理给出一对 $(x_0,y_0)$ 实现最小距离。 □

**定理 6.43** (Heine–Cantor 一致连续定理)**.** 设 $(X,d_X)$ 为紧度量空间，$(Y,d_Y)$ 为任意度量空间。每个连续映射 $f:X\to Y$ 都一致连续，即

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in X,\quad d_X(x,y)<\delta\implies d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

证明. 给定 $\varepsilon>0$。对每个 $a\in X$，由连续性选取 $r_a>0$，使

$$d_X(a,z)<2r_a\quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(a),f(z))<\varepsilon/2.$$

这是先取得连续性给出的一个半径，再将它减半。开球族 $\{B_X(a,r_a):a\in X\}$ 覆盖 $X$，有 Lebesgue 数 $\delta>0$。若 $d_X(x,y)<\delta$，则 $x,y\in B_X(x,\delta)$，这个球包含于某个 $B_X(a,r_a)$。因此

$$d_Y(f(x),f(y))\leq d_Y(f(x),f(a))+d_Y(f(a),f(y))<\varepsilon.$$

所选 $\delta$ 与点 $x,y$ 无关，得到一致连续性。空空间的量词条件自动成立。 □

**命题 6.44** (一致连续像的全有界性)**.** 全有界度量空间在一致连续映射下的像全有界。

证明. 设 $f:X\to Y$ 一致连续，给定 $\varepsilon>0$。取 $\delta>0$，使 $d_X(x,x')<\delta$ 时有 $d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$。取 $X$ 的有限 $\delta$-网 $\{a_1,\dots,a_m\}$。每个 $y=f(x)\in f(X)$ 对应某个中心 $a_i$，满足 $d_X(x,a_i)<\delta$，所以 $d_Y(y,f(a_i))<\varepsilon$。因此有限集 $\{f(a_1),\dots,f(a_m)\}$ 是像空间的有限 $\varepsilon$-网。 □

**例 6.45** (非紧空间上的连续函数)**.** 在 $(0,1)$ 上，$f(x)=1/x$ 连续但无界。它也不一致连续：取 $x_n=1/(n+2)$、$y_n=1/(n+3)$，则

$$|x_n-y_n|=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\longrightarrow 0,\qquad |f(x_n)-f(y_n)|=1.$$

若一致连续，对误差 $1/2$ 选定的统一 $\delta$，最终会有 $|x_n-y_n|<\delta$ 而函数值之差仍为 $1$，矛盾。同一空间上的函数 $g(x)=x$ 有界且一致连续，却没有最大值或最小值：对每个 $x\in(0,1)$，$x/2<x<(1+x)/2$，三点都属于该区间。

**例 6.46** (对紧性作出的度量判定具有拓扑意义)**.** 在实直线上取两个度量

$$d(x,y)=|x-y|,\qquad \rho(x,y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|.$$

它们产生相同拓扑。通常度量完备而不全有界，$\rho$ 全有界而不完备，但两者都不紧，因为紧性取决于同一个开集族。这里 $\rho$ 不完备也可直接验证：$x_n=n$ 满足 $\phi(n)=n/(n+1)\to 1$，所以它是 $\rho$-Cauchy 列；若它 $\rho$-收敛到某个实数 $x$，就有 $\phi(x)=1$，与 $\phi(\mathbb{R})=(-1,1)$ 矛盾。度量紧性定理要求完备性与全有界性同时成立，二者缺一不可。

## 6.9 有限维范数空间的紧性

**定理 6.47** (有限维空间中范数等价)**.** *在 $\mathbb{R}^n$ 上任取一个范数 $N$，存在常数 $c,C>0$，使*

$$c\,\|x\|_2\le N(x)\le C\,\|x\|_2\qquad (x\in\mathbb{R}^n).$$

*因此任意两个范数产生相同拓扑，且任一范数下的闭有界集都紧。*

*证明.* 记标准基为 $e_1,\dots,e_n$。由三角不等式、齐次性和第一章的 Cauchy–Schwarz 不等式，

$$N(x)=N\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|N(e_i)\le\left(\sum_{i=1}^{n}N(e_i)^2\right)^{1/2}\|x\|_2\,.$$

取 $C=(\sum_i N(e_i)^2)^{1/2}>0$，得到上界。范数的反三角不等式由两次三角不等式给出：$N(x)\le N(x-y)+N(y)$ 与 $N(y)\le N(x-y)+N(x)$，所以

$$|N(x)-N(y)|\le N(x-y)\le C\,\|x-y\|_2\,.$$

因此 $N$ 对欧氏拓扑连续，这一步没有预设两种范数已经等价。欧氏单位球面 $S^{n-1}=\{u:\|u\|_2=1\}$ 非空且紧，极值定理给出 $u_0\in S^{n-1}$，使 $c=N(u_0)=\min_{u\in S^{n-1}}N(u)$。因为 $u_0\neq 0$，范数的正定性给出 $c>0$。对 $x\neq 0$，向量 $u=x/\|x\|_2$ 属于球面，故

$$N(x)=\|x\|_2\,N(u)\ge c\,\|x\|_2\,.$$

$x=0$ 时两边都为零，下界也成立。

对任意 $r>0$，上述不等式给出

$$B_2(x,r/C)\subseteq B_N(x,r)\subseteq B_2(x,r/c).$$

每种度量的球都在每点包含另一种度量的足够小的球，故拓扑相同。两个任意范数分别与欧氏范数等价，因而相互等价。若 $K$ 对 $N$ 闭且有界，拓扑相同使它欧氏闭；下界使它欧氏有界。由 Heine–Borel 定理它在欧氏拓扑下紧，拓扑相同又给出在 $N$ 下紧。 □

# 7 连通、道路连通与局部性质

## 7.1 分离与连通性的判据

**定义 7.1** (空间的分离与连通性)**.** 拓扑空间 $X$ 的一个分离，是一对非空开集 $U, V$，满足

$$X = U \cup V, \qquad U \cap V = \varnothing.$$

若不存在这样的分离，则称 $X$ 连通。子集 $A \subseteq X$ 连通，指 $A$ 在子空间拓扑下连通。空空间和单点空间都连通。

对子集检验连通性时，分离的两侧只要求相对开，不要求在环境空间中开。若 $A = U \cup V$ 是一个分离，则 $U = A \setminus V$、$V = A \setminus U$，所以两侧也在 $A$ 中闭。

**定理 7.2** (开闭集与二点映射判据)**.** 对拓扑空间 $X$，下列条件等价：

1. $X$ 连通；
2. $X$ 中同时开且闭的子集只有 $\varnothing, X$；
3. 每个从 $X$ 到离散二点空间 $\{0,1\}$ 的连续映射都为常值。

空定义域上的映射在第三项中也视为常值映射。

证明. 若存在非空真子集 $U$ 同时开闭，$U$ 与 $X \setminus U$ 就给出分离。反之，一个分离的任意一侧都是非空、真且开闭的子集。因此前两项等价。

若第二项成立，$f : X \to \{0,1\}$ 连续，则 $f^{-1}(\{0\})$ 与 $f^{-1}(\{1\})$ 都开闭。只要 $X \neq \varnothing$，其中一个必须为空，另一个等于 $X$，所以 $f$ 常值。若第二项不成立，取一个非空真开闭集 $U$，定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U, \\ 1, & x \in X \setminus U. \end{cases}$$

离散二点空间的四个开集，其逆像依次为 $\varnothing, U, X \setminus U, X$，全都开。因此 $f$ 连续且非常值，第三项失败。 □

**引理 7.3** (连通子集不能跨越一个分离)**.** 若 $X = U \cup V$ 为分离，$A \subseteq X$ 连通，则 $A \subseteq U$ 或 $A \subseteq V$。

证明. 相对开集 $A \cap U, A \cap V$ 不交且并为 $A$。若它们都非空，就构成 $A$ 的分离，与连通性矛盾。所以至少一侧为空，得到结论。$A = \varnothing$ 时两个包含式都成立。 □

**定理 7.4** (连续像保持连通性)**.** 连通空间的连续像连通。因此同胚保持连通性。

证明. 设 $f : X \to Y$ 连续，若 $f(X) = A \cup B$ 是相对开集构成的分离，则 $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ 在 $X$ 中开，非空且不交，并为 $X$。这构成 $X$ 的分离，矛盾。这里相对开集的逆像开，是因为 $A = f(X) \cap O$ 时 $f^{-1}(A) = f^{-1}(O)$。对同胚及其逆分别应用连续像结论，就得到最后一句。 □

**例 7.5** (连通性不依赖点能否被分离)**.** 在至少有两个点的不可分拓扑空间中，只有空集和全集开，所以空间连通，却不是 $T_0$。离散空间中每个单点都开闭；因此具有至少两个点时不连通。在二点 Sierpiński 空间中，唯一的非空真开集不是闭集，所以它也连通。连通性与 Hausdorff 性描述的是不同条件。

## 7.2 实直线中的连通集与中间值

**定义 7.6** (区间)**.** 子集 $I \subseteq \mathbb{R}$ 称为区间，如果对任意 $a, b \in I$ 及 $a < t < b$，都有 $t \in I$。这里允许空集、单点集、有界区间、射线及整条实直线。

**定理 7.7** (实直线中连通集的刻画)**.** *通常实直线的子集连通，当且仅当它是区间。*

*证明.* 先设 $A$ 连通。如果存在 $a, b \in A$、$a < c < b$，而 $c \notin A$，则

$$A \cap (-\infty, c), \qquad A \cap (c, \infty)$$

是非空、不交且并为 $A$ 的相对开集，给出分离，矛盾。因此 $A$ 是区间。

反过来，设区间 $I$ 有分离 $I = U \cup V$。从两侧取点，交换 $U, V$ 的名称后可设 $u \in U$、$v \in V$ 且 $u < v$。区间性质保证 $[u, v] \subseteq I$。令

$$E = U \cap [u, v], \qquad c = \sup E.$$

集合 $E$ 非空且以上界 $v$ 有界，所以 $c$ 存在，$u \le c \le v$，从而 $c \in I$。对任意 $\varepsilon > 0$，由上确界定义可取 $e \in E$，满足 $c - \varepsilon < e \le c$。因此每个含 $c$ 的相对开邻域都遇到 $E$。若 $c \in V$，因 $V$ 相对开，它将包含一个这样的邻域，与 $E \subseteq U$ 且 $U \cap V = \varnothing$ 矛盾。所以 $c \in U$。特别地 $c \neq v$，因为 $v \in V$。再由 $U$ 相对开，取 $r > 0$，使 $I \cap (c - r, c + r) \subseteq U$。选择 $h$ 满足 $0 < h < \min\{r, v - c\}$，则 $c + h \in [u, v] \cap U = E$，违反 $c$ 为上界。因此区间不可能有分离。 □

**推论 7.8** (中间值定理)**.** *若 $X$ 连通，$f : X \to \mathbb{R}$ 连续，则 $f(X)$ 是区间。因此若 $f(a) < c < f(b)$，就存在 $x \in X$ 使 $f(x) = c$。*

*证明.* 连续像连通，再用实直线连通集的区间刻画。第二句是区间定义。 □

**例 7.9** (有理数集的连通子集)**.** $\mathbb{Q}$ 的每个连通子集至多包含一个点。若它含不同有理数 $a < b$，作为实直线子空间的连通子集就必须包含 $[a, b]$，但这个区间含无理数。例如 $a + (b - a)/\sqrt{2}$ 位于 $(a, b)$ 且不是有理数：若它有理，由 $a, b$ 有理且 $b - a \neq 0$，可解出 $1/\sqrt{2}$ 有理，矛盾。所以连通子集不能含不同点。但 $\mathbb{Q}$ 不是离散空间：每个 $q \in \mathbb{Q}$ 的相对开邻域都含某个 $(q - r, q + r) \cap \mathbb{Q}$，其中还包含不同于 $q$ 的有理数。

## 7.3 连通集的并、闭包与有限积

**定理 7.10** (有公共连通部分的并)**.** *设 $A$ 连通，$(B_\alpha)$ 是一族连通子集，且每个 $B_\alpha$ 都与 $A$ 相交。则 $A \cup \bigcup_\alpha B_\alpha$ 连通。特别地，一族连通集若有公共点，它们的并连通。*

*证明.* 记并集为 $S$，反设它有分离 $S = U \cup V$。若族非空，交集条件使 $A \neq \varnothing$；若族为空，结论就是 $A$ 的连通性。以下只需处理族非空的情形。由引理 7.3，交换两侧名称后可设 $A \subseteq U$。每个 $B_\alpha$ 连通且遇到 $A \subseteq U$，不能包含于 $V$，所以只能包含于 $U$。于是整个 $S \subseteq U$，迫使 $V = \varnothing$，矛盾。若所有连通集都含点 $p$，取 $A = \{p\}$ 应用第一句即可。 □

图 7.1 对应证明中的共同点：一个分离若把 $p$ 放在某侧，就必须把每个包含 $p$ 的连通集全部放在该侧。

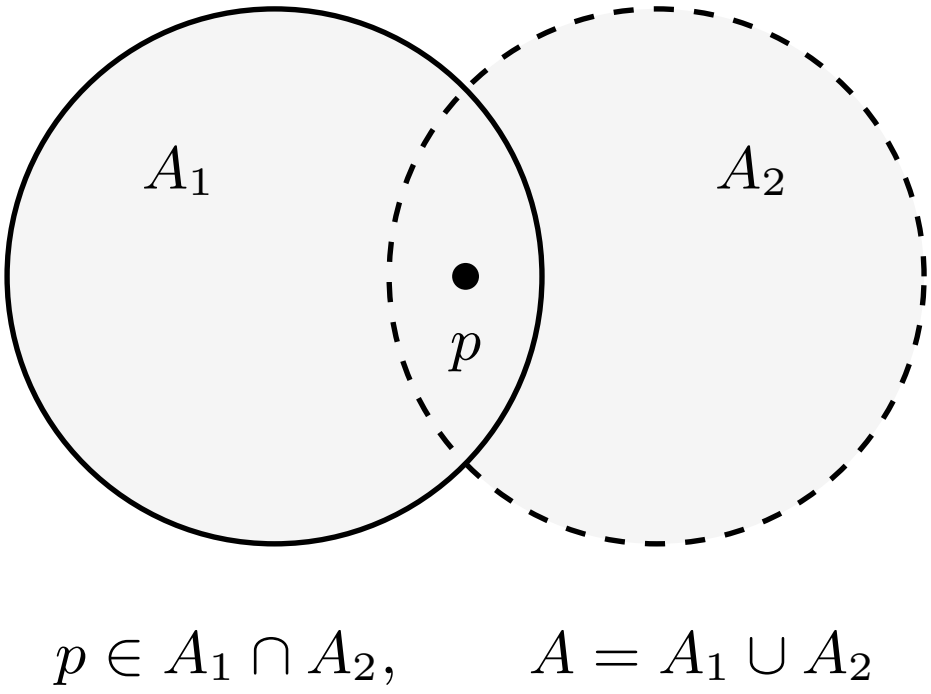



图 7.1: 两个有公共点的圆盘。点 $p$ 属于两者，使任何对并集的分离都必须将两个圆盘放在同一侧。圆盘边界取实线或虚线只用于区分集合，不表示删去边界。

**推论 7.11** (递增连通集的并)**.** *若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ 且每个 $A_n$ 连通，则 $\bigcup_n A_n$ 连通。*

*证明.* 若并集为空，结论成立。否则取一个非空 $A_m$。所有 $n \geq m$ 的集合都与 $A_m$ 相交，且前面的集合包含于 $A_m$，故并集就是 $A_m \cup \bigcup_{n \geq m} A_n$，应用前一定理。 □

**定理 7.12** (连通集与闭包之间的集合)**.** *若 $A \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}_X A$，且 $A$ 连通，则 $B$ 连通。特别地，连通集的闭包连通。*

*证明.* 若 $A$ 为空，则 $B$ 也空。否则假设 $B = U \cup V$ 是分离。由 $A$ 连通，交换名称后可设 $A \subseteq U$。取 $v \in V$，因 $V$ 在 $B$ 中相对开，可写 $V = B \cap O$，其中 $O$ 在 $X$ 中开。又 $v \in B \subseteq \mathrm{cl}_X A$，所以环境开邻域 $O$ 与 $A$ 相交。但 $A \subseteq B$，故 $O \cap A \subseteq O \cap B = V$，同时它也包含于 $U$，矛盾。 □

**定理 7.13** (有限积的连通性)**.** *有限个连通空间的积连通。若有限积非空，则积连通也蕴含每个因子连通。*

*证明.* 先看两个非空因子 $X, Y$，固定 $x_0 \in X, y_0 \in Y$。对每个 $x \in X$，子空间 $\{x\} \times Y$ 与 $Y$ 同胚，因而连通；$X \times \{y_0\}$ 与 $X$ 同胚，也连通。前一类集合都与后者相交于 $(x, y_0)$，故它们的并连通。这个并恰为 $X \times Y$。若一个因子为空，积为空，也连通。有限多个因子的结论用两个因子的结论归纳得到；零个因子的积约定为单点。

反之，若积非空，向每个因子的投影是连续满射，连通像定理给出各因子连通。非空条件保证投影满射，不能省略。 □

**命题 7.14** (拓扑和的连通性)**.** *拓扑和连通，当且仅当它为空，或者恰有一个非空分支且该分支连通。*

*证明.* 若有至少两个非空分支，取一个分支的像，它非空且开闭，补集也非空，所以拓扑和不连通。若只有一个非空分支，拓扑和与该分支同胚；若所有分支为空，拓扑和为空。这就给出全部情形。 □

## 7.4 连通分支

**定义 7.15** (连通分支与全不连通)**.** 对 $x \in X$，将所有含 $x$ 的连通子集的并记为

$$C_X(x) = \bigcup \{A \subseteq X : x \in A,\ A \text{ 连通}\}.$$

称其为 $x$ 的连通分支。若每个连通分支都是单点集，则称 $X$ 全不连通。

**定理 7.16** (连通分支的极大性、闭性与分割)**.** *每个 $C_X(x)$ 连通且闭，是包含 $x$ 的唯一极大连通子集。任意两个连通分支相同或不交，所以连通分支构成 $X$ 的一个分割。任意非空连通子集都包含于某一个连通分支中。*

*证明.* 单点集 $\{x\}$ 连通，故并集包含 $x$；参与并集的集合都有公共点 $x$，所以并集连通。定义又表明每个含 $x$ 的连通子集都包含于 $C_X(x)$，于是它具有所述极大性，且这样的极大集合唯一。闭包 $\operatorname{cl}_X C_X(x)$ 也连通并含 $x$，因此包含于 $C_X(x)$。结合反向包含，得到分支闭。

若两个分支有交点 $z$，它们的并连通。该并同时包含两个分支的基点，由每个分支的极大性，该并必须同时等于两者，所以分支相同。每点属于自己的分支，故各分支覆盖 $X$，并且不同分支不交。最后，若非空连通集 $A$ 含点 $a$，定义给出 $A \subseteq C_X(a)$；空集无需选定分支。 □

**命题 7.17** (开闭集是分支之并)**.** *每个开闭子集都是若干连通分支之并。连通分支未必是开集。*

*证明.* 设 $U$ 开闭，$x \in U$。若 $C_X(x)$ 还遇到 $X \setminus U$，它与两侧的交将给出分离，所以 $C_X(x) \subseteq U$。因此 $U = \bigcup_{x \in U} C_X(x)$。在 $\mathbb{Q}$ 中，例 7.9 已证明分支都是单点，而单点在 $\mathbb{Q}$ 中不开。这就证明第二句。 □

**例 7.18** (分支的两个具体计算)**.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的连通分支恰为 $(-\infty, 0)$、$(0, \infty)$。两者都是区间，因而连通；任何同时遇到正、负半轴的连通子集都必须包含 $0$，所以无法把这两块连成更大的连通子集。

令 $D = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$。它的每个连通子集至多一个点。若连通子集含 $a < b$，则必须包含整个 $[a, b]$；但 $(a, b)$ 中存在不属于 $D$ 的无理数，矛盾。所以 $D$ 全不连通。它却不是离散空间，因为任何 $0$ 的相对开邻域都包含所有足够大的 $1/n$。

## 7.5 道路与道路连通性

**定义 7.19** (道路与道路连通)**.** 拓扑空间 $X$ 中一条从 $a$ 到 $b$ 的道路，是连续映射 $\gamma : [0, 1] \to X$，满足 $\gamma(0) = a$、$\gamma(1) = b$。若任意两点之间都存在道路，则称 $X$ 道路连通。道路不要求单射，也允许起点与终点相同。按此定义，空空间道路连通。

**引理 7.20** (常道路、反向与接合)**.** 常值映射是道路。若 $\alpha$ 从 $a$ 到 $b$，则 $\overline{\alpha}(t)=\alpha(1-t)$ 是从 $b$ 到 $a$ 的道路。若 $\beta$ 从 $b$ 到 $c$，则

$$(\alpha*\beta)(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

是从 $a$ 到 $c$ 的道路。

证明. 常值映射的开集逆像为空集或整个定义域，所以连续。反向道路是 $\alpha$ 与连续映射 $t\mapsto 1-t$ 的复合，故连续，且端点交换。接合公式的两段分别是连续复合；在交点 $t=1/2$ 处，第一段取 $\alpha(1)=b$，第二段取 $\beta(0)=b$，所以公式定义单值映射。两个定义域 $[0,1/2]$、$[1/2,1]$ 是 $[0,1]$ 的有限闭覆盖，由闭覆盖粘贴定理 4.13，接合映射连续。代入 $t=0,1$，分别得到端点 $a,c$。 □

图 7.2 中，两条道路在同一端点 $b$ 接合。公式中的 $2t$、$2t-1$ 保证每一段都走完原道路的整个参数区间，而端点相等正是粘贴定理的相容条件。

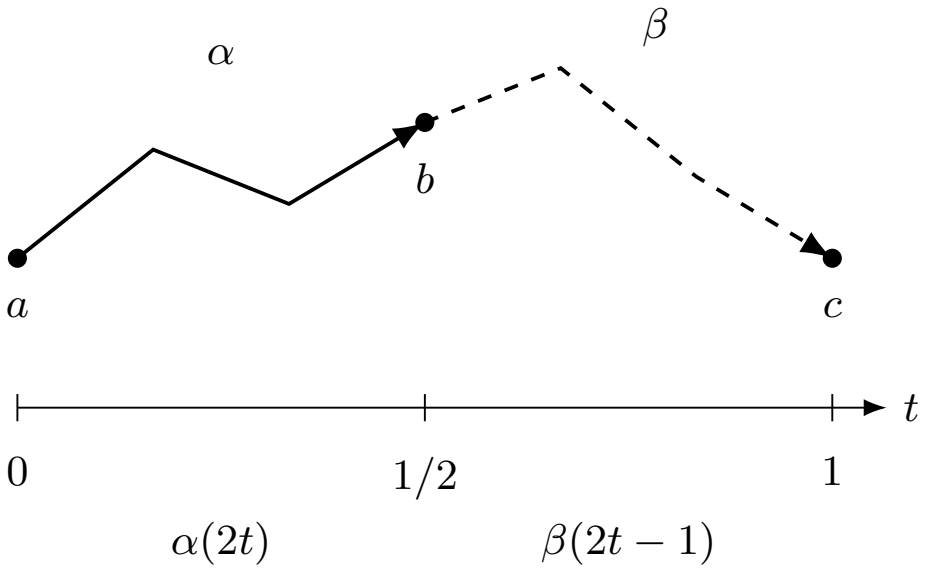



图 7.2: 先沿 $\alpha$ 从 $a$ 到 $b$，再沿 $\beta$ 从 $b$ 到 $c$。两个时间段分别线性缩放到 $[0,1]$，在 $t=1/2$ 的取值同为 $b$。虚线只区分第二条道路，所有路径点都属于空间。

**定理 7.21** (道路连通蕴含连通)**.** 每条道路的像都是紧连通集。道路连通空间必连通。

证明. $[0,1]$ 是区间，因而连通；它又闭且有界，由 Heine–Borel 定理紧。连续像分别保持连通性和紧性，所以道路的像紧且连通。

若道路连通空间有分离 $X=U\cup V$，取 $a\in U, b\in V$，再取从 $a$ 到 $b$ 的道路。其连通像同时遇到分离的两侧，与引理 7.3 矛盾。因此空间连通。空空间没有分离，也满足结论。 □

**定义 7.22** (道路分支)**.** 对 $x\in X$，记

$$P_X(x)=\{y\in X:\text{存在从}x\text{ 到}y\text{ 的道路}\},$$

称为 $x$ 的道路分支。

**命题 7.23** (道路分支的分割与极大性)**.** “两点之间存在道路”是等价关系，其等价类恰为道路分支。每个道路分支是极大道路连通子集，且 $P_X(x) \subseteq C_X(x)$。

证明. 常道路给出自反性，反向道路给出对称性，接合道路给出传递性，所以该关系是等价关系，定义中的 $P_X(x)$ 就是它的等价类。若 $a, b \in P_X(x)$，取从 $x$ 到 $a, b$ 的道路 $\alpha, \beta$，则 $\overline{\alpha} * \beta$ 从 $a$ 到 $b$。它的每个像点也能由 $x$ 沿 $\alpha$ 或 $\beta$ 的一段到达：若 $z = \alpha(s)$，用道路 $t \mapsto \alpha(st)$；对 $\beta$ 上的点用同一公式。故这条接合道路取值于 $P_X(x)$。由缩小值域的连续性，它也是道路分支子空间中的道路。因此 $P_X(x)$ 道路连通。

若道路连通子集 $A$ 含 $x$，则 $A$ 中的任意点都可由 $x$ 在 $A$ 中到达；复合包含映射后，也是 $X$ 中的道路，所以 $A \subseteq P_X(x)$。这说明道路分支的极大性。最后，道路分支道路连通，故连通并含 $x$，由连通分支的定义，$P_X(x) \subseteq C_X(x)$。 □

**命题 7.24** (道路连通性的基本构造)**.** 道路连通空间的连续像道路连通。一族道路连通子集若有公共点，则其并道路连通。有限个道路连通空间的积道路连通；若积非空，逆命题也成立。

证明. 设 $f : X \to Y$ 连续。给定像中的两点 $f(a), f(b)$，取 $X$ 中从 $a$ 到 $b$ 的道路 $\gamma$，则 $f \circ \gamma$ 是连接这两个像点的道路。它取值于 $f(X)$，缩小值域后仍连续。若像为空，则任意两点的条件自动满足。

设公共点为 $p$。并集中的任意两点 $a, b$ 分别属于某两个成员，在第一个成员中取从 $a$ 到 $p$ 的道路，在第二个成员中取从 $p$ 到 $b$ 的道路。它们作为并集子空间中的道路仍连续，接合即得到所需道路。空族之并为空，也道路连通。

对有限积中的两点 $a = (a_i)$、$b = (b_i)$，在每个因子中取从 $a_i$ 到 $b_i$ 的道路 $\gamma_i$。映射 $\gamma(t) = (\gamma_i(t))_i$ 由有限积的坐标判据连续，并具有端点 $a, b$。若积为空，结论按定义成立；零个因子的积为单点，也成立。反之，积非空时各投影都是连续满射，应用已证的连续像结论即可。 □

## 7.6 局部连通与局部道路连通

**定义 7.25** (局部连通性)**.** 若对每个 $x \in X$ 及每个含 $x$ 的开集 $U$，都存在开集 $V$，满足

$$x \in V \subseteq U, \qquad V \text{ 连通},$$

则称 $X$ 局部连通。把上式中的“连通”替换为“道路连通”，得到局部道路连通的定义。只对一个指定点要求上述条件时，称空间在该点具有相应局部性质。

这里要求可以在每个给定开邻域内找到较小的连通开邻域。仅仅说“每点有一个连通邻域”不能替代这个条件：一个连通空间本身就是所有点的连通开邻域，但它仍可能不局部连通。

**定理 7.26** (开子空间的分支判据)**.** 空间 $X$ 局部连通，当且仅当每个开子空间的连通分支都在 $X$ 中开。空间 $X$ 局部道路连通，当且仅当每个开子空间的道路分支都在 $X$ 中开。

证明. 先设 $X$ 局部连通，$U \subseteq X$ 开，$C$ 为 $U$ 的一个连通分支。对每个 $y \in C$，取 $X$ 中开且连通的 $V_y$，使 $y \in V_y \subseteq U$。在 $U$ 的子空间拓扑下，$V_y$ 仍连通，且含 $y$，所以 $V_y \subseteq C$。于是 $C = \bigcup_{y \in C} V_y$ 在 $X$ 中开。反之，若每个开子空间的连通分支在 $X$ 中开，给定 $x \in U$ 且 $U$ 开，取 $x$ 在 $U$ 中的连通分支 $C_U(x)$。它连通、在 $X$ 中开，且 $x \in C_U(x) \subseteq U$，满足定义。

再设 $X$ 局部道路连通。对开集 $U$ 的道路分支 $P$ 及 $y \in P$，取道路连通开集 $V_y$，使 $y \in V_y \subseteq U$。$V_y$ 中的道路复合包含映射后仍是 $U$ 中的道路，故 $V_y \subseteq P$。因此 $P = \bigcup_{y\in P} V_y$ 在 $X$ 中开。反之，若开子空间的道路分支都在 $X$ 中开，则给定 $x \in U$ 且 $U$ 开，道路分支 $P_U(x)$ 道路连通且在 $X$ 中开，并满足 $x \in P_U(x) \subseteq U$。这正是局部道路连通的定义。 □

**推论 7.27** (局部性质与全局分支)**.** *局部道路连通空间必局部连通。在局部连通空间中，连通分支都是开闭集。在局部道路连通空间中，道路分支与连通分支相同，且都开闭。因此，连通且局部道路连通的空间道路连通。*

*证明.* 道路连通邻域必连通，所以局部道路连通定义中的邻域也满足局部连通的要求。若空间局部连通，把前一定理应用于开集 $X$，得到连通分支开；分支闭已由定理 7.16 证明。

若空间局部道路连通，则每个道路分支开，其补集是其他道路分支的并，因而也开。故 $P_X(x)$ 开闭。已知 $P_X(x) \subseteq C_X(x)$。若 $C_X(x)$ 还含一个不在 $P_X(x)$ 中的点，则

$$C_X(x) \cap P_X(x), \qquad C_X(x) \cap \big(X \setminus P_X(x)\big)$$

将构成连通集 $C_X(x)$ 的分离，矛盾。所以两种分支相同。若 $X$ 非空且连通，它只有一个连通分支，故只有一个道路分支，因而道路连通；$X$ 为空时结论按定义也成立。 □

**命题 7.28** (开子空间的遗传性)**.** *局部连通空间的开子空间局部连通；局部道路连通空间的开子空间局部道路连通。*

*证明.* 设 $O$ 在 $X$ 中开，$x \in U \subseteq O$，且 $U$ 在 $O$ 中开。因为 $O$ 开，$U$ 也在 $X$ 中开。若 $X$ 局部连通，可取 $X$ 中连通开集 $V$，使 $x \in V \subseteq U$。它在 $O$ 中开，并且连通性不变，故 $O$ 局部连通。若 $X$ 局部道路连通，可在同一 $U$ 内取道路连通的开集 $V$；道路作为到 $O$ 的映射仍连续，所以 $O$ 局部道路连通。 □

## 7.7 欧氏空间中的线段与折线

**定义 7.29** (凸集、星形集与折线道路)**.** 子集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为凸集，如果对任意 $a, b \in A$，线段 $\{(1-t)a + tb : 0 \le t \le 1\}$ 都包含于 $A$。若存在 $p \in A$，使每个 $a \in A$ 与 $p$ 之间的线段都包含于 $A$，则称 $A$ 关于 $p$ 星形。由有限条首尾相接的线段组成的道路称为折线道路。

**命题 7.30** (凸集与星形集的道路)**.** *凸集道路连通，星形集也道路连通。欧氏空间的开球为凸集。*

*证明.* 对凸集中的 $a, b$，公式 $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ 取值于该集合，各坐标由实数加法和乘法构成，故连续；端点为 $a, b$。空凸集的结论按定义成立。若 $A$ 关于 $p$ 星形，则先沿线段从 $a$ 到 $p$，再沿线段从 $p$ 到 $b$，两段连续且都在 $A$ 中，接合便得到所需道路。

若 $a, b \in B(c, r)$，其中 $r > 0$，则对 $0 \le t \le 1$，

$$\|(1-t)a + tb - c\|_2 \le (1-t)\|a - c\|_2 + t\|b - c\|_2 \le \max\{\|a - c\|_2, \|b - c\|_2\} < r.$$

所以整条线段都在球内，球为凸集。 □

**定理 7.31** (欧氏开集的局部性质与折线连通性)**.** *$\mathbb{R}^n$ 的每个开子集局部道路连通。一个欧氏开集连通，当且仅当其中任意两点都能用该开集内的折线道路连接。*

证明. 设 $O \subseteq \mathbb{R}^n$ 开，$x \in U \subseteq O$，且 $U$ 在 $O$ 中开。则 $U$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中开，可取 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subseteq U$。这个球在 $O$ 中开，并由前一命题道路连通，所以 $O$ 局部道路连通。

现设 $O$ 连通且非空，固定 $p \in O$，令

$$A = \{q \in O : \text{在} O \text{ 中有从} p \text{ 到} q \text{ 的折线道路}\}.$$

常线段表明 $p \in A$。若 $q \in A$，取 $r > 0$ 使 $B(q,r) \subseteq O$。对每个 $z \in B(q,r)$，把从 $p$ 到 $q$ 的折线接上线段 $[q,z]$，得到从 $p$ 到 $z$ 的折线，所以 $B(q,r) \subseteq A$。故 $A$ 在 $O$ 中开。若 $q \in O \setminus A$，仍取球 $B(q,r) \subseteq O$。假如球中有 $z \in A$，从 $p$ 到 $z$ 的折线再接上球内线段 $[z,q]$，便会得到 $q \in A$，矛盾。因此 $B(q,r) \subseteq O \setminus A$，补集也开。连通性和 $A \neq \varnothing$ 迫使 $A = O$。

上述有限线段确实可参数化为道路：若顶点依次为 $p_0, \dots, p_m$，$m \geq 1$，在 $[(j-1)/m, j/m]$ 上定义

$$\gamma(t) = (j - mt)p_{j-1} + (mt - j + 1)p_j, \qquad 1 \leq j \leq m.$$

每段连续，公共端点取值相同，有限闭粘贴保证整体连续。若任意两点可用这样的折线连接，则空间道路连通，因而连通。空开集的两个条件都成立。 □

**例 7.32** (局部性质不能任意传给子空间)**.** 实直线局部道路连通，但子空间 $D = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$ 在 0 处不局部连通。因为 $D$ 全不连通，任何含 0 的连通子集只能为 $\{0\}$，而 $\{0\}$ 在 $D$ 中不开，所以连通开邻域不存在。由局部道路连通蕴含局部连通，$D$ 在 0 处也不局部道路连通。

**命题 7.33** (去点空间与球面的道路连通性)**.** *若 $n \geq 2$，则 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 与 $S^{n-1}$ 都道路连通。当 $n = 1$ 时，这两个空间都不连通。*

证明. 给定非零向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$。当 $n \geq 2$ 时，$e_1, -e_1, e_2$ 是三个不同的单位向量，其中至少一个 $w$ 不等于 $-a/\|a\|_2$ 和 $-b/\|b\|_2$ 中的任何一个。线段 $[a,w]$ 不经过 0：否则对某个 $0 < t < 1$，$(1-t)a + tw = 0$，于是 $w$ 是 $a$ 的负倍数；由 $\|w\|_2 = 1$，得到 $w = -a/\|a\|_2$，与选择矛盾。对 $[w,b]$，若 $(1-t)w + tb = 0$，同样推出 $w = -b/\|b\|_2$，也矛盾。因此两段接成去点空间中的道路。

映射

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}, \qquad r(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$$

连续：范数函数由反三角不等式连续，分母处处正，各坐标再用连续的除法。它在单位球面上等于恒等映射，所以为满射。道路连通空间的连续像道路连通，故 $S^{n-1}$ 道路连通。当 $n = 1$ 时，$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 被正、负半轴分离，而 $S^0 = \{-1, 1\}$ 是离散二点空间，也不连通。 □

## 7.8 拓扑学家的正弦曲线

以下使用实分析中正弦函数的连续性、周期性以及它在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上取遍 $[-1,1]$ 的基本性质。集合的闭包、连通性和道路障碍均在本节证明。定义

$$G = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}, \qquad L = \{0\} \times [-1,1], \qquad T = G \cup L.$$

空间均取 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑。

**定理 7.34** (正弦曲线的闭包)**.** *$G$ 道路连通，且 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2} G = T$。因此 $T$ 是紧连通空间。*

证明. 函数 $x \mapsto \sin(1/x)$ 在 $(0,1]$ 上连续。其图像映射

$$h : (0,1] \longrightarrow G, \qquad h(x) = (x, \sin(1/x))$$

连续且为双射，逆为第一坐标投影的限制，也连续，所以 $h$ 是同胚。区间 $(0,1]$ 为凸集，故道路连通，连续像 $G$ 道路连通。

先证 $T$ 闭。设 $(x_k, y_k) \in T$ 且 $(x_k, y_k) \to (x, y)$。各坐标都满足 $0 \le x_k \le 1$、$-1 \le y_k \le 1$，取极限得到 $0 \le x \le 1$、$-1 \le y \le 1$。若 $x = 0$，则 $(x, y) \in L \subseteq T$。若 $x > 0$，由 $x_k \to x$，当 $k$ 足够大时有 $x_k > x/2 > 0$，故这些点位于 $G$，满足 $y_k = \sin(1/x_k)$。由连续性，$y = \sin(1/x)$，所以 $(x, y) \in G \subseteq T$。由度量空间闭集的序列判别 2.30，$T$ 闭。既然 $G \subseteq T$，就有 $\operatorname{cl} G \subseteq T$。

反过来，对任意 $y \in [-1, 1]$，取 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 使 $\sin\theta = y$。令

$$x_k = \frac{1}{\theta + 2\pi k}, \qquad k \ge 1.$$

分母至少为 $3\pi/2 > 1$，故 $0 < x_k < 1$，且 $x_k \to 0$。又 $\sin(1/x_k) = \sin(\theta + 2\pi k) = y$，所以 $(x_k, y) \in G$ 且 $(x_k, y) \to (0, y)$。因此 $L \subseteq \operatorname{cl} G$，结合 $G \subseteq \operatorname{cl} G$，得到 $T \subseteq \operatorname{cl} G$，闭包等式成立。

$G$ 道路连通，因而连通；连通集的闭包连通，所以 $T$ 连通。它闭且包含于有界矩形 $[0,1] \times [-1,1]$，由 Heine–Borel 定理紧。 □

图 7.3 中的细曲线只画到 $x = 1/80$。正文中的序列说明，无论把图截断在多小的正横坐标处，剩余的振荡仍在每个 $(0, y)$、$-1 \le y \le 1$ 附近出现。这解释了整个竖线段 $L$ 为何都属于闭包。

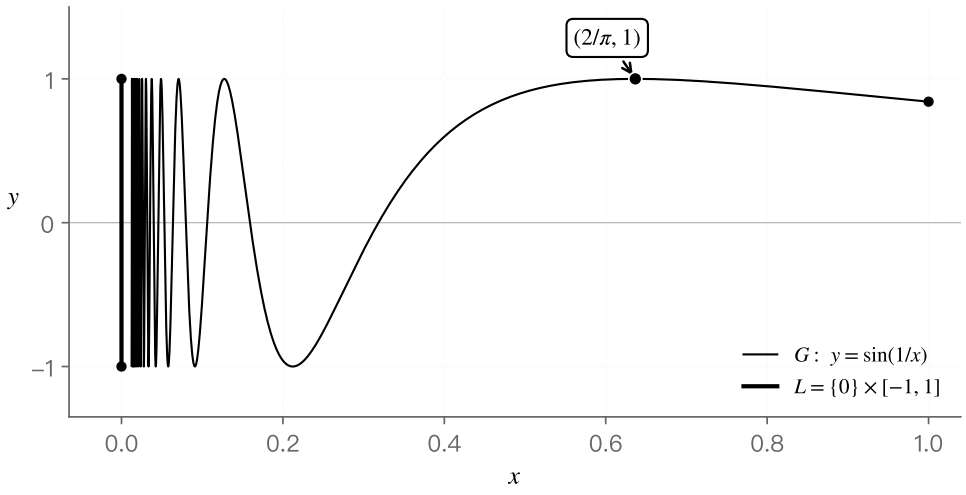



图 7.3: 正弦曲线闭包 $T = G \cup L$。细线按参数 $(1/t, \sin t)$、$1 \le t \le 80$ 计算；$0 < x < 1/80$ 的无限振荡未逐段绘出。粗竖线为闭包新增的 $L = \{0\} \times [-1, 1]$，不属于 $G$。图中没有把竖线附近的区域填成集合。

**定理 7.35** (正弦曲线闭包的道路分支)**.** *$T$ 的道路分支恰为 $G$ 与 $L$。特别地，$T$ 连通但不道路连通。*

证明. 已知 $G$ 道路连通；$L$ 是线段，也道路连通。只需证明不存在从 $L$ 中一点到 $G$ 中一点的道路。反设有这样的道路

$$\gamma : [0,1] \to T, \qquad \gamma(t) = (u(t), v(t)), \qquad \gamma(0) \in L, \quad \gamma(1) \in G.$$

两个坐标函数连续，且 $u(t) \geq 0$。零点集 $Z = u^{-1}(\{0\})$ 是 $[0,1]$ 中的非空闭集，因而紧。连续恒等函数在 $Z$ 上取得最大值，记为 $a = \max Z$。因 $u(1) > 0$，有 $a < 1$，并且

$$u(a) = 0, \qquad u(t) > 0 \ (a < t \leq 1), \qquad v(t) = \sin(1/u(t)) \ (a < t \leq 1).$$

这一步选的是最后一个零点，不要求 $u$ 在其后单调。

令 $t_k = a + (1-a)/(k+1)$，则 $t_k > a$、$t_k \to a$ 且 $u(t_k) > 0$。因为下列两个相位倒数都趋于 $0$，对每个 $k$ 可取正整数 $m_k$，使

$$a_k = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi m_k}, \qquad b_k = \frac{1}{3\pi/2 + 2\pi m_k}, \qquad 0 < b_k < a_k < u(t_k).$$

函数 $u$ 在 $[a, t_k]$ 上连续，端点值为 $0, u(t_k)$，由中间值定理可取 $r_k, s_k \in (a, t_k)$，使

$$u(r_k) = a_k, \qquad u(s_k) = b_k.$$

这些时刻都严格大于 $a$，所以相应点属于 $G$，从而

$$v(r_k) = \sin(\pi/2 + 2\pi m_k) = 1, \qquad v(s_k) = \sin(3\pi/2 + 2\pi m_k) = -1.$$

由 $a < r_k, s_k < t_k$ 及 $t_k \to a$，有 $r_k, s_k \to a$。$v$ 在 $a$ 连续，迫使两列值都趋于同一个 $v(a)$，即同时得到 $v(a) = 1$ 与 $v(a) = -1$，矛盾。反向道路也不可能存在，所以没有道路分支同时遇到 $G, L$。两者各自道路连通、非空且并为 $T$，故它们恰为两个道路分支。 □

图 7.4 只使用第一坐标的中间值性质。从 0 到 $u(t_k)$ 的连续变化必须经过 $a_k, b_k$，但经过它们的时刻 $r_k, s_k$ 不必按数值大小排列；证明只需要二者都位于 $(a, t_k)$。此外，$G$ 是 $T$ 中一个不闭的道路分支，因为它在 $T$ 中的闭包为整个 $T$。这与连通分支总闭的结论形成区别。

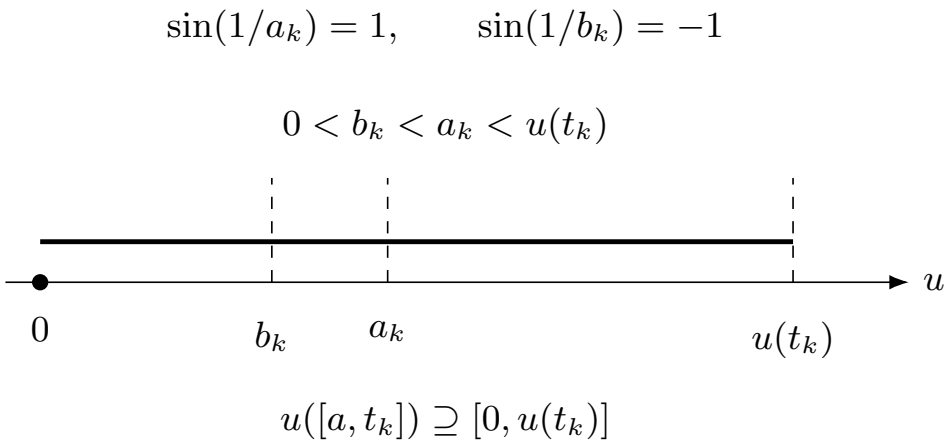



图 7.4: 第一坐标 $u$ 从 0 变到正值时，其像包含中间的全部坐标值。足够小的 $a_k, b_k$ 分别迫使第二坐标等于 $1, -1$。图中横坐标位置只表示包含与次序，没有按相位公式的比例绘制。

**命题 7.36** (极限竖线处不局部连通)**.** $T$ 在每个 $p=(0,y_0)\in L$ 处都不局部连通，因而也不局部道路连通。

证明. 固定 $y_0\in[-1,1]$，取区间 $J=(y_0-1/2,y_0+1/2)$ 和相对开集

$$U=T\cap(\mathbb{R}\times J).$$

它含 $p$。由于 $J$ 的长度为 $1$，$-1,1$ 不可能都属于 $J$，所以可选 $e\in\{-1,1\}\setminus J$。假设存在连通开集 $V$，满足 $p\in V\subseteq U$。由 $p\in\mathrm{cl}_T G$，这个开邻域必与 $G$ 相交；取 $(x,\sin(1/x))\in V\cap G$，其中 $x>0$。第一坐标投影的像 $\pi_1(V)$ 连通且包含 $0,x$，所以它包含整个 $[0,x]$。

若 $e=1$，从数列 $1/(\pi/2+2\pi m)$ 中取足够小的 $c\in(0,x)$；若 $e=-1$，从 $1/(3\pi/2+2\pi m)$ 中作同样选择。两种情形都有 $\sin(1/c)=e$。因 $c\in\pi_1(V)$，$V$ 中存在第一坐标为 $c$ 的点。在 $T$ 中，正第一坐标 $c$ 对应的点唯一，正是 $(c,e)$。于是 $(c,e)\in V\subseteq U$，要求 $e\in J$，与选择矛盾。因此 $U$ 中不存在含 $p$ 的连通开邻域，局部连通性失败。局部道路连通必蕴含局部连通，故后一性质也失败。 □

## 7.9 道路连通但不局部连通的梳状空间

仍令 $D=\{0\}\cup\{1/n:n\ge1\}$，在平面中定义

$$\mathcal{C}=\big(D\times[0,1]\big)\cup\big([0,1]\times\{0\}\big).$$

它包含位于 $x=0,1,1/2,1/3,\dots$ 的竖线段和整条底边。图 7.5 中，每根竖齿都与底边相交，所以可以通过底边接合道路。但在避开底边的小邻域里，不同竖齿之间没有这种接合。

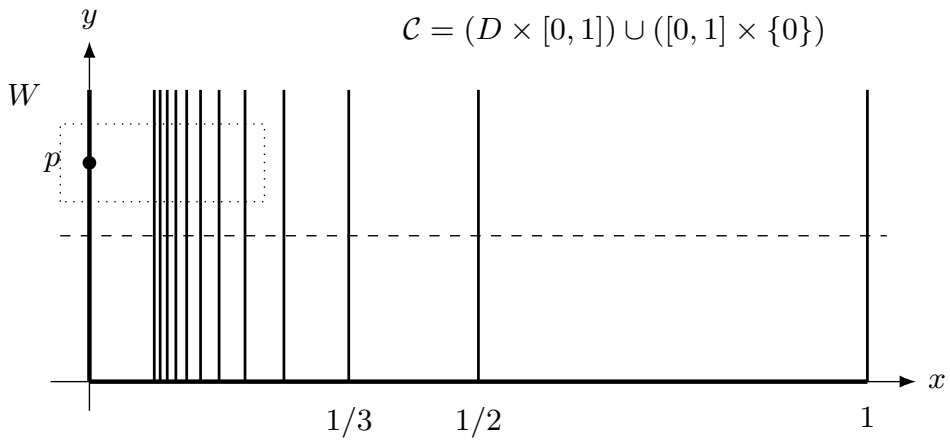



图 7.5: 梳状空间 $\mathcal{C}$。图中画出前十二根 $x=1/n$ 的竖齿、极限竖齿 $x=0$ 和底边；其余竖齿趋向 $x=0$，未逐根绘出。点 $p=(0,3/4)$ 的小邻域 $W$ 可避开底边，却必遇到其他竖齿。水平虚线表示开集 $U=\mathcal{C}\cap\{y>1/2\}$ 的截断高度；它不是空间中新加的横边。

**命题 7.37** (梳状空间的紧性与道路连通性)**.** $\mathcal{C}$ 紧且道路连通。

证明. 先证 $D$ 紧。给定 $D$ 的相对开覆盖，选一个含 0 的成员 $U_0$。存在 $r>0$ 使 $D\cap(-r,r)\subseteq U_0$。取 $N$ 使 $1/N<r$，则所有 $n\geq N$ 的 $1/n$ 都被 $U_0$ 覆盖。剩下的至多 $N-1$ 个点各从覆盖中选一个成员，连同 $U_0$ 就得到有限子覆盖。故 $D$ 紧。由闭区间紧、有限积紧和有限并紧，$D\times[0,1]$ 与 $[0,1]\times\{0\}$ 都紧，它们的并 $\mathcal{C}$ 紧。

任取 $p=(d,y)$、$q=(d',y')$ 属于 $\mathcal{C}$。定义

$$\alpha_p(t)=(d,(1-t)y),\qquad \beta(t)=((1-t)d+td',0),\qquad \alpha_q(t)=(d',(1-t)y').$$

若 $y>0$，由 $p\in\mathcal{C}$ 必有 $d\in D$，所以 $\alpha_p$ 沿相应竖齿下降；若 $y=0$，它就是底边上的常道路。因此 $\alpha_p$ 始终取值于 $\mathcal{C}$。对 $\alpha_q$，$y'>0$ 时有 $d'\in D$，$y'=0$ 时为常道路，也都在 $\mathcal{C}$ 中。因为 $d,d'\in[0,1]$，$\beta$ 始终位于底边。三者的坐标公式都连续，缩小值域后仍连续。先接合 $\alpha_p$ 与 $\beta$，再接合 $\overline{\alpha_q}$，得到从 $p$ 到 $q$ 的道路，故 $\mathcal{C}$ 道路连通。 □

**命题 7.38** (梳状空间在极限竖齿处的局部障碍)**.** *$\mathcal{C}$ 在 $p=(0,3/4)$ 处不局部连通，也不局部道路连通。*

证明. 取含 $p$ 的相对开集

$$U=\mathcal{C}\cap\{(x,y):y>1/2\}=D\times(1/2,1].$$

若连通子集 $A\subseteq U$ 含 $p$，则第一坐标投影 $\pi_1(A)\subseteq D$ 连通且含 0。因为 $D$ 全不连通，只能有 $\pi_1(A)=\{0\}$，所以 $A\subseteq\{0\}\times(1/2,1]$。

另一方面，任意含 $p$ 的相对开集 $V$ 都包含某个 $\mathcal{C}\cap B_{\mathbb{R}^2}(p,r)$，其中 $r>0$。选择 $n$ 使 $1/n<r$，则

$$(1/n,3/4)\in\mathcal{C}\cap B_{\mathbb{R}^2}(p,r)\subseteq V.$$

因此含 $p$ 的开集不可能完全包含于极限竖齿。若存在连通开集 $V$ 满足 $p\in V\subseteq U$，第一段论证要求它完全位于极限竖齿，第二段却要求它遇到其他竖齿，矛盾。所以空间在 $p$ 处不局部连通；由局部道路连通蕴含局部连通，它在 $p$ 处也不局部道路连通。 □

# 8　商空间与粘合构造

## 8.1　等价类、饱和集与商拓扑

**定义 8.1** (等价关系与商集)**.** 集合 $X$ 上的关系 $\sim$ 若满足自反性、对称性和传递性，称为等价关系。对 $x \in X$，记 $[x] = \{x' \in X : x' \sim x\}$。所有等价类组成商集 $X/\!\sim$，自然满射

$$q : X \longrightarrow X/\!\sim, \qquad q(x) = [x]$$

称为商投影。对任意满射 $p : X \to Y$，集合 $p^{-1}(\{y\})$ 称为 $y$ 上的纤维。

等价类确实构成分割：自反性给出 $x \in [x]$；若 $z \in [x] \cap [x']$，则由对称性、传递性有 $x \sim x'$。对任意 $w \in [x]$，再由传递性得 $w \in [x']$，所以 $[x] \subseteq [x']$；交换两点得反向包含。因此相交的等价类相同。对满射 $p$，关系 $x \sim x' \iff p(x) = p(x')$ 也满足三条公理，其等价类就是纤维。

**定义 8.2** (饱和集)**.** 给定满射 $q : X \to Y$，子集 $A \subseteq X$ 的饱和化为 $q^{-1}(q(A))$。若 $q^{-1}(q(A)) = A$，则称 $A$ 关于 $q$ 饱和。等价地，饱和集是若干完整纤维之并。

最后一个等价说法可直接验证：$q^{-1}(q(A))$ 中的点恰好与 $A$ 中某点有相同的像。所以饱和化补齐 $A$ 遇到的每根纤维，且不会加入其他纤维。此外，任意 $B \subseteq Y$ 的逆像都饱和；每个饱和集 $A$ 又等于 $q^{-1}(B)$，其中 $B = q(A)$。

图 8.1 取 $q(s,t) = s$，$X = [0,3] \times [0,1]$，阴影矩形为 $A = [0.7, 1.5] \times [0.3, 0.65]$。虚线矩形围出它的饱和化 $[0.7, 1.5] \times [0, 1]$，两者有相同的投影。图中的竖点线表示纤维；虚线边框只用于区分集合，不表示删去边界。

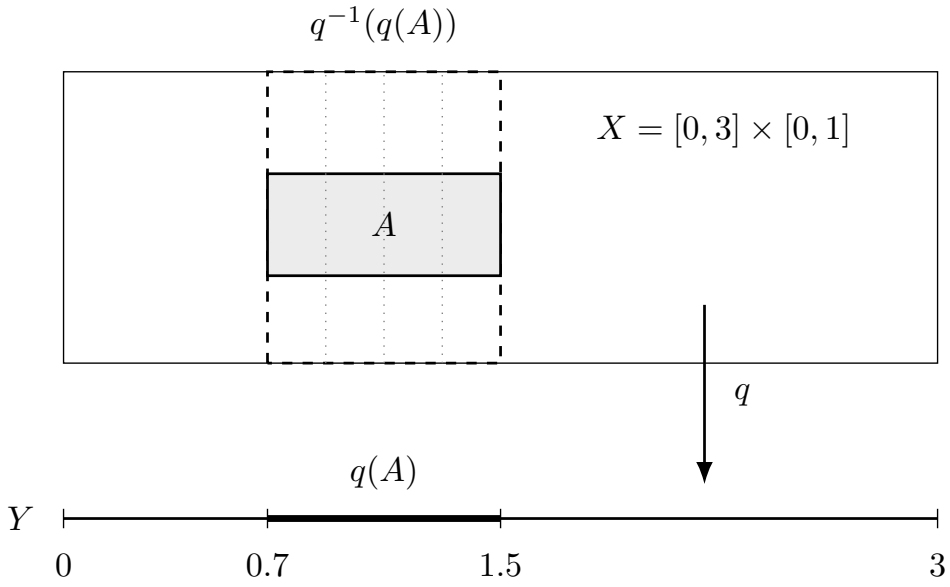



图 8.1: 投影下的饱和化。

**定理 8.3** (商拓扑的存在与最细性)**.** 设 $X$ 为拓扑空间，$q: X \to Y$ 为集合上的满射。令

$$\mathcal{T}_q = \{U \subseteq Y : q^{-1}(U) \text{ 在} X \text{ 中开}\}.$$

则 $\mathcal{T}_q$ 是 $Y$ 上的拓扑，称为 $q$ 诱导的商拓扑。它是使 $q$ 连续的最细拓扑。

证明. 空集和全集的逆像分别为 $\varnothing, X$，都开。任意并的逆像等于逆像之并，有限交的逆像等于逆像之交，所以 $\mathcal{T}_q$ 对任意并与有限交封闭，是拓扑。按其定义，$q$ 对这个拓扑连续。若 $\mathcal{S}$ 是另一个使 $q$ 连续的拓扑，则每个 $U \in \mathcal{S}$ 的逆像在 $X$ 中开，于是 $U \in \mathcal{T}_q$。故 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_q$，证明最细性。 □

**定义 8.4** (商映射与商空间)**.** 连续满射 $q: X \to Y$ 称为商映射，如果对任意 $U \subseteq Y$，有

$$U \text{ 在} Y \text{ 中开} \quad \Longleftrightarrow \quad q^{-1}(U) \text{ 在} X \text{ 中开}.$$

对等价关系的商集配备商投影诱导的拓扑，得到商空间 $X/\!\sim$。

商映射不只要求“开集的逆像开”，还要求能由逆像是否开来判定值域中的集合是否开。这条反向条件决定商拓扑，不由连续满射自动保证。

**命题 8.5** (闭集与饱和开集的判据)**.** 连续满射 $q: X \to Y$ 是商映射，当且仅当对任意 $F \subseteq Y$，$F$ 闭等价于 $q^{-1}(F)$ 闭。若 $q$ 为商映射，则它在饱和开集与 $Y$ 的开集之间给出一一对应。特别地，$q$ 为开映射，当且仅当每个开集的饱和化都开。

证明. 对补集使用恒等式 $q^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus q^{-1}(F)$，就把闭集判据变成定义中的开集判据。若 $A$ 饱和且开，则 $q^{-1}(q(A)) = A$ 开，故 $q(A)$ 开。反过来，$U \subseteq Y$ 开时，$q^{-1}(U)$ 开且饱和，满射性又给出 $q(q^{-1}(U)) = U$。这两种操作互逆，得到一一对应。对任意开集 $O \subseteq X$，商映射条件给出

$$q(O) \text{ 开} \quad \Longleftrightarrow \quad q^{-1}(q(O)) \text{ 开}.$$

对所有 $O$ 使用此式，就得到开映射的判据。 □

## 8.2 通过商空间定义连续映射

**定理 8.6** (商映射的泛性质)**.** 设 $q: X \to Y$ 为商映射，$Z$ 为任意拓扑空间。映射 $g: Y \to Z$ 连续，当且仅当 $g \circ q$ 连续。因此，一个连续映射 $f: X \to Z$ 若在每根纤维上为常值，便唯一分解为 $f = \bar{f} \circ q$，其中 $\bar{f}: Y \to Z$ 连续。

证明. 若 $g$ 连续，则复合连续。反之，设 $g \circ q$ 连续。对 $Z$ 的任意开集 $O$，有

$$q^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ q)^{-1}(O),$$

右端在 $X$ 中开，由商映射条件，$g^{-1}(O)$ 在 $Y$ 中开。故 $g$ 连续。

若 $f$ 在纤维上为常值，对 $y \in Y$ 选取任一 $x \in q^{-1}(\{y\})$，定义 $\bar{f}(y) = f(x)$。同一纤维上取值相同，保证此定义不依赖选择。它满足 $\bar{f} \circ q = f$，由刚证的判据连续。若还有 $h \circ q = f$，对任意 $y = q(x)$ 有 $h(y) = f(x) = \bar{f}(y)$，故 $h = \bar{f}$。 □

对等价类写公式 $\bar{f}([x]) = f(x)$ 时，必须先验证 $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$，否则公式甚至没有定义出映射。验证这一点后，商映射的泛性质才负责连续性。

**命题 8.7** (相同纤维给出的同胚)**.** 设 $q : X \to Y$、$p : X \to Z$ 都为商映射，且

$$q(x) = q(x') \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = p(x').$$

则 $h(q(x)) = p(x)$ 定义一个同胚 $h : Y \to Z$。

证明. 条件的正向保证 $h$ 定义无歧义，反向保证单射，$p$ 满射保证 $h$ 满射。因为 $h \circ q = p$ 连续，由 $q$ 的泛性质，$h$ 连续。逆映射由 $h^{-1}(p(x)) = q(x)$ 给出，满足 $h^{-1} \circ p = q$，由 $p$ 的泛性质连续。所以 $h$ 为同胚。 □

**命题 8.8** (商映射的复合与检验)**.** 两个商映射的复合仍为商映射。若 $q : X \to Y$ 为商映射，$p : Y \to Z$ 为连续满射，则 $p$ 是商映射当且仅当 $p \circ q$ 是商映射。

证明. 若 $p, q$ 都为商映射，则对任意 $U \subseteq Z$，有

$$U \text{ 开} \iff p^{-1}(U) \text{ 开} \iff q^{-1}(p^{-1}(U)) \text{ 开}.$$

复合是连续满射，所以此式证明复合为商映射。若只知复合为商映射，对满足 $p^{-1}(U)$ 开的集合 $U \subseteq Z$，由 $q$ 连续，$(p \circ q)^{-1}(U)$ 开，再由复合的商映射条件，$U$ 开。结合 $p$ 连续，得到 $p$ 是商映射。 □

**命题 8.9** (紧性与连通性的商像)**.** 紧空间的商空间紧，连通空间的商空间连通，道路连通空间的商空间道路连通。

证明. 商投影连续且满射，所以整个商空间就是它的连续像。分别应用紧连续像定理、连通连续像定理和道路连通连续像命题，得到三条结论。这些结论只使用商映射的连续满射部分。 □

## 8.3 商映射的充分条件与限制

**定理 8.10** (开满射与闭满射)**.** 连续开满射是商映射，连续闭满射也是商映射。从紧空间到 *Hausdorff* 空间的连续满射是闭商映射。

证明. 若 $q$ 连续、开且满，且 $q^{-1}(U)$ 开，则 $U = q(q^{-1}(U))$ 开，所以 $q$ 为商映射。若 $q$ 连续、闭且满，且 $q^{-1}(F)$ 闭，则 $F = q(q^{-1}(F))$ 闭，由闭集判据也得商映射。

若 $X$ 紧、$Y$ Hausdorff，连续映射 $q : X \to Y$ 把每个闭子集 $F \subseteq X$ 送到紧子集 $q(F)$，而 Hausdorff 空间中的紧子集闭。所以 $q$ 闭；再加满射，应用上一段结论。 □

**命题 8.11** (连续满射未必是商映射)**.** 设 $\mathbb{R}_{\mathrm{d}}$ 为带离散拓扑的实数集，$\mathbb{R}$ 带通常拓扑。恒等满射 $i : \mathbb{R}_{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$ 连续，但不是商映射。

证明. $\mathbb{R}$ 的任意开集，其逆像是离散空间的一个子集，因而开，所以 $i$ 连续。但 $i^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ 在定义域中开，$\{0\}$ 在通常实直线中不开，违反商映射的反向条件。 □

**定理 8.12** (饱和开闭子空间上的限制)**.** 设 $q : X \to Y$ 是商映射，$A \subseteq X$ 饱和。若 $A$ 开或闭，则限制 $q_A : A \to q(A)$ 仍为商映射；这里两侧均取子空间拓扑。

证明. 限制映射连续且满射。先设 $A$ 开。由饱和性和商映射条件，$q(A)$ 在 $Y$ 中开。若 $B \subseteq q(A)$，且 $q_A^{-1}(B)$ 在 $A$ 中开，则因 $A$ 开，它在 $X$ 中也开。又 $A = q^{-1}(q(A))$，所以 $q_A^{-1}(B) = q^{-1}(B)$。由商映射条件，$B$ 在 $Y$ 中开，因而在 $q(A)$ 中开，得到结论。

再设 $A$ 闭。饱和性和闭集判据给出 $q(A)$ 在 $Y$ 中闭。若 $B \subseteq q(A)$，且 $q_A^{-1}(B)$ 在 $A$ 中闭，则它在 $X$ 中闭；它仍等于 $q^{-1}(B)$。由商映射的闭集判据，$B$ 在 $Y$ 中闭，从而在 $q(A)$ 中闭。再用限制映射的闭集判据，就得 $q_A$ 是商映射。 □

**命题 8.13** (开商映射与积). *若 $q : X \to Y$ 是连续开满射，则对任意空间 $Z$，$q \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ 是连续开满射，因而为商映射。有限个连续开满射的积也具有这些性质。*

证明. 积映射的坐标函数连续，故连续；$q$ 满射使它满射。每个基本开矩形 $U \times V$ 的像是 $q(U) \times V$，在 $Y \times Z$ 中开。任意积开集为这种矩形之并，像保持并，故整个映射开。由开满射判据，它是商映射。有限个映射之积可逐个对一个因子应用此结论，再复合，得到连续、开且满射。有空因子时定义域和值域的相应积均为空，上述性质仍成立。 □

这里积映射结论附带开性条件；不能仅从两个映射都是商映射，就直接援用这条命题。后面的紧空间模型会用“紧空间到 Hausdorff 空间的连续满射”另行判定。

## 8.4 把区间端点粘成圆周

本节使用正弦、余弦的连续性、周期性，以及 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 对单位圆的通常参数化。特别地，两个参数给出相同点当且仅当它们相差 $2\pi$ 的整数倍。记

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \qquad c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

**定理 8.14** (端点识别的区间与圆周). *在 $[0,1]$ 中只将 0 与 1 识别，得到商空间 $Q$。则 $\bar{c}([t]) = c(t)$ 给出同胚 $Q \to S^1$。*

证明. 映射 $c : [0,1] \to S^1$ 连续且满射。其定义域紧，值域为欧氏空间的子空间，因而 Hausdorff，故 $c$ 为商映射。若 $c(s) = c(t)$，则 $s - t \in \mathbb{Z}$。对 $s, t \in [0,1]$，这意味着 $s = t$，或者 $\{s, t\} = \{0, 1\}$。反过来，这两种情形确实给出相同的圆周点。所以 $c$ 与商投影 $q : [0,1] \to Q$ 具有相同纤维，由命题 8.7，诱导映射 $\bar{c}$ 为同胚。 □

设 $p = c(0) = c(1)$。图 8.2 取 $\delta = 1/12$，圆周上的粗弧是开邻域

$$U = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : -\delta < t < \delta\}.$$

它也可写为 $S^1 \cap \{x > \cos(2\pi\delta)\}$，所以相对开。其逆像是 $[0, \delta) \cup (1 - \delta, 1]$，两端的半区间必须同时出现。图中空心圆表示弧端点及其逆像端点未包含，实心的 $0, 1$ 却都属于逆像。

**命题 8.15** (半开区间与接缝的区别). *连续双射 $c_0 : [0,1) \to S^1$、$c_0(t) = c(t)$ 不是商映射，也不是同胚。另一方面，$c : [0,1] \to S^1$ 虽为商映射，却不是开映射。*

证明. $c_0$ 连续；由参数的周期性，在半开区间上恰好每个圆周点出现一次，所以为双射。取 $A = [0, 1/4)$，它在 $[0,1)$ 中开，令 $B = c_0(A)$。则 $c_0^{-1}(B) = A$ 开，但 $B$ 在圆周中不开：$p \in B$，而点列 $c(1 - 1/n)$、$n \geq 5$，都不属于 $B$，却趋于 $p$。若 $B$ 开，收敛性要求该列最终位于 $B$，矛盾。故 $c_0$ 不是商映射。每个同胚都是开满射，因而为商映射，所以它也不是同胚。

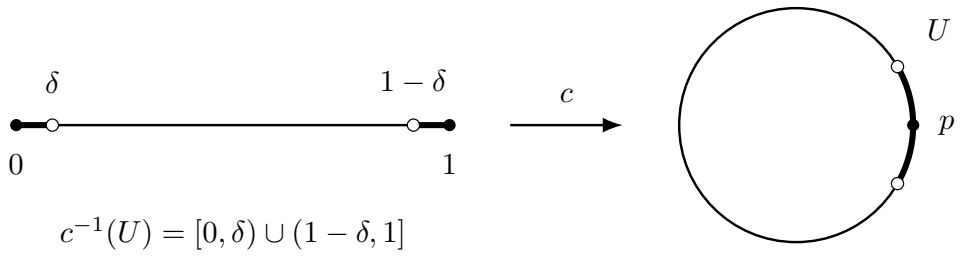



图 8.2: 圆周接缝处的开邻域。

在 $[0,1]$ 中，$A = [0, 1/4)$ 同样相对开，其像仍为 $B$，在圆周中不开。因此 $c$ 不是开映射。它为商映射，已在前一定理中证明。 □

**命题 8.16** (实直线模整数)**.** *在 $\mathbb{R}$ 中定义 $s \sim t \iff s - t \in \mathbb{Z}$。映射 $[t] \mapsto c(t)$ 给出同胚 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$。相应的 $c : \mathbb{R} \to S^1$ 为开商映射，但不是闭映射。*

*证明.* 扩展到 $\mathbb{R}$ 的 $c$ 连续且满射。若 $c^{-1}(U)$ 在 $\mathbb{R}$ 中开，则其与 $[0,1]$ 的交相对开；该交就是 $c|_{[0,1]}$ 对 $U$ 的逆像。因限制为商映射，$U$ 在 $S^1$ 中开。所以扩展映射也是商映射。它的纤维恰为整数平移类，应用相同纤维同胚判据，得到第一个结论。对 $\mathbb{R}$ 中任意开集 $O$，有

$$c^{-1}(c(O)) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (O + k).$$

右端为开集，故由商映射条件，$c(O)$ 开，所以 $c$ 开。

令 $F = \{n + 1/n : n \geq 2\}$。这是 $\mathbb{R}$ 中的闭集：若 $x \notin F$，只需在有界区间 $[x-1, x+1]$ 中避开有限多个 $F$ 的点，就能取得不遇到 $F$ 的 $x$ 的开邻域。有限性来自 $n + 1/n \geq n$，所以落在该有界区间内的 $n$ 只有有限个。但 $c(n + 1/n) = c(1/n) \to p$，且 $p \notin c(F)$，因为 $1/n$ 不是整数。因此 $c(F)$ 不闭，$c$ 不是闭映射。 □

## 8.5 商空间的分离性

**定理 8.17** (纤维闭性与饱和邻域)**.** *设 $q : X \to Y$ 为商映射。则 $Y$ 为 $T_1$ 空间，当且仅当每根纤维在 $X$ 中闭。空间 $Y$ Hausdorff，当且仅当任意两根不同纤维都能分别包含在不交的饱和开集中。若 $Y$ Hausdorff，则关系集*

$$R_q = \{(x, x') \in X \times X : q(x) = q(x')\}$$

*在 $X \times X$ 中闭。*

*证明.* $T_1$ 等价于每个单点集闭，而商映射的闭集判据给出 $\{y\}$ 闭当且仅当 $q^{-1}(\{y\})$ 闭，所以第一句成立。

若 $Y$ Hausdorff，对不同点 $y, y'$ 取不交开邻域 $U, V$。它们的逆像开、饱和且不交，并分别包含两根纤维。反之，若这两根纤维分别包含于不交的饱和开集 $A, B$，则 $q(A), q(B)$ 是 $Y$ 中的开邻域。它们不交：若 $z \in q(A) \cap q(B)$，饱和性将使同一根非空纤维同时包含于 $A, B$，与 $A \cap B = \varnothing$ 矛盾。所以 $Y$ Hausdorff。

最后，$q \times q$ 连续，且 $R_q = (q \times q)^{-1}(\Delta_Y)$。Hausdorff 空间的对角线闭，因此 $R_q$ 闭。 □

**例 8.18** (双原点直线)**.** 取两条实直线的拓扑和 $E = \mathbb{R}_a \sqcup \mathbb{R}_b$。将同一非零坐标的两点 $t_a, t_b$ 识别，但保留两个不同的原点 $0_a, 0_b$。记商空间为 $L_2$，商投影为 $q : E \to L_2$。其每根纤维或为一个原点，或为 $\{t_a, t_b\}$、$t \neq 0$，都是 Hausdorff 空间 $E$ 中的有限闭集。因此 $L_2$ 为 $T_1$ 空间。

这个商投影甚至是开映射。若 $O \subseteq E$ 开，把它在两份实线上的坐标部分分别记为开集 $O_a, O_b \subseteq \mathbb{R}$，则 $q^{-1}(q(O))$ 在两份实线上分别为

$$O_a \cup (O_b \setminus \{0\}), \qquad O_b \cup (O_a \setminus \{0\}).$$

两者都开，所以饱和化开，由命题 8.5，$q$ 开。

但两个原点在商空间中不能被不交开集分离。若 $U_a, U_b$ 分别是 $q(0_a), q(0_b)$ 的开邻域，则存在 $\varepsilon_a, \varepsilon_b > 0$，使它们的逆像分别含有

$$(-\varepsilon_a, \varepsilon_a) \times \{a\}, \qquad (-\varepsilon_b, \varepsilon_b) \times \{b\}.$$

选择 $0 < t < \min\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$，便有 $q(t_a) = q(t_b) \in U_a \cap U_b$。所以 $L_2$ 不是 Hausdorff 空间。

图 8.3 中的粗线表示两个逆像邻域内所含的小开区间，不是完整逆像的形状。两条虚点线示意非零坐标的识别，而中间的虚线指出必被两个邻域共同包含的商点。原点没有相互识别。这个例子说明，纤维逐根闭并不足以保证商空间 Hausdorff。

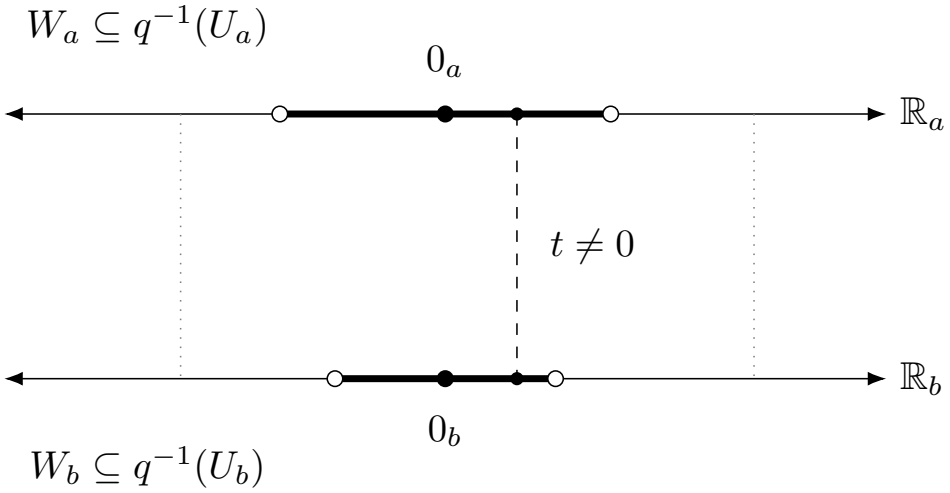



图 8.3: 双原点直线的两个原点。

**定理 8.19** (紧 Hausdorff 空间上的闭等价关系)**.** *设 $X$ 紧且 Hausdorff，$\sim$ 为其上的等价关系。则商空间 $Y = X/\!\sim$ Hausdorff，当且仅当关系集*

$$R = \{(x, x') \in X \times X : x \sim x'\}$$

*闭。满足这些条件时，商投影为闭映射，$Y$ 也紧。*

*证明.* 若商空间 Hausdorff，关系集闭由前一定理给出。现设 $R$ 闭。对 $X$ 的任意闭集 $F$，$R \cap (F \times X)$ 是紧积空间 $X \times X$ 的闭子集，因而紧。其第二坐标投影恰为

$$\pi_2\big(R \cap (F \times X)\big) = q^{-1}(q(F)).$$

所以饱和化是 $X$ 中的紧子集，因 $X$ Hausdorff 而闭。由商映射的闭集判据，$q(F)$ 在 $Y$ 中闭。因此 $q$ 为闭映射。

对任意 $x \in X$，映射 $z \mapsto (x,z)$ 连续，等价类 $[x]$ 是它对 $R$ 的逆像，所以闭。任取两个不同的等价类 $C, D$，它们是不交闭集。紧 Hausdorff 空间正规，由定理 6.13，可取不交开集 $U, V$，使 $C \subseteq U$、$D \subseteq V$。定义

$$U^* = X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U)), \qquad V^* = X \setminus q^{-1}(q(X \setminus V)).$$

由于 $q$ 闭且连续，$U^*, V^*$ 开；它们又是饱和集的补集，所以饱和。因 $X \setminus U \subseteq q^{-1}(q(X \setminus U))$，有 $U^* \subseteq U$。若 $C$ 中某点不在 $U^*$，它的等价类就遇到 $X \setminus U$，但这个等价类正是 $C \subseteq U$，矛盾。因此 $C \subseteq U^*$。对 $D, V$ 用同一集合公式，得到 $D \subseteq V^* \subseteq V$。于是 $U^*, V^*$ 是分别包含两根纤维的不交饱和开集。由前一定理的判据，$Y$ Hausdorff。最后 $q$ 为连续满射，$X$ 紧，所以 $Y$ 紧。 □

## 8.6 方形的粘合：圆柱面与环面

**命题 8.20** (圆柱面的方形模型)**.** *在方形 $[0,1]^2$ 中，对每个 $t \in [0,1]$ 识别 $(0,t)$ 与 $(1,t)$，其余不增加识别。所得商空间同胚于 $S^1 \times [0,1]$。*

*证明.* 定义 $F(s,t) = (c(s), t)$。它的各坐标连续，且满射到 $S^1 \times [0,1]$。若 $F(s,t) = F(s',t')$，先有 $t = t'$，再有 $c(s) = c(s')$，所以 $s = s'$，或者 $s, s'$ 为两个端点。这正是所规定的等价关系。定义域方形紧，值域为 Hausdorff 空间的有限积，故 $F$ 为商映射。由相同纤维同胚判据，诱导映射是同胚。 □

圆柱面模型只识别左右边。上、下两条边分别变成两个圆周，彼此没有识别。若再识别 $(s,0)$ 与 $(s,1)$，就得到下面的环面。

**定理 8.21** (环面的方形模型)**.** *在 $[0,1]^2$ 中，由*

$$(0,t) \sim (1,t), \qquad (s,0) \sim (s,1)$$

*生成的等价关系，其商空间同胚于 $S^1 \times S^1$，称为二维环面，记为 $T^2$。其中方形内部的等价类为单点，去掉角点的边上等价类为一对对应点，四个角点构成一个等价类。*

*证明.* 考虑连续满射

$$F : [0,1]^2 \longrightarrow S^1 \times S^1, \qquad F(s,t) = (c(s), c(t)).$$

两个点有相同像，当且仅当其第一坐标相同或互为 $0,1$，并且第二坐标也相同或互为 $0,1$。对内部点，两坐标都不在端点，故只能是同一点。对非角点的边点，只有位于边界的那个坐标可交换 $0,1$，所以恰有两个点。对角点，两个坐标都可独立交换，故四个角点同像。这些交换均由规定的边配对得到；反过来，每次边配对都保持 $F$ 的值，所以其传递闭包也只识别同像点。因此纤维恰为所述等价类。方形紧，$S^1 \times S^1$ Hausdorff，故 $F$ 为商映射，并由相同纤维同胚判据得到结论。 □

图 8.4 中，同字母的两条边按箭头方向逐点配对。左右边箭头同向，上下边箭头也同向；标成 $p$ 的四个角点最终成为一个点。图中的箭头是配对记号，既不是额外边，也不表示删除箭头反向的道路。

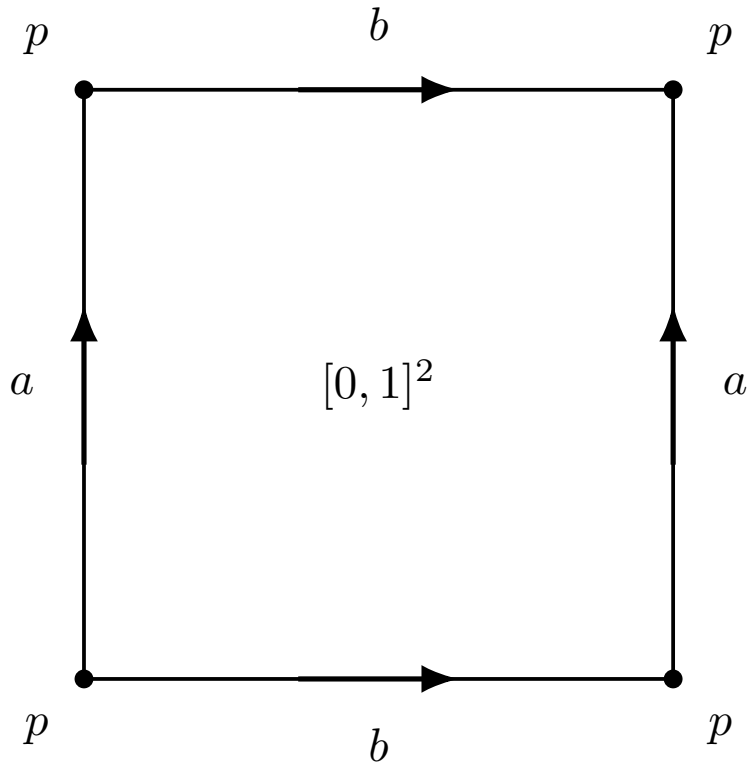



图 8.4: 环面的方形边配对。

**命题 8.22** (环面在三维空间中的模型)**.** 映射

$$H : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad H((a,b),(u,v)) = ((2+u)a, (2+u)b, v)$$

是到其像的同胚，其像等于

$$\mathcal{T} = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

*证明.* 映射由有限次实数运算组成，故连续。若点来自定义域，$a^2+b^2=1$、$u^2+v^2=1$，且 $2+u \geq 1$，所以 $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = 2+u$，$z = v$。从而 $(\rho-2)^2 + z^2 = u^2+v^2 = 1$，像包含于 $\mathcal{T}$。反过来，若 $(x,y,z) \in \mathcal{T}$，则 $|\rho - 2| \leq 1$，故 $\rho \geq 1$。令

$$(a,b) = (x/\rho, y/\rho), \qquad (u,v) = (\rho - 2, z).$$

两对坐标都属于 $S^1$，代回 $H$ 得原点。这些公式还说明定义域中的点能从像点唯一恢复，因此 $H$ 为到 $\mathcal{T}$ 的连续双射。定义域为两个紧圆周之积，因而紧；值域是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，因而 Hausdorff。由紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射判据，$H$ 为同胚。 □

## 8.7 反向粘合与莫比乌斯带

**定义 8.23** (莫比乌斯带的商模型)**.** 在 $[0,1]^2$ 中，对每个 $t \in [0,1]$ 识别 $(0,t)$ 与 $(1,1-t)$，除此以外不增加识别，所得商空间称为莫比乌斯带，记为 $M$。

图 8.5 的左右边箭头反向。左下角与右上角同为 $p$，左上角与右下角同为 $q$。上、下边没有逐点识别；它们的像仅在这两对端点处接合。这一端点关系与环面的四角全部相同不同，必须在指定等价关系时保留。

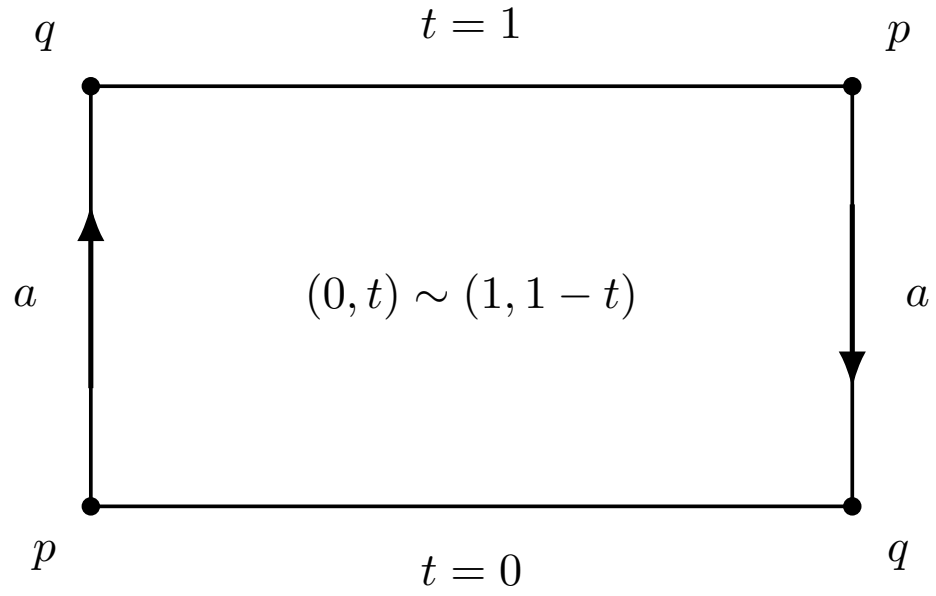



图 8.5: 莫比乌斯带的反向边配对。

**定理 8.24** (莫比乌斯带的三维参数化)**.** 令 $r = t - 1/2$，定义

$$\Phi(s,t) = \big((2 + r\cos\pi s)\cos 2\pi s, (2 + r\cos\pi s)\sin 2\pi s, r\sin\pi s\big).$$

它诱导 $M$ 到 $\Phi([0,1]^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ 的同胚。因此 $M$ 紧、*Hausdorff* 且道路连通。

证明. 各坐标连续，所以 $\Phi$ 连续。在左右边上有

$$\Phi(0,t) = (2 + r, 0, 0), \qquad \Phi(1, 1 - t) = (2 + r, 0, 0),$$

其中第二式使用 $(1 - t) - 1/2 = -r$、$\cos\pi = -1$、$\sin\pi = 0$。因此 $\Phi$ 在每个规定的等价类上为常值。

还需排除额外的识别。若 $\Phi(s,t) = \Phi(s',t') = (x,y,z)$，则

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + r\cos\pi s \geq 3/2 > 0, \qquad (x/\rho, y/\rho) = c(s).$$

对带撇号的参数也有同样两式，所以 $c(s) = c(s')$。若 $s = s'$，由 $(\rho - 2, z) = r(\cos\pi s, \sin\pi s)$，得到

$$r = (\rho - 2)\cos\pi s + z\sin\pi s.$$

因此 $r = r'$，也就是 $t = t'$。若 $s \neq s'$，只能是两个端点；交换两组参数后可设 $s = 0, s' = 1$。此时相同的第一坐标给出 $2 + r = 2 - r'$，即 $r' = -r$、$t' = 1 - t$。故相同像点恰是规定的边配对，没有其他重叠。

由商映射泛性质，$\Phi$ 诱导连续双射 $\bar{\Phi} : M \to \Phi([0,1]^2)$。方形紧且道路连通，商像 $M$ 也紧且道路连通。像子空间 Hausdorff，所以 $\bar{\Phi}$ 由紧到 Hausdorff 的连续双射判据为同胚。这也证明 $M$ Hausdorff。 □

**命题 8.25** (莫比乌斯带的边缘曲线)**.** *方形上、下边在 $M$ 中的像之并同胚于 $S^1$。*

*证明.* 记商投影为 $q:[0,1]^2\to M$，定义

$$\eta(u)=\begin{cases} q(2u,0), & 0\le u\le 1/2,\\ q(2u-1,1), & 1/2\le u\le 1.\end{cases}$$

两段连续，在 $u=1/2$ 处分别取 $q(1,0)$、$q(0,1)$，它们由反向配对相等，故有限闭粘贴保证 $\eta$ 连续。端点满足 $\eta(0)=q(0,0)=q(1,1)=\eta(1)$。在每一条水平边的内部，没有两个不同点被识别；两条水平边的内部也不互相识别。两段在中间的公共值只对应参数 $u=1/2$，而另一对角点只对应 $u=0,1$。所以 $\eta$ 的纤维除了端点对 $\{0,1\}$ 之外均为单点。它遂诱导从端点识别的区间到所述边缘子空间的连续双射。前者同胚于 $S^1$，因而紧；后者为 Hausdorff 空间 $M$ 的子空间。再用紧到 Hausdorff 的连续双射判据，就得到同胚。 □

## 8.8 压缩闭子集与球面

**定义 8.26** (把子集压成一点)**.** 设 $A\subseteq X$ 非空。将 $A$ 的所有点相互识别，而 $X\setminus A$ 中各点只与自身等价，得到商空间 $X/A$。被压缩的等价类记为 $*$。当 $A=\varnothing$ 时，约定 $X/A=X$，不添加新点。

**命题 8.27** (压缩映射的泛性质与分离性)**.** *从 $X/A$ 到 $Z$ 的连续映射，与从 $X$ 到 $Z$ 且在 $A$ 上为常值的连续映射一一对应。若 $X$ 紧且 Hausdorff，$A$ 闭，则 $X/A$ 紧且 Hausdorff。若 $A$ 非空且不闭，则 $X/A$ 不是 $T_1$ 空间。*

*证明.* 当 $A\neq\varnothing$ 时，压缩投影除纤维 $A$ 外的所有纤维都是单点。所以映射在所有纤维上为常值，恰好等价于它在 $A$ 上为常值；商映射泛性质给出唯一连续分解。$A=\varnothing$ 时，投影为恒等映射，结论也成立。

若 $X$ 紧且 Hausdorff、$A$ 闭，则关系集为

$$R=\Delta_X\cup(A\times A).$$

对角线闭，闭集之积闭，有限并也闭。由定理 8.19，商空间紧且 Hausdorff。若 $A$ 非空且不闭，它是点 $*$ 的非闭纤维。由 $T_1$ 纤维判据，$X/A$ 不满足 $T_1$。 □

**例 8.28** (压缩闭区间中的一段)**.** 取 $X=[-2,2]$、$A=[-1/2,1/2]$，定义

$$f(x)=\begin{cases} x+1/2, & -2\le x\le -1/2,\\ 0, & -1/2\le x\le 1/2,\\ x-1/2, & 1/2\le x\le 2.\end{cases}$$

三段在公共端点取值一致，有限闭粘贴保证 $f$ 连续。它满射到 $[-3/2,3/2]$，其非单点纤维恰为 $A$，其他纤维为单点。定义域紧、值域 Hausdorff，故 $f$ 是商映射，诱导 $X/A\cong[-3/2,3/2]$。图 8.6 的粗段整体映到 $0$；虚线只表示这次压缩，不是新加入的区间。

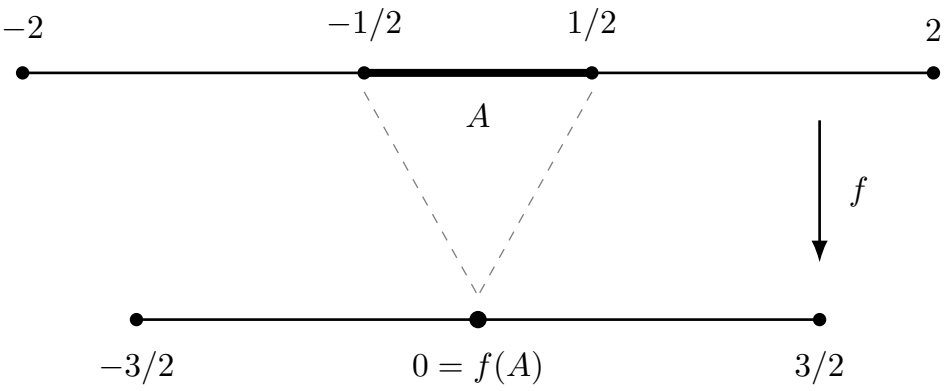



图 8.6: 把一段闭区间压成一点。

**定理 8.29** (闭球边界压缩为球面)**.** 对 $n \geq 1$，记

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}, \qquad \partial D^n = S^{n-1} = \{x : \|x\|_2 = 1\}.$$

则 $D^n/\partial D^n$ 同胚于 $S^n$。

证明. 先核对边界记号。若 $\|x\|_2 < 1$，半径 $1 - \|x\|_2$ 的开球包含于 $D^n$，所以这样的点在内部；若 $\|x\|_2 > 1$，反三角不等式给出避开 $D^n$ 的小开球。若 $\|x\|_2 = 1$，对任意 $\varepsilon > 0$ 取 $0 < h < \min\{\varepsilon, 1\}$，则 $(1-h)x$ 在球内、$(1+h)x$ 在球外，两者与 $x$ 的距离均为 $h$。因此每个邻域都遇到球及其补集，这些点恰构成边界。

对 $x \in D^n$，令 $r = \|x\|_2$、$a = 1 - r$，定义

$$F(x) = \left( \frac{2ax}{a^2 + r^2}, \frac{r^2 - a^2}{a^2 + r^2} \right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

因为

$$a^2 + r^2 = (1-r)^2 + r^2 = 2(r - 1/2)^2 + 1/2 \geq 1/2,$$

公式在整个闭球上都有定义，各坐标连续。又

$$\left\| \frac{2ax}{a^2 + r^2} \right\|_2^2 + \left( \frac{r^2 - a^2}{a^2 + r^2} \right)^2 = \frac{4a^2 r^2 + (r^2 - a^2)^2}{(a^2 + r^2)^2} = 1,$$

所以 $F$ 的值域包含于 $S^n$。当 $r = 1$ 时，$a = 0$，故整个边界都映到北极 $N = (0, \ldots, 0, 1)$。

对 $r < 1$，设 $h(x) = x/(1 - \|x\|_2)$。这个映射把开单位球双射到 $\mathbb{R}^n$，其逆为

$$h^{-1}(v) = \frac{v}{1 + \|v\|_2}.$$

事实上，后者的范数为 $\|v\|_2/(1 + \|v\|_2) < 1$，代入 $h$ 得 $v$；反向代入则利用 $1 + \|h(x)\|_2 = 1/(1-r)$，恢复 $x$。两式的分母都处处正，所以两映射连续。由立体投影定理 4.44 中的逆映射 $\psi$，直接代入可得

$$F(x) = \psi(h(x)) \qquad (r < 1).$$

因此 $F$ 在开球上为到 $S^n \setminus \{N\}$ 的同胚。结合边界映到 $N$，得到 $F$ 为满射，且纤维恰为整条边界和内部的各个单点。

由紧闭球到 Hausdorff 球面的连续满射判据，$F$ 为商映射。它与边界压缩投影具有相同纤维，所以诱导所需同胚。当 $n = 1$ 时，$D^1 = [-1, 1]$ 的边界只有两个端点，上述公式仍然有效。 □

## 8.9 沿映射粘合两个空间

**定义 8.30** (附着空间)**.** 设 $A \subseteq X$，$f : A \to Y$ 连续。在拓扑和 $E = X \sqcup Y$ 中，由关系 $a \sim f(a)$、$a \in A$，生成等价关系，所得商空间记为 $X \cup_f Y$。记商投影为 $q : E \to X \cup_f Y$，两侧的自然映射为 $j_X = q|_X$、$j_Y = q|_Y$。

“生成”表示取包含指定配对的最小等价关系。其等价类可以具体列出：每个 $x \in X \setminus A$ 自成一类；对每个 $y \in Y$，另一类为 $\{y\} \cup f^{-1}(\{y\})$。这确实给出分割且包含所有指定配对；任何包含这些配对的等价关系都必须把这一类内的点识别，故没有遗漏或多加的识别。特别地，$Y$ 的不同点不被相互识别，但 $A$ 中有相同 $f$ 值的点会被识别。

**定理 8.31** (附着空间的映射判据)**.** *给定连续映射 $g_X : X \to Z$、$g_Y : Y \to Z$。存在连续映射 $g : X \cup_f Y \to Z$ 满足 $g \circ j_X = g_X$、$g \circ j_Y = g_Y$，当且仅当*

$$g_X|_A = g_Y \circ f.$$

*存在时这个映射唯一。*

*证明.* 若 $g$ 存在，因 $j_X(a) = j_Y(f(a))$，代入即得相容条件。反过来，在拓扑和上定义 $G|_X = g_X$、$G|_Y = g_Y$。由拓扑和的泛性质，$G : E \to Z$ 连续。相容条件保证它在每个 $\{y\} \cup f^{-1}(\{y\})$ 上取同一个值；单点等价类当然也满足此条件。所以 $G$ 在每根商纤维上为常值，由商映射泛性质得到唯一连续分解 $G = g \circ q$，它的两侧限制正是所需映射。 □

**定理 8.32** (闭子集附着时的嵌入)**.** *若 $A$ 在 $X$ 中闭，则 $j_Y$ 是闭嵌入；$j_X$ 在 $X \setminus A$ 上的限制是到一个开子空间的同胚。若另有 $X, Y$ 紧且 Hausdorff，则附着空间紧且 Hausdorff。*

*证明.* 由等价类的描述，$j_Y$ 单射且连续。若 $F \subseteq Y$ 闭，则

$$q^{-1}(j_Y(F)) \cap X = f^{-1}(F), \qquad q^{-1}(j_Y(F)) \cap Y = F.$$

第一集合在 $A$ 中闭，又因 $A$ 在 $X$ 中闭，所以它在 $X$ 中闭。第二集合在 $Y$ 中闭，因此整个逆像在拓扑和中闭。由商映射闭集判据，$j_Y(F)$ 在附着空间中闭。这说明 $j_Y$ 是闭单射，故为闭嵌入。

$X \setminus A$ 是 $E$ 中的饱和开集，其上的商限制为商映射，且每根纤维是单点，所以该限制为连续双射的商映射。对定义域中的任意开集，其像的逆像就是原集，商条件使像开，故它为同胚。该像在附着空间中开，也由饱和开集判据得到。

最后设 $X, Y$ 紧且 Hausdorff。有限拓扑和 $E$ 紧且 Hausdorff。其关系集在四个积块中的部分依次为

$$\begin{aligned} X \times X:&\quad \Delta_X \cup \{(a, a') \in A^2 : f(a) = f(a')\},\\ X \times Y:&\quad \{(a, f(a)) : a \in A\},\\ Y \times X:&\quad \{(f(a), a) : a \in A\},\\ Y \times Y:&\quad \Delta_Y. \end{aligned}$$

$A$ 是紧空间 $X$ 的闭子集，所以紧。第二个关系片段是连续映射 $a \mapsto (a, f(a))$ 的紧像，在 Hausdorff 空间 $X \times Y$ 中闭；第三个片段由坐标交换也闭。第一块中，$\Delta_X$ 闭，而另外一部分是 $(f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$，先在 $A^2$ 中闭，再因 $A^2$ 在 $X^2$ 中闭而在 $X^2$ 中闭。第四块的对角线闭。四个积块在 $E \times E$ 中均开闭，所以这些片段的有限并在 $E \times E$ 中闭。由紧 Hausdorff 空间上的闭等价关系定理，附着空间紧且 Hausdorff。 □

当 $A \neq \varnothing$、$Y$ 为单点、$f$ 为常映射时，附着空间就是把 $A$ 压成一点的构造。若 $A = \varnothing$，则没有识别，附着空间为 $X \sqcup Y$。一般情形中，$j_X$ 未必是嵌入：若不同的 $a, a' \in A$ 满足 $f(a) = f(a')$，则 $j_X(a) = j_X(a')$，它连单射都不是。

## 8.10 实射影空间的商模型与坐标

**定义 8.33** (实射影空间)**.** 对 $n \geq 1$，在单位球面 $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上识别每对对径点 $u, -u$，所得商空间称为 $n$ 维实射影空间，记为 $\mathbb{RP}^n$。商投影记为 $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$。对非零向量 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$，记 $[x] = \pi(x/\|x\|_2)$。

**定理 8.34** (直线模型与球面模型)**.** *对非零向量 $x, y$，$[x] = [y]$ 当且仅当 $y = \lambda x$，其中 $\lambda \neq 0$。映射*

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n, \qquad p(x) = [x]$$

*是商映射。因此 $\mathbb{RP}^n$ 也可视为过原点的直线之集，并配备相应商拓扑。它紧、Hausdorff 且道路连通，球面商投影 $\pi$ 为开映射。*

*证明.* $[x] = [y]$ 等价于 $y/\|y\|_2 = \pm x/\|x\|_2$，即 $y = \lambda x$，其中 $\lambda = \pm\|y\|_2/\|x\|_2 \neq 0$。反过来，若 $y = \lambda x$，归一化后只相差 $\lambda/|\lambda| = \pm 1$，故两点等价。

归一化映射连续，$p$ 是它与 $\pi$ 的复合，因而连续且满射。若 $p^{-1}(U)$ 在非零向量空间中开，其与 $S^n$ 的交就是 $\pi^{-1}(U)$，在 $S^n$ 中相对开。因为 $\pi$ 是商映射，$U$ 在 $\mathbb{RP}^n$ 中开，故 $p$ 也为商映射。它的纤维恰为每条过原点直线去掉原点后的部分，给出直线模型。

球面紧，其商空间紧。球面上的关系集是 $\Delta_{S^n} \cup \{(u, -u) : u \in S^n\}$。第一部分闭；第二部分是紧球面在连续映射 $u \mapsto (u, -u)$ 下的像，在 Hausdorff 积空间中闭。因此关系集闭，商空间 Hausdorff。对 $n \geq 1$，球面 $S^n$ 道路连通，由命题 7.33，所以射影空间道路连通。最后，对球面中的任意开集 $O$，其饱和化是 $O \cup (-O)$。对径映射是同胚，所以该饱和化开，由开映射的饱和化判据，$\pi$ 为开映射。 □

**定理 8.35** (射影空间的仿射坐标)**.** *用坐标 $x_0, \ldots, x_n$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的向量。对 $0 \leq i \leq n$，令*

$$U_i = \{[x] : x_i \neq 0\}, \qquad \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_i([x]) = (x_j/x_i)_{j \neq i}.$$

*则 $U_i$ 是开集，$\varphi_i$ 是同胚，且 $\bigcup_{i=0}^{n} U_i = \mathbb{RP}^n$。因此射影空间每点都有同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的开邻域，并且第二可数。*

*证明.* 同一非零标量同时乘在所有坐标上，不改变 $x_i$ 是否为零，也不改变各比值，所以 $U_i$ 和 $\varphi_i$ 都与代表元的选择无关。集合 $V_i = \{u \in S^n : u_i \neq 0\}$ 开且饱和，$U_i = \pi(V_i)$，故 $U_i$ 开。球面上的比值映射 $u \mapsto (u_j/u_i)_{j \neq i}$ 连续，它等于 $\varphi_i \circ \pi|_{V_i}$。由饱和开子空间的商限制定理，$\pi|_{V_i} : V_i \to U_i$ 是商映射，再由泛性质，$\varphi_i$ 连续。

给定 $z = (z_j)_{j \neq i} \in \mathbb{R}^n$，令 $w_i = 1$、$w_j = z_j$ 对 $j \neq i$，定义

$$\theta_i(z) = \pi\left(\frac{w}{\|w\|_2}\right) = [w].$$

因为 $w_i = 1$，向量从不为零，归一化及投影均连续，故 $\theta_i$ 连续。比值计算给出 $\varphi_i(\theta_i(z)) = z$。对 $[x] \in U_i$，由比值重建的向量是 $x/x_i$，与 $x$ 为非零倍数，故 $\theta_i(\varphi_i([x])) = [x]$。所以两映射互逆，$\varphi_i$ 为同胚。每个非零向量至少一个坐标非零，因此这些开集覆盖整个射影空间。

为证明第二可数，在每个 $\mathbb{R}^n$ 中取由有理球心、正有理半径组成的可数基 $\mathcal{B}_i$。各 $\varphi_i^{-1}(B)$、$B \in \mathcal{B}_i$，在 $U_i$ 中开，而 $U_i$ 在整个射影空间中开，所以它们也在整个空间中开。有限个可数族的并仍可数。若 $O$ 是射影空间中的开集、$p \in O$，先取含 $p$ 的某个 $U_i$，再在开集 $\varphi_i(O \cap U_i)$ 中选基元 $B$，使 $\varphi_i(p) \in B \subseteq \varphi_i(O \cap U_i)$。于是 $p \in \varphi_i^{-1}(B) \subseteq O$，证明该可数族为全空间的基。 □

图 8.7 画出 $n = 1$ 时的截面。单位圆上两点 $(3/5, 4/5)$、$(-3/5, -4/5)$ 代表同一条直线；该直线与 $y = 1$ 相交于 $(3/4, 1)$，故在 $y \neq 0$ 的坐标图中取值为 $3/4$。图中的虚线是过原点的直线，水平实线是仿射截面，都不是球面中新加的子集。

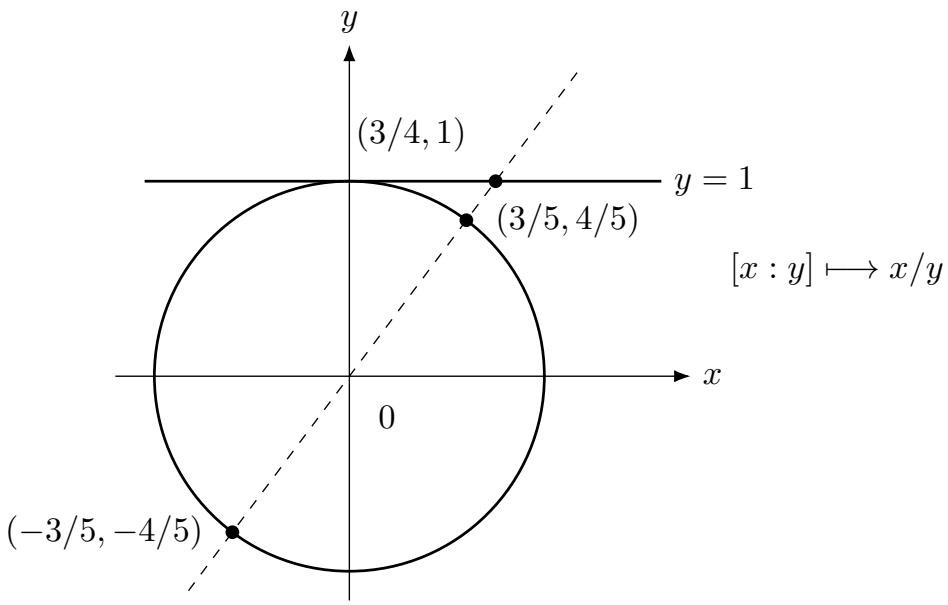



图 8.7: 射影直线的仿射截面。

**命题 8.36** (坐标变换与射影直线)**.** 在 $U_i \cap U_j$、$i \neq j$ 上，记 $z_k = x_k/x_i$、$k \neq i$。从第 $i$ 张图到第 $j$ 张图的坐标变换为

$$z_i' = \frac{1}{z_j}, \qquad z_k' = \frac{z_k}{z_j} \quad (k \neq i, j), \qquad z_j \neq 0.$$

此外，$\mathbb{RP}^1$ 同胚于 $S^1$。

证明. 在交集内 $x_i, x_j \neq 0$，所以 $z_j = x_j/x_i \neq 0$。新坐标的第 $i$ 分量是 $x_i/x_j = 1/z_j$，其他第 $k$ 分量为 $x_k/x_j = (x_k/x_i)/(x_j/x_i) = z_k/z_j$。这证明所写公式，且各分母在定义域上非零，故坐标变换连续。

在 $S^1$ 上定义 $d(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$。由 $(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = 1$，其值域在单位圆中。参数写成 $(u, v) = (\cos\theta, \sin\theta)$ 时，二倍角公式给出 $d(u, v) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，所以 $d$ 满射。两个参数的像相同，当且仅当 $2\theta - 2\theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$，即 $\theta - \theta' \in \pi\mathbb{Z}$，等价于原圆周点相同或互为对径点。因此 $d$ 诱导连续双射 $\mathbb{RP}^1 \to S^1$。射影直线紧，单位圆 Hausdorff，由紧到 Hausdorff 的连续双射判据，这个映射为同胚。 □

# 参考文献


[1] Marcel Berger, *Geometry I*, Springer, 1987.

[2] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd ed., Springer, 2011.

[3] James R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, 2000.

[4] James R. Munkres, MIT OpenCourseWare, *18.901 Introduction to Topology*, Fall 2004. Readings, weeks 7–8, sections 23–29.