分析学讲义

第一册　实数、极限、微积分与测度

说明　本册从有理数的缺口开始，逐步构造实数并建立分析学的完备性基础。本册现包含第一至二十九章：从有序域、确界和 Archimedes 性出发，严格分析有理数的缺口与二分列，再通过 Dedekind 分割完成实数域构造，逐项验证序、确界、加减乘除及域公理，并证明平方根二与一般正整数次根的存在。第三章独立构造有理 Cauchy 列商域，证明其完备性、与分割域的同构及完备有序域唯一性。第四章在一般 Archimedes 有序域中证明七种完备性表述等价，再建立扩充上下极限、子列刻画与误差运算。第五章建立实直线拓扑，补全有限覆盖形式的完备性等价，证明紧性、序列紧性、连通性、Cantor 集与实轴的 Baire 定理。第六章建立数项级数的 Cauchy 判别、正项判别、绝对与条件收敛、Abel/Dirichlet 判别、重排、二重级数换序及 Cauchy 乘积。第七章建立连续函数、介值定理、极值定理与紧集上一致连续性。第八章建立函数列与函数级数的一致收敛、统一 Cauchy 判别、Weierstrass 判别与 Dini 型结论。第九章建立导数、均值定理、单调性、逆函数导数、高阶导数与 Taylor 公式。第十章建立凸性、Jensen 不等式、Cauchy 中值定理、L’ Hôpital 型极限与渐近符号。第十一章从分割和上下和构造 Riemann–Darboux 积分，证明振幅判据、线性保序、连续函数与单调函数可积性。第十二章证明积分的区间可加性、变上限积分的 Lipschitz 控制、微积分基本定理两部分、Newton–Leibniz 公式、积分中值定理、带权中值定理与分部积分。第十三章进一步证明有向换元公式，定义并判别无穷区间与瑕积分，建立比较、绝对收敛和 Dirichlet 判别，并在一致控制下证明参数积分的连续性、参数求导和逐项积分。第十四章进入有限维多元分析，建立欧氏范数、向量列完备性、多元极限与连续性、偏导、方向导数、Fréchet 导数、连续偏导判据与链式法则。第十五章在此基础上严格证明多元 Fermat 定理、二阶与高阶 Taylor 公式、Hessian 的必要与充分判别，并分析退化临界点与鞍点。第十六章从压缩映射不动点定理出发，严格构造局部逆映射，证明有限维逆函数定理与隐函数定理。第十七章证明线性秩标准形、常秩局部标准形、正则水平集的局部参数化、切空间公式以及正则曲线和正则曲面的参数不变性。第十八章在矩形上建立多重 Riemann–Darboux 积分，证明连续函数的多重可积性、矩形取样和判据与 Fubini 定理。第十九章补足 Jordan 内容、边界零内容判据、区域积分和正规区域迭代公式。第二十章从行列式与平行六面体体积因子出发，严格证明可逆线性和仿射变换下的区域积分公式。第二十一章用小盒体线性近似和内容畸变估计证明非线性 C^1 换元公式，并处理极坐标的退化边界。第二十二章从可数盒体覆盖构造 Lebesgue 外测度，建立 Carathéodory 可测性、可数可加性、Borel 集和零测集理论。第二十三章定义可测函数和简单函数积分，构造非负 Lebesgue 积分并证明单调收敛定理。第二十四章补全正部、负部、有符号积分、Fatou 引理、控制收敛定理、L^1 逼近和积分的绝对连续性。第二十五章建立乘积测度的截面理论、Tonelli 定理和绝对可积条件下的 Fubini 定理。第二十六章从 Young 不等式推出 Hölder 与 Minkowski 不等式，证明 L^p 空间的完备性和简单函数稠密性。第二十七章证明 Lebesgue 微分定理，从 Vitali 覆盖与 Hardy–Littlewood 弱型估计出发，严格推出变上限积分几乎处处可导。第二十八章用 L^2 投影与 Riesz 表示证明 Radon–Nikodym 定理和 Lebesgue 分解。第二十九章建立有界变差、Jordan 分解、Stieltjes 测度与绝对连续函数的积分表示，证明 Lebesgue 版微积分基本定理，并用 Cantor 函数说明奇异部分的必要性。

目录

记号与承接 **vi**
本册的证明路线 . . . vi

1 有序域与有理数的缺口 **1**
1.1 先确定我们可以使用什么 . . . 1
1.2 绝对值与误差估计 . . . 3
1.3 上确界是一个存在性问题 . . . 5
1.4 Archimedes 性与有理网格 . . . 6
1.5 平方根二对应的有理缺口 . . . 7
1.6 二分逼近：区间越来越短仍可能没有共同点 . . . 8
1.7 到实数构造的接口 . . . 10

2 Dedekind 分割与完备有序域 **11**
2.1 用有理数的下方集合表示一个数 . . . 11
2.2 包含关系给出全序 . . . 12
2.3 上确界来自并集 . . . 13
2.4 分割两侧可以任意接近 . . . 14
2.5 加法：不仅定义，还要验证封闭 . . . 14
2.6 取负：严格不等号修正端点 . . . 15
2.7 序与加法相容，有理运算得到保留 . . . 16
2.8 非负分割的乘法：定义与封闭性 . . . 17
2.9 非负乘法的三条代数定律 . . . 18
2.10 由非负差表示推广到全部分割 . . . 19
2.11 倒数的构造与域公理的完成 . . . 21
2.12 有理运算在新域中确实保持 . . . 23
2.13 缺口闭合：平方根二现在是一个数 . . . 24
2.14 上确界如何产生一般的正整数次根 . . . 25
2.15 构造完成后的逻辑边界 . . . 26

3 有理 Cauchy 列、两种模型与唯一性 **27**
3.1 先在有理数中说明全部量词 . . . 27
3.2 把误差趋零的近似视为同一对象 . . . 28
3.3 非零类最终远离零 . . . 29
3.4 序必须带有统一的正间隙 . . . 30
3.5 商域的 Cauchy 完备性：一次明确的对角选择 . . . 31
3.6 任意 Archimedes 有序域都映入分割域 . . . 32
3.7 两种构造之间的明确同构 . . . 33
3.8 完备有序域的唯一性究竟是什么意思 . . . 35
3.9 Archimedes 假设不能随意删去 . . . 36

4 数列、完备性等价链与上下极限 **38**
4.1 本章的假设分层 . . . 38
4.2 极限代数与不等式的边界 . . . 39
4.3 子列：严格递增的指标不能省略 . . . 40
4.4 七种完备性表述与证明路线 . . . 41
4.5 从上确界到区间套 . . . 42
4.6 二分选择、收敛子列与 Cauchy 判别 . . . 43
4.7 从 Cauchy 完备恢复上确界 . . . 44
4.8 无限集合的聚点与数列的子列 . . . 45
4.9 扩充实数与尾部确界 . . . 46
4.10 最终成立与无穷多次成立 . . . 47
4.11 上下极限由哪些子列实现 . . . 49

4.12 上下极限的运算与误差控制 50
4.13 从局部误差到整体平均 52

5 实直线的拓扑与紧性 **53**
5.1 从距离到邻域 53
5.2 序列刻画与拓扑闭性 56
5.3 可数邻域基与开集的区间分解 58
5.4 覆盖、紧性与有限化 59
5.5 紧集的基本性质 61
5.6 有限交性质与一致的局部尺度 63
5.7 紧性与序列紧性 64
5.8 连通性与实数区间 65
5.9 Cantor 集：闭区间的递归删除 66
5.10 三进制编码与不可数性 67
5.11 稠密开集的交与 Baire 定理 69
5.12 反例、边界与本章接口 70

6 数项级数与求和次序 **72**
6.1 级数、部分和与余项 72
6.2 几何级数与正项级数 73
6.3 比值、根值与边界现象 74
6.4 绝对收敛与交错级数 75
6.5 分部求和与两个判别法 75
6.6 重排与条件收敛的刚性 76
6.7 二重级数与有限和的极限 77
6.8 Cauchy 乘积与级数运算 78
6.9 本章接口与反例清单 78

7 连续函数与一致连续性 **79**
7.1 函数的极限与连续性 79
7.2 极限与连续性的代数运算 80
7.3 开集、闭集与连续性的拓扑判据 81
7.4 连续函数的局部定量性质 82
7.5 紧集上的连续函数 82
7.6 介值定理与连通性的函数形式 84
7.7 单调连续函数与逆函数 84
7.8 一致连续性的进一步后果 85
7.9 不连续性的模型与本章边界 85

8 函数列与函数级数的一致收敛 **87**
8.1 逐点收敛与一致收敛 87
8.2 一致 Cauchy 判别与函数空间 88
8.3 一致极限的连续性与代数运算 89
8.4 一致收敛的进一步性质 91

9 一元微分学基础 **93**
9.1 导数与线性近似 93
9.2 导数的代数运算与链式法则 94
9.3 局部极值与中值定理 95
9.4 导数的介值性质与反例 97
9.5 高阶导数与 Taylor 公式 97
9.6 假设边界与本章接口 98

10 凸性、L'Hôpital 型极限与渐近估计 **99**
10.1 凸性与割线斜率 99
10.2 凸函数的连续性与极值结构 102
10.3 Cauchy 中值定理 102
10.4 L'Hôpital 型极限 103

10.5 渐近符号与 Taylor 估计 . . . 104
10.6 本章的边界与后续接口 . . . 106

11 Riemann–Darboux 积分 107
11.1 分割与上下和 . . . 107
11.2 可积性的振幅判据 . . . 108
11.3 积分的代数与序性质 . . . 111
11.4 连续函数与单调函数的可积性 . . . 112
11.5 例子与后续接口 . . . 112

12 微积分基本定理与 Newton–Leibniz 公式 113
12.1 有向积分与区间拼接 . . . 113
12.2 积分的估计与变上限函数 . . . 115
12.3 微积分基本定理第一部分 . . . 116
12.4 原函数的唯一性与 Newton–Leibniz 公式 . . . 117
12.5 积分中值定理与基本运算 . . . 118
12.6 分部积分与例子 . . . 120

13 换元、反常积分与参数积分 121
13.1 换元公式 . . . 121
13.2 反常积分的定义与基本判别 . . . 122
13.3 有理幂函数的基础 . . . 124
13.4 条件收敛与 Dirichlet 判别 . . . 125
13.5 参数积分与一致控制 . . . 126
13.6 一致收敛下的积分与级数交换 . . . 127

14 有限维空间中的微分学基础 128
14.1 欧氏空间与范数 . . . 128
14.2 向量列、极限与完备性 . . . 130
14.3 多元函数的连续性与极限 . . . 131
14.4 偏导数、方向导数与 Fréchet 导数 . . . 132
14.5 连续偏导推出可微 . . . 133
14.6 链式法则 . . . 134
14.7 有限维空间的线性映射与坐标刻画 . . . 135
14.8 有限维空间中的紧性与一致连续 . . . 137
14.9 方向导数与 Fréchet 可微性的差别 . . . 137

15 多元函数的极值与 Taylor 公式 139
15.1 算子范数与向量值函数的坐标刻画 . . . 139
15.2 有限维空间的紧性与一致连续性 . . . 140
15.3 多元函数的局部极值 . . . 141
15.4 二阶导数与 Hessian 矩阵 . . . 142
15.5 二阶极值判别 . . . 143
15.6 高阶 Taylor 公式与多重指标 . . . 145

16 逆函数定理与隐函数定理 148
16.1 压缩映射不动点定理 . . . 148
16.2 可逆线性映射的稳定性 . . . 149
16.3 逆函数定理 . . . 151
16.4 隐函数定理 . . . 152

17 秩定理、正则曲线与正则曲面 154
17.1 线性映射的秩分解 . . . 154
17.2 常秩定理 . . . 155
17.3 正则水平集与切空间 . . . 157
17.4 正则曲线 . . . 158
17.5 正则曲面与切平面 . . . 159

18 多重 Riemann 积分与 Fubini 定理 **161**
18.1 盒体分割与体积 . . . 161
18.2 多重 Darboux 积分 . . . 162
18.3 连续函数的可积性 . . . 165
18.4 迭代积分与 Fubini 定理 . . . 166
18.5 例子与区域边界 . . . 168

19 Jordan 区域与区域上的积分 **169**
19.1 Jordan 内容与边界判据 . . . 169
19.2 区域上的 Riemann 积分 . . . 172
19.3 曲线图形的零内容与正规区域 . . . 173

20 多重换元公式：线性与仿射情形 **177**
20.1 行列式的代数性质 . . . 177
20.2 平行六面体与 Jordan 内容 . . . 178
20.3 仿射换元公式 . . . 180

21 多重换元公式：非线性情形 **182**
21.1 导数的线性近似 . . . 182
21.2 小盒体的体积畸变 . . . 183
21.3 局部换元公式 . . . 184
21.4 极坐标换元 . . . 186

22 Lebesgue 外测度与可测集 **187**
22.1 外测度的构造 . . . 187
22.2 Carathéodory 可测性 . . . 189
22.3 开集、闭集与 Borel 集 . . . 190
22.4 零测集与测度的连续性 . . . 191

23 Lebesgue 积分：简单函数与单调收敛 **193**
23.1 可测函数 . . . 193
23.2 简单函数及其积分 . . . 195
23.3 非负 Lebesgue 积分 . . . 197

24 有符号 Lebesgue 积分与收敛定理 **201**
24.1 正部、负部与零测集上的修改 . . . 201
24.2 有符号积分与 L^1 空间 . . . 202
24.3 Fatou 引理 . . . 204
24.4 控制收敛与 L^1 近似 . . . 205

25 乘积测度、Tonelli 定理与 Fubini 定理 **208**
25.1 截面与矩形 . . . 208
25.2 可测集合的截面定理 . . . 209
25.3 Tonelli 定理 . . . 210
25.4 Fubini 定理 . . . 212

26 L^p 空间：Hölder、Minkowski 与完备性 **214**
26.1 凸性与 Young 不等式 . . . 214
26.2 Hölder 不等式 . . . 215
26.3 Minkowski 不等式 . . . 217
26.4 L^p 的完备性 . . . 218

27 Lebesgue 微分定理与积分的局部结构 **220**
27.1 外正则性与连续函数逼近 . . . 220
27.2 Vitali 覆盖与弱型最大不等式 . . . 222
27.3 Lebesgue 微分定理 . . . 224
27.4 变上限积分与一阶基本定理 . . . 225

28 Radon–Nikodym 定理与测度的分解 **227**
28.1 有限测度上的 L^2 表示 227
28.2 有限测度的分解 229
28.3 σ-有限推广与测度密度的例子 232

29 有界变差、绝对连续与 Newton–Leibniz 公式 **233**
29.1 总变差与 Jordan 分解 233
29.2 绝对连续性与变差 234
29.3 连续单调函数的 Stieltjes 测度 235
29.4 绝对连续函数的微分与积分表示 236
29.5 Cantor 函数与奇异部分 238

记号与承接

本册默认使用集合、映射、整数和有理数的基本运算。$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$，$\mathbb{Z}$ 为整数环，$\mathbb{Q}$ 为有理数域。第一章还不把实数当作已经存在的完备域；凡涉及上确界的结论，先明确所在的有序集合。$A\subseteq F$ 允许 $A=F$，而“真子集”写作 $A\subsetneq F$。

本册的证明路线

第一章只在有序域和 $\mathbb{Q}$ 中工作；第二章从有理下集构造实数，第三章以有理 Cauchy 列作独立构造，并证明两种构造的相容性与完备有序域的唯一性。第四章先在一般 Archimedes 有序域中证明完备性等价链，再回到实数域研究上下极限；第五章再接上实直线的紧性、连通性与拓扑。第十一至十三章分别讨论积分基本构造、微积分基本定理及换元与反常积分；第十四至二十一章建立有限维微分、秩定理、多重积分与换元；第二十二至二十六章完成 Lebesgue 测度、积分、Tonelli–Fubini 与 L^p 空间；第二十七至二十九章把积分与微分连接起来，并处理 Radon–Nikodym 密度、有界变差、绝对连续和奇异测度。

本册第一至二十九章已经成文。第二章先完成有序加法群，再构造非负乘法、验证差表示无关性并构造逆元；有序域公理全部成立之后，才将第一章的一般结论用于新域。定理编号服务于依赖追踪；前章引用表示已经可用的结论，章节中的后续安排不充当证明。第四章从单一假设逐箭头证明完备性闭环，不以模型的既有性质代替一般蕴含。第五章在定义开覆盖后才证明 Heine–Borel，不提前借用一般度量空间紧性。第二十七章的微分定理先证明覆盖估计与连续函数逼近，再逐步控制最大函数和误差集合；第二十八、二十九章分别把测度密度和绝对连续函数的积分表示从构造写出。闭性与子集完备性只在实数这个已完备环境中比较；一般离散距离反例另核对距离公理。

本册使用整数的良序性、归纳法与有理数的既约分数表示，作为代数基础。涉及任意族的上确界时，族是一个非空的分割集合；本册的构造不枚举不可数集合。第三章对角构造中每次选择有理近似，可通过固定的有理枚举取第一个合格候选，实现明确选择。第四章从任意无限集合选出可数个不同点时，明确使用通常集合论背景下的依赖选择；不把该子集误写成全体枚举。

文献用于校准概念范围与讲述层次。前四章实际核对的是 Lebl 第 1.1–1.3 节的相关内容：其第 1.2 节将实数存在性列为不证明的结论，而本册第二章补做了构造。以下证明按本册的依赖次序写出；参考书只用于校准概念范围和讲述层次，不替代本册中的证明。第五章另核对该书第 264–270、280–285 页的开闭集、相对拓扑、连通性与紧性。其一般度量空间中的结论在本章按实轴的依赖重新证明；邻域允许不是开集，空集约定为连通，均以本册定义为准。

1 有序域与有理数的缺口

1.1 先确定我们可以使用什么

分析学中的许多证明把不等式、逼近和极限同时写在一行，容易使人忽略它们依赖的前提。本章把这些前提分开：代数运算来自域，大小比较来自序，任意精细的有理网格来自 Archimedes 性，而“满足内部一致性条件的逼近确有落点”需要另一项条件。最后这项条件不能从前三项中省略。有理数将给出完整的反例。

定义 1.1 (域与相容的序)**.** 域是带有加法和乘法的集合 F，满足：加法构成交换群，单位元记作 0；非零元素关于乘法构成交换群，单位元记作 $1 \neq 0$；并且

$$x(y+z) = xy + xz \qquad (x, y, z \in F).$$

若 F 还有一个严格全序 $<$，即满足传递性以及三歧性（$x < y, x = y, y < x$ 恰有一个成立），并满足

$$x < y \Longrightarrow x + z < y + z, \qquad 0 < x,\ 0 < y \Longrightarrow 0 < xy,$$

就称 F 为有序域。记 $x \leq y$ 表示 $x < y$ 或 $x = y$。

这里加法交换群的要求包括结合律、交换律、零元和每个元素的加法逆元；乘法交换群的要求包括结合律、交换律、单位元和每个非零元素的乘法逆元。以下只从这些公理出发，暂不假定上确界存在。

先记录几条代数恒等式。由分配律，

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x;$$

两边加上 $-0x$，得到 $0x = 0$。又有

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0,$$

故 $(-x)y = -(xy)$；再对第二个因子应用同一论证，得到

$$x(-y) = -(xy), \qquad (-x)(-y) = xy.$$

若 $xy = 0$ 且 $x \neq 0$，左乘 x^{-1} 得 $y = 0$。这些恒等式随后会用于符号推导。

命题 1.2 (符号规则)**.** *在任意有序域中，以下结论成立。*

1. $x < y$ *当且仅当* $-y < -x$，*并且* $0 < 1$。
2. *非零元素的平方严格为正；所有平方非负。*
3. $x < y$，$z > 0$ *时* $xz < yz$；$x < y$，$z < 0$ *时* $xz > yz$。
4. $x > 0$ *时* $x^{-1} > 0$；*若* $0 < x < y$，*则* $0 < y^{-1} < x^{-1}$。

证明. 由 $x<y$ 两边同时加 $-x-y$，得到 $-y<-x$。再对后一个不等式作同样操作，得到逆向蕴含。

由于 $1\neq 0$，三歧性给出 $1>0$ 或 $1<0$。假设 $1<0$，取负后有 $-1>0$。两个正数相乘为正，故

$$1=(-1)(-1)>0,$$

这与 $1<0$ 矛盾。因此 $1>0$。这里没有把“平方为正”当作前提。

若 $x\neq 0$，则 $x>0$ 或 $x<0$。前者由序公理给出 $x^2>0$；后者给出 $-x>0$，从而 $x^2=(-x)^2>0$。零的平方是零。

若 $x<y$，则 $y-x>0$。当 $z>0$ 时，$(y-x)z>0$，即 $yz-xz>0$，所以 $xz<yz$。当 $z<0$ 时，$-z>0$，于是 $x(-z)<y(-z)$，即 $-xz<-yz$；取负得到 $xz>yz$。

若 $x>0$，则 $x^{-1}\neq 0$。假如 $x^{-1}<0$，刚证的乘法规则给出 $xx^{-1}<0$，与 $1>0$ 矛盾。故 $x^{-1}>0$。最后，若 $0<x<y$，乘以正数 $x^{-1}y^{-1}$，得到

$$y^{-1}<x^{-1}.$$

两者的正性已经证明。 □

推论 1.3 (非负数的平方比较)**.** *若 $0\leq x<y$，则 $x^2<y^2$。若 $x,y\geq 0$ 且 $x^2<y^2$，则 $x<y$。*

证明. 第一问中 $y-x>0$，且 $y+x>0$，故

$$y^2-x^2=(y-x)(y+x)>0.$$

第二问若 $x=y$，平方相等；若 $x>y$，第一问给出 $x^2>y^2$。这两种可能均被排除，三歧性留下 $x<y$。 □

命题 1.4 (有理数的典范嵌入)**.** *每个有序域都含有一个与 $\mathbb{Q}$ 同构的有序子域。因此可以一致地把整数与有理数看作该域的元素。*

证明. 在 F 中定义 $\bar{n}=1+\cdots+1$（n 项）。由 $1>0$ 和加法相容性，归纳得 $\bar{n}>0$；特别地，它不为零。定义 $\bar{0}=0$、$\overline{-n}=-\bar{n}$。下面核对它保留整数运算。对于非负整数，先固定 m，对 n 归纳。加法在 $n=0$ 时成立；若对 n 成立，则

$$\overline{m+(n+1)}=\overline{(m+n)+1}=\overline{m+n}+1=(\bar{m}+\bar{n})+1=\bar{m}+\overline{n+1}.$$

乘法在 $n=0$ 时两边均为零；若对 n 成立，则

$$\overline{m(n+1)}=\overline{mn+m}=\overline{mn}+\bar{m}=\bar{m}\bar{n}+\bar{m}=\bar{m}(\bar{n}+1).$$

所以两项运算都在非负整数上保留。

对混合符号的加法，写作 $m+(-n)$，其中 $m,n\geq 0$。若 $m\geq n$，令 $k=m-n\geq 0$，由 $m=k+n$ 得 $\bar{m}=\bar{k}+\bar{n}$，所以 $\overline{m-n}=\bar{k}=\bar{m}-\bar{n}$。若 $m<n$，令 $k=n-m>0$，由 $n=m+k$ 得 $\bar{n}=\bar{m}+\bar{k}$，所以 $\overline{m-n}=-\bar{k}=\bar{m}-\bar{n}$。两个负整数相加时，$\overline{(-m)+(-n)}=-\overline{m+n}=-\bar{m}-\bar{n}$。乘法中一个负号由 $(-x)y=-(xy)$ 处理，两个负号由 $(-x)(-y)=xy$ 处理。因此整数映射在全部 $\mathbb{Z}$ 上保留加法与乘法。若 $m<n$，则 $\bar{n}-\bar{m}=\overline{n-m}>0$，所以整数映射保持严格大小，因而单射。

对于 $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$，定义

$$\iota(p/q) = \bar{p}\,\bar{q}^{-1}.$$

如果 $p/q = r/s$，则整数中 $ps = rq$，于是 $\bar{p}\bar{s} = \bar{r}\bar{q}$。乘以 $\bar{q}^{-1}\bar{s}^{-1}$ 表明两种表示给出同一元素。反过来，若两种像相等，乘以 $\bar{q}\bar{s}$，利用整数映射单射，得 $ps = rq$，所以 ι 单射。

通分公式及整数映射的运算性质给出

$$\iota(p/q + r/s) = (\bar{p}\bar{s} + \bar{r}\bar{q})(\bar{q}\bar{s})^{-1} = \iota(p/q) + \iota(r/s),$$
$$\iota((p/q)(r/s)) = \bar{p}\bar{r}(\bar{q}\bar{s})^{-1} = \iota(p/q)\iota(r/s).$$

因 $\bar{q}\bar{s} > 0$，$ps < rq$ 等价于两像的严格不等式。因此像是一个有序子域。 □

例 1.5 (为何复数不能成为有序域)**.** 若某域中有 $i^2 = -1$，则任何相容序都使非零元素 i 的平方为正，故 $-1 > 0$。然而 $1 > 0$ 又使 $-1 < 0$，产生矛盾。问题在于域运算与序不能同时满足定义，而非不能随意给元素排一个顺序。

1.2 绝对值与误差估计

定义 1.6. 对于有序域 F 中的 x，定义

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

命题 1.7 (绝对值的基本性质)**.** 对于 $x, y \in F$，有

$$|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \iff x = 0, \quad |-x| = |x|, \quad |xy| = |x||y|.$$

并且

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

若 $r > 0$，则 $|x| < r$ 等价于 $-r < x < r$；将全部严格不等号改为非严格不等号时，结论对 $r \geq 0$ 也成立。

证明. 当 $x \geq 0$ 时，$|x| = x \geq 0$；当 $x < 0$ 时，$|x| = -x > 0$。因此绝对值为零恰好要求 $x = 0$。对于 $x > 0$，有 $-x < 0$，故 $|-x| = -(-x) = x = |x|$；对于 $x < 0$，$|-x| = -x = |x|$；对于 $x = 0$，两边都是零。

乘积中若任一因子为零，两边都为零。若两者均非零，分别写作

$$x = \sigma|x|, \qquad y = \tau|y|, \qquad \sigma, \tau \in \{1, -1\}.$$

于是 $xy = \sigma\tau|x||y|$。因 $|x||y| > 0$，当 $\sigma\tau = 1$ 时乘积的绝对值是 $|x||y|$；当 $\sigma\tau = -1$ 时取负后也得到 $|x||y|$。

由定义，无论 x 的符号如何，都有 $-|x| \leq x \leq |x|$。对 y 也作此估计，相加得

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

若 $x + y \geq 0$，取右边不等式；若 $x + y < 0$，将左边不等式取负。两种情形都给出三角不等式。

把 $x=(x-y)+y$ 代入三角不等式，得到 $|x|-|y|\le|x-y|$。交换 x,y，利用 $|y-x|=|x-y|$，得到 $|y|-|x|\le|x-y|$。因此

$$-|x-y|\le|x|-|y|\le|x-y|.$$

再按中间项的正负应用绝对值定义，即得反三角不等式。

最后，若 $|x|<r$，则 $-r<-|x|\le x\le|x|<r$。反过来，若 $-r<x<r$，则在 $x\ge0$ 时有 $|x|=x<r$，在 $x<0$ 时有 $|x|=-x<r$。非严格版本的两条推导逐项保留等号即可。 □

推论 1.8 (商的绝对值)**.** *若 $y\neq0$，则*

$$|y^{-1}|=|y|^{-1},\qquad |x/y|=|x|/|y|.$$

证明. 由乘积公式，$1=|1|=|yy^{-1}|=|y||y^{-1}|$。由于 $|y|>0$，乘以 $|y|^{-1}$ 得到第一式。再把 x/y 写成 xy^{-1}，应用乘积公式得到第二式。 □

引理 1.9 (任意小误差的消去)**.** *设 $u,v\in F$。若对每个 $\varepsilon>0$ 都有 $u\le v+\varepsilon$，则 $u\le v$。若对每个 $\varepsilon>0$ 都有 $|u-v|<\varepsilon$，则 $u=v$。*

证明. 第一问若 $u>v$，取正数 $\varepsilon=(u-v)/2$，则 $v+\varepsilon=(u+v)/2<u$，与假设矛盾。第二问若 $u\neq v$，则 $|u-v|>0$；取 $\varepsilon=|u-v|/2$，假设要求一个正数严格小于它自己的一半，不可能成立。 □

此引理不含极限，也不含完备性。关键是误差可在同一个有序域内任意选择。

命题 1.10 (平方与倒数的局部估计)**.** *任意 $x,y\in F$ 满足*

$$|x^2-y^2|\le|x-y|\big(2|y|+|x-y|\big).$$

若 $y\neq0$ 且 $|x-y|<|y|/2$，则 $x\neq0$，并且

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\le\frac{2|x-y|}{|y|^2}.$$

证明. 用 $x+y=(x-y)+2y$，三角不等式给出 $|x+y|\le|x-y|+2|y|$。乘以非负数 $|x-y|$，再用 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$，得到第一式。

反三角不等式给出

$$|x|\ge|y|-|x-y|>|y|/2>0.$$

故 $x\neq0$，而倒数的比较规则给出

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{|x||y|}\le\frac{2|x-y|}{|y|^2}.$$

若分子为正，实际有严格小于；为统一处理 $x=y$，写作非严格不等式。 □

例 1.11 (如何主动选择误差)**.** *给定 $y\in F$ 和 $\varepsilon>0$，取*

$$\delta=\frac{1}{2}\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2|y|+1}\right\}>0.$$

若 $|x-y|<\delta$，则 $|x-y|<1$，所以

$$|x^2-y^2|\le|x-y|(2|y|+|x-y|)<\delta(2|y|+1)\le\varepsilon/2<\varepsilon.$$

选择 δ 中的 1 是为了先约束会变化的因子，另一个约束才负责把最终误差压到目标以内。这里的 min 是两个已知元素中较小的一个，无须调用上确界。

1.3 上确界是一个存在性问题

定义 1.12 (上、下界与确界)**.** 设 S 为全序集合，$A \subseteq S$。若 $u \in S$ 满足 $a \le u$ 对所有 $a \in A$ 成立，称 u 是 A 在 S 中的上界。若 s 是上界，且对每个上界 u 都有 $s \le u$，称 s 为上确界，记为 $\sup_S A$。下界及下确界 $\inf_S A$ 通过反向不等式定义。若 $m \in A$ 且 $a \le m$ 对所有 $a \in A$ 成立，则 m 是最大元，记为 $\max A$。最小元定义对偶。

上确界的定义包含两件不同的事：它本身必须是上界，且任何更小的数都不能继续作上界。只验证“上方还有数”，无法得到最小的那个上界。

命题 1.13 (唯一性与序刻画)**.** *上确界若存在，则唯一。对于非空 $A \subseteq S$，$s = \sup_S A$ 当且仅当：*

1. *$a \le s$ 对每个 $a \in A$ 成立；*
2. *对每个 $t \in S$ 且 $t < s$，存在 $a \in A$ 使 $t < a$。*

若 $S = F$ 是有序域，第二项等价于

$$\text{对每个}\varepsilon > 0,\quad \text{存在}a \in A \text{ 使}s - \varepsilon < a \le s.$$

证明. 若 s, s' 均为上确界，则分别利用对方是上界，得到 $s \le s'$ 和 $s' \le s$，故 $s = s'$。

若 s 是上确界而 $t < s$，则 t 不能是上界；否则最小性将给出 $s \le t$。不是上界就意味着存在 $a \in A$ 不满足 $a \le t$，全序性使 $t < a$。反过来，设两项成立。对于任一上界 u，若 $u < s$，第二项给出 $a > u$，与上界定义矛盾。故 $s \le u$，这证明最小性。

在有序域中，对第二项取 $t = s - \varepsilon$ 可得误差形式。由误差形式出发，对任意 $t < s$ 取 $\varepsilon = s - t > 0$，又得到第二项。 □

命题 1.14 (有限集与最大元)**.** *任何非空有限全序集都有最大元和最小元。若 A 有最大元，则它就是 A 的上确界。*

证明. 单元素集的唯一元素就是最大元。若 n 个元素构成的集合已有最大元 m，加入元素 b 后，比较 m, b，取两者中较大者；它支配原有所有元素，也支配新元素。归纳即得有限集的结论。将每次比较改取较小者，得到最小元。

若 $m = \max A$，则它是上界；任意上界 u 必须支配 A 中的元素 m，故 $m \le u$，于是 $m = \sup A$。 □

例 1.15 (确界、端点与环境)**.** 在 $\mathbb{Q}$ 中，集合 $A = \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q < 1\}$ 的上确界是 1。它是上界；若 $t < 1$，则 $t < 0$ 时可取 $a = 1/2$，而 $0 \le t < 1$ 时可取 $a = (t+1)/2$，两种情形都有 $t < a < 1$。但 A 没有最大元，因为对每个 $a \in A$，$(a+1)/2$ 仍属于 A 且更大。

同一集合若被看成全序集合 $S = A$ 的子集，则它在 S 中连上界也没有：任何候选 $u \in S$ 都被 $(u+1)/2$ 超过。所以不写环境的确界记号，只能在环境已经明确时使用。

空集的每个元素 $u \in F$ 都是它的上界，但有序域没有最小元素，因为 $u - 1 < u$。故空集在 F 中没有上确界。本册的完备性条件会明确要求集合非空。

命题 1.16 (确界的代数运算)**.** *设 A, B 是有序域 F 的非空子集，并且上确界 $s = \sup A$，$t = \sup B$ 已经存在。对于 $c \in F$、$\lambda > 0$，定义*

$$A + c = \{a + c : a \in A\},\quad \lambda A = \{\lambda a : a \in A\},\quad A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

则相应确界存在，且

$$\sup(A+c)=s+c,\quad \sup(\lambda A)=\lambda s,\quad \sup(A+B)=s+t,\quad \inf(-A)=-s.$$

证明. 对于每个 $a\in A$，有 $a+c\le s+c$，故 $s+c$ 是平移集合的上界。若 u 也是上界，则 $a\le u-c$ 对所有 $a\in A$ 成立，所以 $s\le u-c$，从而 $s+c\le u$。

正数乘法保持不等号，故 λs 是 λA 的上界。若 u 也是上界，乘以 $\lambda^{-1}>0$，得 $a\le u/\lambda$；最小性给出 $s\le u/\lambda$，故 $\lambda s\le u$。

对于和集，每个 $a+b\le s+t$。给定 $\varepsilon>0$，由确界刻画选择

$$a>s-\varepsilon/2,\qquad b>t-\varepsilon/2.$$

于是 $a+b>s+t-\varepsilon$。因此 $s+t$ 满足命题 1.13 的两项条件。

最后，由 $a\le s$ 得 $-a\ge -s$，故 $-s$ 是 $-A$ 的下界。若 ℓ 是另一个下界，则 $\ell\le -a$ 给出 $a\le -\ell$。所以 $s\le -\ell$，即 $\ell\le -s$，证明它是最大下界。 □

这些公式并未证明所有有界集合都有确界；它们只把已存在的确界传递给特定的新集合。对于负系数 $\lambda<0$，若 $\inf A$ 存在，先对 $-A$ 应用取负公式，再乘以 $-\lambda>0$，可得

$$\sup(\lambda A)=\lambda\inf A.$$

这里不能把右边的 $\inf A$ 不加条件地写成某个预先存在的数。

1.4 Archimedes 性与有理网格

定义 1.17. 有序域 F 称为 Archimedes 有序域，如果自然数在 F 中没有上界，即对每个 $x\in F$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $n>x$。

例 1.18 (有理数具有 Archimedes 性)**.** 若 $x=a/b\in\mathbb{Q}$，其中 $a\in\mathbb{Z}$，$b\in\mathbb{N}$，则

$$x\le |a|/b\le |a|<|a|+b.$$

取自然数 $n=|a|+b$，便有 $n>x$。这项证明只使用整数运算和大小比较，没有使用实数。

定理 1.19 (Archimedes 性的等价表述)**.** 对于有序域 F，下列条件等价。

(i) 自然数在 F 中无上界。

(ii) 对每个 $x>0$ 和 $y\in F$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $nx>y$。

(iii) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $0<1/n<\varepsilon$。

(iv) 每个 $x\in F$ 都有唯一整数部分：存在唯一 $m\in\mathbb{Z}$ 使 $m\le x<m+1$。

(v) $\mathbb{Q}$ 在 F 中序稠密：若 $x<y$，存在 $q\in\mathbb{Q}$ 使 $x<q<y$。

证明. (i) 推出 (ii)：对 y/x 使用 (i)，取 $n>y/x$，乘以 $x>0$ 得 $nx>y$。(ii) 中取 $x=1$，又得 (i)。

(i) 推出 (iii)：取 $n>1/\varepsilon$，倒数规则给出 $1/n<\varepsilon$。(iii) 推出 (i)：给定 $x\in F$，对正数 $\varepsilon=1/(|x|+1)$ 使用 (iii)，则

$$1/n<1/(|x|+1)\quad\Longrightarrow\quad n>|x|+1>x.$$

(i) 推出 (iv)：先选自然数 $L > |x| + 1$，所以 $x + L > 0$。集合

$$E = \{k \in \mathbb{N} : k > x + L\}$$

由 (i) 非空；由自然数的良序性，它有最小元 k。若 $k > 1$，最小性给出 $k - 1 \le x + L$；若 $k = 1$，则 $k - 1 = 0 < x + L$，同一不等式仍成立。因此

$$k - 1 \le x + L < k.$$

取 $m = k - 1 - L \in \mathbb{Z}$，得到 $m \le x < m + 1$。若 m' 也满足此条件，且 $m < m'$，整数的离散性给出 $m + 1 \le m' \le x$，与 $x < m + 1$ 矛盾；$m' < m$ 的反向情形通过交换二者得到同样矛盾，故唯一。反过来，(iv) 应用于 $|x|$ 得整数 $m \ge 0$，自然数 $m + 1 > |x| \ge x$，于是 (i) 成立。

现在由 (i) 推出 (v)。给定 $x < y$，由 (iii) 取 n 使 $1/n < y - x$，由 (iv) 取 $m \le nx < m + 1$。令 $q = (m + 1)/n$，则

$$x < q \le x + 1/n < y.$$

最后由 (v) 推出 (iii)。给定 $\varepsilon > 0$，取有理数 q 满足 $0 < q < \varepsilon$。写作 $q = p/n$，其中 $p, n \in \mathbb{N}$。由 $p \ge 1$，有 $0 < 1/n \le q < \varepsilon$，所以 (iii) 成立。至此所有条件连成闭环。 □

注 1.20. 整数部分的证明使用的是自然数的良序性，不是任意实数集合的最小元原理。两者不能混淆。另一方面，在 $\mathbb{Q}$ 内部，任意 $x < y$ 的中点 $(x + y)/2$ 都在两者之间；而定理中的稠密性要求用有理数夹住整个 F 中的任意两个元素，内容更强。

推论 1.21 (统一网格与趋小的二进分数)**.** *在 Archimedes 有序域中，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使每个 $n \ge N$ 都满足 $2^{-n} < \varepsilon$。给定 $x \in F$ 和 $n \in \mathbb{N}$，还存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使*

$$\frac{k}{2^n} \le x < \frac{k + 1}{2^n}.$$

证明. 归纳证明 $2^n \ge n + 1$：$n = 1$ 时等号成立；若对 n 成立，则 $2^{n+1} \ge 2(n + 1) \ge n + 2$。由定理 1.19 选 N 使 $1/N < \varepsilon$。当 $n \ge N$ 时，$2^{-n} \le 1/(n + 1) < 1/N < \varepsilon$。第二问对 $2^n x$ 取整数部分 k，再除以 $2^n > 0$ 即得。 □

1.5 平方根二对应的有理缺口

定理 1.22. *不存在 $q \in \mathbb{Q}$ 满足 $q^2 = 2$。*

证明. 若这样的 q 存在，把 $|q|$ 写成既约分数 m/n，其中 $m, n \in \mathbb{N}$，则 $m^2 = 2n^2$，所以 m^2 为偶数。若 m 是奇数，写作 $m = 2k + 1$，则

$$m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

为奇数，矛盾。因此 $m = 2r$ 为偶数。代入得 $4r^2 = 2n^2$，故 $n^2 = 2r^2$；同一奇偶计算说明 n 也为偶数。于是 m, n 有公因子 2，与既约性矛盾。 □

仅有这个定理，还不足以证明某个有理集合没有上确界。必须继续验证：上确界若存在，会被迫落在这个缺口。

引理 1.23 (缺口两侧都可以移动)**.** *1. 若 $s \in \mathbb{Q}$，$s \ge 0$，$s^2 < 2$，则存在 $a \in \mathbb{Q}$ 满足 $a > s$ 且 $a^2 < 2$。*

2. 若 $s\in\mathbb{Q}$, $s>0$, $s^2>2$，则存在 $b\in\mathbb{Q}$ 满足 $0<b<s$ 且 $b^2>2$。

证明. 第一问记 $d=2-s^2>0$，明确取

$$h=\frac{1}{2}\min\left\{1,\frac{d}{2s+1}\right\},\qquad a=s+h.$$

所有数都是有理数，且 $0<h<1$, $h<d/(2s+1)$。因此

$$a^2=s^2+2sh+h^2<s^2+(2s+1)h<s^2+d=2.$$

这里的第一条严格不等式来自 $h^2<h$，即使 $s=0$ 也成立。

第二问取

$$h=\frac{s^2-2}{2s}>0,\qquad b=s-h=\frac{s^2+2}{2s}>0.$$

由于 $h>0$，有 $b<s$；而

$$b^2=(s-h)^2=s^2-2sh+h^2=2+h^2>2.$$

这也解释了为何上侧的移动不会跨过缺口。 □

定理 1.24 (非空有界却没有有理上确界)**.** *集合*

$$A=\{q\in\mathbb{Q}:q\geq 0,\ q^2<2\}$$

在 $\mathbb{Q}$ 中非空且有上界，却在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界。它的全部有理上界恰为

$$B=\{q\in\mathbb{Q}:q>0,\ q^2>2\}.$$

集合 A 没有最大元，B 没有最小元。

证明. $1\in A$，故非空。若 $a\in A$ 且 $a\geq 2$，平方比较给出 $a^2\geq 4$，矛盾。因此 2 是上界。

若 $b\in B$，对于 $a\in A$，不可能有 $a\geq b$，因为那会导致 $a^2\geq b^2>2$。故每个 $b\in B$ 都是 A 的上界。反过来，若 $u\in\mathbb{Q}$ 是上界，则 $u\geq 1>0$。定理 1.22 排除 $u^2=2$；若 $u^2<2$，引理 1.23 的第一问给出 $a>u$, $a\in A$，违反上界条件。故 $u^2>2$，即 $u\in B$。

对每个 $a\in A$，引理的第一问给出更大的 A 中元素，因此没有最大元。对每个 $b\in B$，第二问给出更小的 B 中元素，因此没有最小元。而 A 的上确界若属于 $\mathbb{Q}$，必须是所有有理上界组成的集合 B 的最小元。这个最小元不存在，故有理上确界不存在。 □

注 1.25 (两个不同层次的结论)**.** “某个方程没有有理解”是代数陈述；“某个非空有界集没有有理上确界”是序结构的陈述。上面的移动引理建立了两者之间必需的桥梁。后文构造实数时，我们会把缺口本身表示成一个新对象，而不是预先在数轴上标一个未经构造的 $\sqrt{2}$。

1.6 二分逼近：区间越来越短仍可能没有共同点

从 $a_0=1$, $b_0=2$ 出发，递归定义有理数

$$m_n=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad (a_{n+1},b_{n+1})=\begin{cases}(m_n,b_n), & m_n^2<2,\\ (a_n,m_n), & m_n^2>2.\end{cases}$$

定理 1.22 排除了等号，故每一步恰有一个分支适用。这一递归只涉及有理运算和比较。

命题 1.26 (递归不变量)**.** 对每个整数 $n \ge 0$，有

$$1 \le a_n < b_n \le 2, \qquad a_n^2 < 2 < b_n^2, \qquad b_n - a_n = 2^{-n}.$$

且 $a_n \le a_{n+1}$、$b_{n+1} \le b_n$。对任意 $m \ge n$，有

$$a_n \le a_m < b_m \le b_n.$$

证明. $n = 0$ 时直接代入 $1, 2$ 验证。假设对 n 成立，则中点满足 $a_n < m_n < b_n$。若 $m_n^2 < 2$，新区间的左端点为 m_n，右端点为 b_n，两端平方仍位于 2 两侧；若 $m_n^2 > 2$，保留 a_n 并把右端点改成 m_n，平方不等式也保留。两种分支均包含于旧区间，且长度分别为

$$b_n - m_n = (b_n - a_n)/2, \qquad m_n - a_n = (b_n - a_n)/2.$$

所以新区间长度为 $2^{-(n+1)}$。归纳证明所有不变量。反复使用 $a_k \le a_{k+1} < b_{k+1} \le b_k$，从 $k = n$ 推至 $m - 1$，便得到最后的嵌套关系。 □

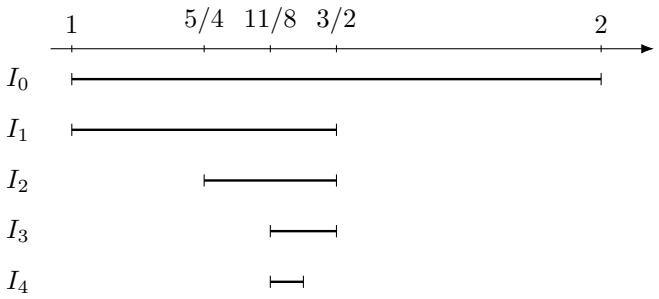


图 1.1: 前五个有理闭区间，横坐标按有理距离绘制。$I_4 = [11/8, 23/16]$。图中不预设缺口已有一个实数坐标。

n	a_n	b_n	决定下一步的中点与平方比较
0	1	2	$(3/2)^2 = 9/4 > 2$
1	1	3/2	$(5/4)^2 = 25/16 < 2$
2	5/4	3/2	$(11/8)^2 = 121/64 < 2$
3	11/8	3/2	$(23/16)^2 = 529/256 > 2$
4	11/8	23/16	$(45/32)^2 = 2025/1024 < 2$

定义 1.27 (只在有理数中的收敛与 Cauchy 条件)**.** 有理数列 (x_n) 称为收敛到 $q \in \mathbb{Q}$，若对每个有理数 $\varepsilon > 0$，存在整数 $N \ge 0$，使每个 $n \ge N$ 都有 $|x_n - q| < \varepsilon$。它称为有理 Cauchy 列，若对每个有理数 $\varepsilon > 0$，存在 N，使每个 $m, n \ge N$ 都有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$。

这里先引入两个局部定义以准确描述反例；一般实数列理论将在第四章统一建立。第二个条件没有指定一个候选落点。

定理 1.28 (二分列的有理障碍)**.** 上面构造的 a_n, b_n 满足：

1. 两列都是有理 *Cauchy* 列，且 $b_n - a_n$ 任意小。
2. 有理闭区间 $[a_n, b_n]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : a_n \le q \le b_n\}$ 的交集为空。
3. 两列都不收敛到任何有理数。

证明. 给定有理 $\varepsilon > 0$，由推论 1.21 选 N 使 $2^{-N} < \varepsilon$。若 $m \ge n \ge N$，嵌套性给出

$$0 \le a_m - a_n \le b_n - a_n = 2^{-n} \le 2^{-N} < \varepsilon,$$

也给出

$$0 \le b_n - b_m \le b_n - a_n < \varepsilon.$$

若 $n \ge m$，交换指标后绝对值保持不变，仍得所需估计。并且对于 $n \ge N$，两列同指标之差也是 $2^{-n} < \varepsilon$。这证明第一项。

假设有 $q \in \mathbb{Q}$ 属于所有区间。我们将证明 $q = \sup_{\mathbb{Q}} A$，与定理 1.24 矛盾。先设存在 $a \in A$ 满足 $a > q$。取 n 使 $2^{-n} < a - q$，由于 $a_n \le q$，有

$$b_n = a_n + 2^{-n} \le q + 2^{-n} < a.$$

然而 $b_n \in B$ 是 A 的上界，不可能小于 $a \in A$。故 q 是 A 的上界。再设 $u \in \mathbb{Q}$ 是上界但 $u < q$。取 n 使 $2^{-n} < q - u$，由于 $b_n \ge q$，有

$$a_n = b_n - 2^{-n} \ge q - 2^{-n} > u.$$

这与 $a_n \in A$ 矛盾。因此 q 不大于任何上界，确实是有理上确界，矛盾。第二项得证。

若 a_n 收敛到某个 $q \in \mathbb{Q}$，固定任意 $k \ge 0$。所有 $n \ge k$ 都满足 $a_k \le a_n \le b_k$。若 $q < a_k$，取 $\varepsilon = (a_k - q)/2$，则充分大的 n 应有 $a_n < q + \varepsilon < a_k$，矛盾。若 $q > b_k$，取 $\varepsilon = (q - b_k)/2$，则充分大的 n 应有 $a_n > q - \varepsilon > b_k$，矛盾。所以 $a_k \le q \le b_k$。由于 k 任意，q 属于所有区间，违反第二项。

若 b_n 收敛到有理数 q，仍固定 k。对于 $n \ge k$，同样有 $a_k \le b_n \le b_k$。当 $q < a_k$ 时用 $\varepsilon = (a_k - q)/2$ 排除，当 $q > b_k$ 时用 $\varepsilon = (q - b_k)/2$ 排除，故又得到所有 k 上的 $a_k \le q \le b_k$，再次违反第二项。 □

注 1.29. 二分算法是否恰好命中目标，与目标是否有理是不同问题。例如在区间 $[0,1]$ 上对 $1/3$ 作中点比较，每个生成的端点与中点都是形如 $k/2^n$ 的二进有理数。若 $k/2^n = 1/3$，则 $3k = 2^n$，但 2^n 不含素因子 3，所以永远不会命中。不能把“不在有限步停止”当作无理性的判别。

1.7 到实数构造的接口

本章已经展示三个事实：$\mathbb{Q}$ 有相容的域运算，具有 Archimedes 性，并且允许任意细的有理网格；但这些性质没有保证所有非空有界集都有上确界，也没有保证所有 Cauchy 列收敛。后二者在一般有序域中的关系，要等明确假设后才能讨论。

下一章把缺口表示成有理下集，以包含关系确定大小，以并集构造上确界，再逐步定义运算。分割必须有统一的端点约定，有理数的嵌入必须保持原来的序与运算，每一项新运算都要验证封闭性和相应公理。只有乘除法也验证完毕后，才能称所得结构为完备有序域。

2 Dedekind 分割与完备有序域

2.1 用有理数的下方集合表示一个数

本章暂时把新对象的全体记为 $\mathcal{D}$。直到域运算验证完毕，我们不把“它是实数域”当作已知结论。构造材料只有 $\mathbb{Q}$，因此每个集合的成员仍是有理数。

定义 2.1 (Dedekind 分割)**.** 集合 $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ 称为一个分割，如果满足：

(D1) $\alpha \neq \varnothing$ 且 $\alpha \neq \mathbb{Q}$；

(D2) 向下封闭：若 $a \in \alpha$，$r \in \mathbb{Q}$，$r < a$，则 $r \in \alpha$；

(D3) 没有最大元：每个 $a \in \alpha$ 都有 $a' \in \alpha$ 使 $a < a'$。

记所有分割组成的集合为 $\mathcal{D}$。

引理 2.2 (两侧的严格分离)**.** *若 $\alpha \in \mathcal{D}$，$a \in \alpha$，$b \notin \alpha$，则 $a < b$。其补集向上封闭：若 $b \notin \alpha$，$c > b$，则 $c \notin \alpha$。*

证明. 由于 $a \in \alpha$，$b \notin \alpha$，不能有 $a = b$。如果 $b < a$，向下封闭性又给出 $b \in \alpha$，矛盾。因此 $a < b$。若 $c > b$ 但 $c \in \alpha$，则向下封闭性使 $b \in \alpha$，又矛盾。 □

例 2.3 (有理数对应的分割)**.** 对每个 $q \in \mathbb{Q}$，定义

$$q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}.$$

其中 $q - 1 \in q^*$ 而 $q \notin q^*$，故非空且真包含于 $\mathbb{Q}$。若 $r < a < q$，则 $r < q$，故向下封闭。若 $a < q$，中点 $(a + q)/2$ 严格位于 a, q 之间，故属于 q^* 且大于 a。因此 q^* 是分割。

为什么要求没有最大元？如果同时允许 $\{r : r < q\}$ 和 $\{r : r \leq q\}$，同一个有理端点会出现两种表示。我们的约定统一把端点放在右侧。对于没有有理端点的缺口，这项约定仍然适用，而不要求提前命名缺失的数。

例 2.4 (平方根二缺口的集合表示)**.** 定义

$$\alpha_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0，\ 或 r \geq 0 \text{ 且} r^2 < 2\}.$$

它包含 0，但不包含 2，满足 (D1)。若 $a \in \alpha_2$，$r < a$，当 $r < 0$ 时已经属于该集合；当 $r \geq 0$ 时，必有 $0 \leq r < a$，由平方比较得到 $r^2 < a^2 < 2$，故仍在集合内。这证明 (D2)。

若 $a < 0$，则 $a < a/2 < 0$，所以有更大的集合内元素。若 $a \geq 0$，则由引理 1.23 的第一问可选更大的非负有理数，平方仍小于 2。所以 (D3) 成立。

这个分割不等于任何 q^*。假设 $\alpha_2 = q^*$。由于 $1 \in \alpha_2$，有 $q > 1$。若 $a \in A = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0,\ r^2 < 2\}$，则 $a \in q^*$，所以 $a < q$，即 q 是 A 的有理上界。若 $u < q$，取

$$r = \frac{\max\{u, 0\} + q}{2};$$

因 $q > 1$，有 $0 < r < q$，$r > u$。于是 $r \in q^* = \alpha_2$，且 $r > 0$，故 $r \in A$。这说明任何 $u < q$ 都不是上界，因而 $q = \sup_{\mathbb{Q}} A$，与定理 1.24 矛盾。

注 2.5. 我们已经得到一个不来自有理数的分割对象。此时还没有定义分割的乘法，因此尚不能写下并证明 $\alpha_2^2 = 2^*$。把集合构造成功与把代数关系验证成功分开，是避免循环论证的必要步骤。

2.2 包含关系给出全序

定义 2.6. 对于 $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$，定义

$$\alpha \le \beta \iff \alpha \subseteq \beta, \qquad \alpha < \beta \iff \alpha \subsetneq \beta.$$

定理 2.7 (分割的全序与有理嵌入)**.** *上述关系使 $\mathcal{D}$ 成为全序集合。映射 $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{D}$, $q \longmapsto q^*$ 是保持并反映严格大小的单射，即*

$$p < q \iff p^* < q^*.$$

证明. 集合包含具有自反性、传递性和反对称性。只需验证任意两个分割可以比较。若 $\alpha \not\subseteq \beta$，选 $r \in \alpha \setminus \beta$。对任意 $b \in \beta$，引理 2.2 给出 $b < r$；由 $r \in \alpha$ 和向下封闭性，得到 $b \in \alpha$。所以 $\beta \subseteq \alpha$，且 r 说明包含严格。故任意两个分割不是 $\alpha \subseteq \beta$，就是 $\beta \subsetneq \alpha$。

若 $p < q$，则每个 $r < p$ 也有 $r < q$，所以 $p^* \subseteq q^*$；而 $p \in q^* \setminus p^*$，说明严格包含。反过来，若 $p^* < q^*$，则不能有 $p = q$，也不能有 $q < p$，因为后者将推出 $q^* < p^*$，与已知严格包含冲突。故 $p < q$。特别地，不同有理数有不同像，映射单射。 □

引理 2.8 (有理端点的判断规则)**.** *对于 $\alpha \in \mathcal{D}$, $q \in \mathbb{Q}$，有*

$$q^* < \alpha \iff q \in \alpha, \qquad \alpha \le q^* \iff q \notin \alpha.$$

证明. 若 $q \in \alpha$，向下封闭性使 $q^* \subseteq \alpha$，而 $q \notin q^*$，所以严格包含。若 $q^* < \alpha$，选 $r \in \alpha \setminus q^*$，则 $r \ge q$；当 $r = q$ 时结论已得，当 $r > q$ 时由向下封闭性得到 $q \in \alpha$。

若 $\alpha \le q^*$，则 $q \notin q^*$ 使 $q \notin \alpha$。若 $q \notin \alpha$，对于每个 $a \in \alpha$，分离引理给出 $a < q$，故 $a \in q^*$，即 $\alpha \le q^*$。 □

命题 2.9 (分割之间有有理分割)**.** *若 $\alpha < \beta$，则存在 $q \in \mathbb{Q}$ 使*

$$\alpha < q^* < \beta.$$

证明. 选择 $r \in \beta \setminus \alpha$。因为 β 没有最大元，可以再取 $s \in \beta$ 满足 $s > r$。令 $q = (r+s)/2$，则 $r < q < s$。任意 $a \in \alpha$ 都满足 $a < r < q$，故 $\alpha \subseteq q^*$。而 $r \in q^* \setminus \alpha$，所以前一包含严格。任意 $t \in q^*$ 满足 $t < q < s$，因 $s \in \beta$，向下封闭性使 $t \in \beta$，故 $q^* \subseteq \beta$。最后 $s \in \beta \setminus q^*$，说明后一包含也严格。 □

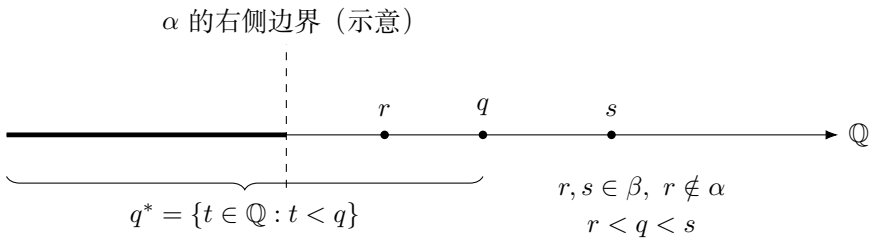


图 2.1: 有理分割插入的证明结构。虚线只表示下集边界，不表示边界已是一个有理数。

2.3 上确界来自并集

定理 2.10 (分割序的上确界性质)**.** *设 $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{D}$ 非空，并且在分割序中有上界。那么*

$$\sigma = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} \alpha$$

是分割，且 $\sigma = \sup_{\mathcal{D}} \mathscr{A}$。

证明. 先验证它属于 $\mathcal{D}$，不能仅凭并集记号认定它是一个数。

因为 $\mathscr{A} \neq \varnothing$，选 $\alpha_0 \in \mathscr{A}$；再因 $\alpha_0 \neq \varnothing$，选 $a_0 \in \alpha_0$，于是 $a_0 \in \sigma$，故 $\sigma \neq \varnothing$。令 $\gamma \in \mathcal{D}$ 是这族分割的一个上界，则每个 $\alpha \in \mathscr{A}$ 都满足 $\alpha \subseteq \gamma$，所以 $\sigma \subseteq \gamma \neq \mathbb{Q}$。因此 $\sigma \neq \mathbb{Q}$。

若 $a \in \sigma$, $r < a$, 则按并集定义，某个 $\alpha \in \mathscr{A}$ 含有 a。该分割向下封闭，故 $r \in \alpha \subseteq \sigma$。所以 σ 向下封闭。对于同一个 $a \in \alpha$，又因 α 没有最大元，可选 $a' \in \alpha$ 使 $a' > a$。于是 $a' \in \sigma$，证明 σ 没有最大元。三项条件全部成立。

每个 $\alpha \in \mathscr{A}$ 都包含于 σ，所以 σ 是上界。如果 η 是另一个上界，则每个 $\alpha \subseteq \eta$，并集也包含于 η，即 $\sigma \leq \eta$。故 σ 是最小上界。 □

注 2.11 (这个证明使用了什么)**.** 这里没有使用实数极限、单调收敛或区间套定理。非空性保证并集非空，有上界保证并集仍是真子集，而“没有最大元”由每个成员继承。三个检验分别对应分割定义中的三个条件，没有哪一个可以由“画图可见”代替。

命题 2.12 (下确界与交集的端点修正)**.** *设 $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{D}$ 非空且有下界。令*

$$T = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} \alpha, \qquad \tau = \{q \in \mathbb{Q} : \text{存在} r \in T \text{ 使} q < r\}.$$

则 $\tau \in \mathcal{D}$，且 $\tau = \inf_{\mathcal{D}} \mathscr{A}$。

证明. 若 $\lambda \in \mathcal{D}$ 是下界，则 $\lambda \subseteq T$。取 $a \in \lambda$，有理数 $a - 1 < a$ 因而属于 τ，故 τ 非空。由 $\mathscr{A} \neq \varnothing$ 可取 $\alpha_0 \in \mathscr{A}$；$T \subseteq \alpha_0$。如果 $q \in \tau$，存在 $r \in T \subseteq \alpha_0$ 使 $q < r$，向下封闭性给出 $q \in \alpha_0$，所以 $\tau \subseteq \alpha_0 \neq \mathbb{Q}$。若 $p < q \in \tau$，沿用 $q < r \in T$，得 $p < r$，故 $p \in \tau$。若 $q \in \tau$ 且 $q < r \in T$，中点 $u = (q + r)/2$ 满足 $q < u < r$，因此 $u \in \tau$。故 τ 没有最大元，是分割。

对每个 $\alpha \in \mathscr{A}$，有 $\tau \subseteq \alpha$，所以它是下界。如果 μ 是任意下界，则 $\mu \subseteq T$。对于 $q \in \mu$，取 $r \in \mu$ 使 $q < r$；这时 $r \in T$，故 $q \in \tau$。因此 $\mu \subseteq \tau$，证明最大性。 □

例 2.13 (为何不能机械地取交集)**.** 取分割族 $\mathscr{A} = \{(1/n)^* : n \in \mathbb{N}\}$。它有下界 0^*，但

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (1/n)^* = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\}.$$

确实，每个 $q \le 0$ 都小于每个正数 $1/n$；若 $q > 0$，有理数的 Archimedes 性给出 n 使 $1/n < q$，于是 $q \notin (1/n)^*$。右边集合包含最大元 0，不符合分割定义。命题中的端点修正恰好删去这个最大元，得到真正的下确界 0^*。

2.4 分割两侧可以任意接近

定义加法逆元时，需要一个不借实数极限的逼近引理。

引理 2.14 (有理间隙引理)**.** *若 $\alpha \in \mathcal{D}$，则对每个有理数 $\delta > 0$，存在 $a \in \alpha$，$b \notin \alpha$ 满足*

$$0 < b - a < \delta.$$

证明. 由分割的非空性和真子集性，先选 $a_0 \in \alpha$，$b_0 \notin \alpha$。分离引理给出 $a_0 < b_0$。对区间作有理二分：中点若属于 α，就替换左端点；若不属于，就替换右端点。每一步都保留

$$a_n \in \alpha, \qquad b_n \notin \alpha, \qquad b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0) > 0.$$

这些关系由两种分支直接归纳得到：新端点的成员关系由分支选择确定，长度在两种分支中均减半。

有理数 $\delta/(b_0 - a_0) > 0$。由推论 1.21，可取有限整数 n 使

$$2^{-n} < \delta/(b_0 - a_0).$$

令 $a = a_n$，$b = b_n$，则 $0 < b - a < \delta$。证明只选择某个有限步，不要求无穷区间在 $\mathbb{Q}$ 中有共同点。 □

注 2.15. “可以把两侧选得任意近”并不意味着“它们中间有一个共同的有理端点”。第一章已经证明后者可能不存在。本引理所需的恰是前者，因此没有把待建的完备性放回前提。

2.5 加法：不仅定义，还要验证封闭

定义 2.16 (分割的和与零)**.** 对于 $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$，定义

$$\alpha + \beta = \{a + b : a \in \alpha,\ b \in \beta\}, \qquad \mathbf{0} = 0^*.$$

命题 2.17 (和仍是分割)**.** *上式确实给出 $\mathcal{D}$ 上的二元运算。*

证明. 取 $a \in \alpha$，$b \in \beta$，则 $a + b \in \alpha + \beta$，所以和集非空。取 $p \notin \alpha$，$q \notin \beta$。对于任意 $a \in \alpha$，$b \in \beta$，分离引理给出 $a < p$，$b < q$，因而 $a + b < p + q$。故 $p + q \notin \alpha + \beta$，和集不是整个 $\mathbb{Q}$。

若 $x = a + b \in \alpha + \beta$，$y < x$，令 $a' = a + (y - x)$。因为 $y - x < 0$，有 $a' < a$，从而 $a' \in \alpha$；并且 $y = a' + b$，所以 $y \in \alpha + \beta$。这证明向下封闭。

最后，若 $x = a + b$ 属于和集，由 α 没有最大元，可选 $a'' \in \alpha$ 满足 $a'' > a$。则 $a'' + b > x$，而 $a'' + b$ 仍在和集中。因此和集没有最大元。 □

命题 2.18 (交换律、结合律与零元)**.** *分割加法满足*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \alpha + \mathbf{0} = \alpha.$$

证明. 若 $x \in \alpha+\beta$，就有 $x = a+b$，其中 $a \in \alpha$，$b \in \beta$。有理加法交换律给出 $x = b+a$，所以 $x \in \beta+\alpha$。交换两分割得到反向包含。

若 $x \in (\alpha+\beta)+\gamma$，则存在 $a \in \alpha$，$b \in \beta$，$c \in \gamma$，使 $x = (a+b)+c = a+(b+c)$，从而 $x \in \alpha+(\beta+\gamma)$。若 x 属于后一集合，则先写成 $a+(b+c)$，再改写成 $(a+b)+c$，得到前一集合的成员关系。因此两边相等。

若 $x \in \alpha+\mathbf{0}$，写成 $x = a+b$，其中 $a \in \alpha$，$b < 0$。则 $x < a$，故 $x \in \alpha$。反过来，若 $x \in \alpha$，由没有最大元可取 $a \in \alpha$ 使 $a > x$。令 $b = x-a < 0$，则 $b \in \mathbf{0}$，并且 $x = a+b$，所以 $x \in \alpha+\mathbf{0}$。这证明零元性质。 □

注 2.19. 零元性质的反向包含正是“没有最大元”发挥作用的地方。若允许有最大元的下集，它的最大元未必能表示成集合中一个元素加上严格负数，零元公理便可能失败。

2.6 取负：严格不等号修正端点

定义 2.20 (负分割). 对于 $\alpha \in \mathcal{D}$，定义

$$-\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : \text{存在} b \notin \alpha \text{ 使} q < -b\}.$$

直接把补集取负，可能留下最大元。例如对 $\alpha = 0^*$，集合 $\{-b : b \notin \alpha\} = \{q : q \le 0\}$，不再是分割。定义中的严格不等号统一去除了这种端点。

命题 2.21 (负分割的封闭性). 对每个 $\alpha \in \mathcal{D}$，有 $-\alpha \in \mathcal{D}$。

证明. 取 $b \notin \alpha$，则 $-b-1 < -b$，所以 $-b-1 \in -\alpha$，非空。取 $a \in \alpha$。若 $q \in -\alpha$，存在 $b \notin \alpha$ 使 $q < -b$。分离引理给出 $a < b$，取负后得 $-b < -a$，故 $q < -a$。于是 $-a \notin -\alpha$，证明真子集性。

若 $p < q \in -\alpha$，选择见证 $b \notin \alpha$ 使 $q < -b$，则 $p < -b$，所以 $p \in -\alpha$。若 $q \in -\alpha$，沿用该见证，取 $q' = (q-b)/2$。因为 $q < -b$，有 $q < q' < -b$，所以 $q' \in -\alpha$ 且比 q 大。因此没有最大元。 □

定理 2.22 (加法逆元). 对每个分割 α，都有

$$\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}.$$

证明. 先证左边包含于右边。若 $x = a+q$，其中 $a \in \alpha$，$q \in -\alpha$，则存在 $b \notin \alpha$ 使 $q < -b$。因 $a < b$，有

$$x = a+q < a-b < 0,$$

故 $x \in \mathbf{0}$。

再证反向包含。给定 $t \in \mathbf{0}$，即 $t < 0$，对正有理数 $\delta = -t$ 使用引理 2.14，选 $a \in \alpha$，$b \notin \alpha$ 满足 $b-a < -t$。取负并整理得到

$$t < a-b, \qquad q := t-a < -b.$$

因此 $q \in -\alpha$，而 $t = a+q$，所以 $t \in \alpha+(-\alpha)$。两个包含都已证明。 □

推论 2.23 (交换群的后果)**.** $(\mathcal{D},+,\mathbf{0})$ 是交换群。加法逆元唯一，且

$$-(-\alpha)=\alpha,\qquad -(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta).$$

并且满足消去律：$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ 蕴含 $\alpha=\beta$。

证明. 封闭性、结合律、交换律、零元和逆元已分别证明，这正是交换群的全部公理。

若 u,v 都是 α 的加法逆元，则

$$u=u+\mathbf{0}=u+(\alpha+v)=(u+\alpha)+v=\mathbf{0}+v=v.$$

因为 $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$，交换律说明 α 是 $-\alpha$ 的逆元；由唯一性得到第一式。结合、交换各项可得

$$(\alpha+\beta)+\big((-\alpha)+(-\beta)\big)=(\alpha+(-\alpha))+(\beta+(-\beta))=\mathbf{0},$$

逆元唯一性给出第二式。对于消去律，在等式两边加上 $-\gamma$，结合后均出现 $\gamma+(-\gamma)=\mathbf{0}$，所以得到 $\alpha=\beta$。 □

2.7 序与加法相容，有理运算得到保留

定理 2.24 (平移保持序)**.** 若 $\alpha\le\beta$，则对每个 $\gamma\in\mathcal{D}$，有 $\alpha+\gamma\le\beta+\gamma$。若 $\alpha<\beta$，则 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$。

证明. 若 $x\in\alpha+\gamma$，可写 $x=a+c$，其中 $a\in\alpha$，$c\in\gamma$。因 $\alpha\subseteq\beta$，也有 $a\in\beta$，故 $x\in\beta+\gamma$，证明非严格包含。若原包含严格而平移后相等，消去律就给出 $\alpha=\beta$，矛盾。因此平移后仍严格。 □

命题 2.25 (有理嵌入保留加法与取负)**.** 对于 $p,q\in\mathbb{Q}$，有

$$p^*+q^*=(p+q)^*,\qquad -(p^*)=(-p)^*.$$

证明. 若 $x=a+b\in p^*+q^*$，则 $a<p$，$b<q$，故 $x<p+q$，得到一个包含。若 $x<p+q$，令 $d=p+q-x>0$，取

$$a=p-d/2<p,\qquad b=q-d/2<q.$$

则 $a+b=p+q-d=x$，证明反向包含。

再证负号公式。若 $x\in-(p^*)$，有 $b\notin p^*$ 使 $x<-b$。由于 $b\ge p$，有 $x<-b\le-p$，故 $x\in(-p)^*$。若 $x<-p$，取 $b=p\notin p^*$，即有 $x<-b$，所以 $x\in-(p^*)$。两边相等。 □

推论 2.26 (取负反转大小)**.** 若 $\alpha<\beta$，则 $-\beta<-\alpha$。

证明. 在 $\alpha<\beta$ 两边加上 $(-\alpha)+(-\beta)$，由平移保序和交换群运算，左边化为 $-\beta$，右边化为 $-\alpha$，故结论成立。 □

命题 2.27 (新序中自然数仍无上界)**.** 对任意 $\alpha\in\mathcal{D}$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\alpha<n^*$。此外，对每个有理数 $\delta>0$，存在 $a,b\in\mathbb{Q}$ 使

$$a^*<\alpha<b^*,\qquad 0<b-a<\delta.$$

证明. 取 $r \notin \alpha$，则由引理 2.8 有 $\alpha \le r^*$。有理数的 Archimedes 性给出 $n > r$，于是 $\alpha \le r^* < n^*$。

第二问先对 $\delta/2$ 使用间隙引理，选 $a \in \alpha$，$c \notin \alpha$，使 $0 < c - a < \delta/2$。令 $b = c + \delta/4$。则 $a^* < \alpha \le c^* < b^*$，所以两端严格夹住 α，并且

$$0 < b - a = (c - a) + \delta/4 < 3\delta/4 < \delta.$$

□

2.8 非负分割的乘法：定义与封闭性

现在开始构造乘法。这里的“非负”先只用已经建立的序来定义：$\alpha \ge \mathbf{0}$ 表示 $0^* \subseteq \alpha$。我们还不能把一般有序域的乘法规则套用到分割上。

引理 2.28 (非负与正分割的成员)**.** *每个非负分割都含有全部负有理数。非负分割 α 严格为正，当且仅当它含有正有理数；这又等价于 $0 \in \alpha$。非负分割不含正有理数，当且仅当它等于 $\mathbf{0}$。*

证明. 第一句就是 $0^* \subseteq \alpha$ 的含义。由引理 2.8，$\mathbf{0} < \alpha$ 等价于 $0 \in \alpha$。若 $0 \in \alpha$，无最大元性质给出 $a \in \alpha$ 且 $a > 0$。若有正数 $a \in \alpha$，向下封闭性使 $0 \in \alpha$。最后，非负分割若无正成员，也不能含 0，否则刚才的论证会产生正成员。故它只有全部负数，即等于 $\mathbf{0}$；而 $\mathbf{0}$ 按定义确实没有正成员。 □

定义 2.29 (暂记为 $\odot$ 的非负乘法)**.** 对于 $\alpha, \beta \ge \mathbf{0}$，定义

$$\alpha \odot \beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : \exists\, a \in \alpha,\ b \in \beta,\ a > 0,\ b > 0,\ r < ab\}.$$

同时记 $\mathbf{1} = 1^*$。符号 $\odot$ 强调此时两个因子都必须非负。

定义把负有理数全部放进乘积，零因子的情形也就能得到正确的零分割。严格不等式则为乘积的右端保留统一的开端点约定。

命题 2.30 (乘积的封闭性、零因子与正性)**.** *若 $\alpha, \beta \ge \mathbf{0}$，则 $\alpha \odot \beta$ 是非负分割，并且*

$$\alpha \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad \alpha > \mathbf{0},\ \beta > \mathbf{0} \Longrightarrow \alpha \odot \beta > \mathbf{0}.$$

证明. 负有理数都在定义的第一部分，故乘积非空且包含 $\mathbf{0}$。选择正有理数 $p \notin \alpha$，$q \notin \beta$：先由真子集性选一个补集元素，再取比它和零都大的有理数，利用补集向上封闭即可。任意正成员 $a \in \alpha$，$b \in \beta$ 满足 $0 < a < p$，$0 < b < q$，从而 $ab < pq$。所以 pq 既不在定义的负数部分，也不小于任何这样的 ab，故不在乘积中。乘积是 $\mathbb{Q}$ 的真子集。

若 r 属于乘积且 $s < r$，当 $r < 0$ 时，$s < 0$，所以 s 也属于乘积；当 $r \ge 0$ 时，有正见证 a, b 满足 $r < ab$，于是 $s < ab$，也属于乘积。这证明向下封闭。若 $r < 0$，则 $r < r/2 < 0$，给出更大的乘积成员。若 $r \ge 0$，取上述见证，令 $r' = (r + ab)/2$，则 $r < r' < ab$，所以 r' 也在乘积中。因此乘积没有最大元。

由于 $\mathbf{0}$ 没有正成员，第二部分在零因子时为空，故 $\alpha \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$。若两因子都严格为正，选 $a \in \alpha$，$b \in \beta$ 且 $a, b > 0$。则 $ab/2 > 0$ 属于乘积，由引理 2.28 知乘积严格为正。 □

引理 2.31 (正见证的统一形式)**.** *若 $\alpha,\beta>\mathbf{0}$，则对任意 $r\in\mathbb{Q}$，*

$$r\in\alpha\odot\beta \quad\Longleftrightarrow\quad \exists a\in\alpha,\ b\in\beta,\quad a,b>0,\ r<ab.$$

此外，若 $\mathbf{0}\le\alpha\le\alpha'$ 且 $\mathbf{0}\le\beta\le\beta'$，则 $\alpha\odot\beta\le\alpha'\odot\beta'$。

证明. 当 $r\ge 0$ 时，第一项就是定义。若 $r<0$，两因子各有正成员 a,b，便有 $r<0<ab$，所以仍能选出见证。反向蕴含直接由定义得到。

对于后一结论，负成员自动属于右边的乘积；其他成员在左边有见证 $a\in\alpha$，$b\in\beta$，包含关系又使 $a\in\alpha'$，$b\in\beta'$，所以同一见证证明它属于右边。故有集合包含。 □

2.9 非负乘法的三条代数定律

定理 2.32 (交换律、单位元与结合律)**.** *对于任意非负分割 α,β,γ，有*

$$\alpha\odot\beta=\beta\odot\alpha,\qquad \alpha\odot\mathbf{1}=\alpha,\qquad (\alpha\odot\beta)\odot\gamma=\alpha\odot(\beta\odot\gamma).$$

证明. 交换两个正见证 a,b，有理乘法的交换律使条件 $r<ab$ 不变；定义中的负数部分也相同。因此交换律成立。

验证单位元时，若 $\alpha=\mathbf{0}$，结论已由零因子公式得到。设 $\alpha>\mathbf{0}$。若 $r\in\alpha\odot\mathbf{1}$ 且 $r<0$，则 $r\in\alpha$。若 $r\ge 0$，存在 $a\in\alpha$，$0<b<1$，使 $r<ab<a$，所以 $r\in\alpha$。反过来，若 $r\in\alpha$ 且 $r<0$，它属于乘积的负数部分。若 $r\ge 0$，无最大元性质给出 $a\in\alpha$ 使 $a>r$。此时 $a>0$，取

$$b=\frac{r/a+1}{2}.$$

由 $0\le r/a<1$，有 $0<b<1$ 且 $r/a<b$，所以 $r<ab$，证明 $r\in\alpha\odot\mathbf{1}$。两向包含证明单位元。

对于结合律，若任一因子为零，零因子公式使两边都等于 $\mathbf{0}$。以下设三个因子都严格为正；两种括号下的乘积都严格为正。我们证明，对每个 $r\ge 0$，左边的成员关系等价于

$$\exists a\in\alpha,\ b\in\beta,\ c\in\gamma,\qquad a,b,c>0,\quad r<abc. \tag{*}$$

若 $r\in(\alpha\odot\beta)\odot\gamma$，选 $u\in\alpha\odot\beta$，$c\in\gamma$，使 $u,c>0$，$r<uc$。再为 u 选择 $a,b>0$ 使 $u<ab$，便有 $r<uc<abc$，得到 (*)。若 (*) 成立，因为 $r/c<ab$，取

$$u=\frac{r/c+ab}{2}>0.$$

则 $r/c<u<ab$，所以 $u\in\alpha\odot\beta$，并且 $r<uc$，于是 r 属于左边。

对于右边，若 $r\in\alpha\odot(\beta\odot\gamma)$，先选 $a>0$，$v>0$ 使 $r<av$，再为 v 选 $b,c>0$ 使 $v<bc$，便得到 (*)。反过来，若 (*) 成立，取 $v=(r/a+bc)/2>0$，就有 $v\in\beta\odot\gamma$ 且 $r<av$，所以 r 属于右边。负数则按定义同时属于两边。故两个集合相等。 □

定理 2.33 (非负分配律)**.** *若 $\alpha,\beta,\gamma \ge \mathbf{0}$，则*

$$\alpha \odot (\beta+\gamma) = (\alpha\odot\beta) + (\alpha\odot\gamma).$$

证明. 非负分割的和非负：由平移保序，$\beta+\gamma \ge \beta \ge \mathbf{0}$。若 $\alpha=\mathbf{0}$，两边都为 $\mathbf{0}$。若 $\beta=\mathbf{0}$，左边化为 $\alpha\odot\gamma$，右边化为 $\mathbf{0}+(\alpha\odot\gamma)$，相等；若 $\gamma=\mathbf{0}$，左边化为 $\alpha\odot\beta$，右边化为 $(\alpha\odot\beta)+\mathbf{0}$，也相等。以下只需处理三个因子都严格为正的情形。

设 $r \in \alpha\odot(\beta+\gamma)$。由正见证引理，可选 $a\in\alpha$，$s\in\beta+\gamma$，满足 $a,s>0$，$r<as$。由加法定义写 $s=b_0+c_0$，其中 $b_0\in\beta$，$c_0\in\gamma$，但这两个数未必为正。选正数 $b_+\in\beta$，$c_+\in\gamma$，令

$$b=\max\{b_0,b_+\}\in\beta, \qquad c=\max\{c_0,c_+\}\in\gamma.$$

则 $b,c>0$，$b+c\ge s$，故 $r<a(b+c)$。令 $d=a(b+c)-r>0$，并取

$$x=ab-d/2, \qquad y=ac-d/2.$$

于是 $x<ab$，$y<ac$，同一组正见证分别给出 $x\in\alpha\odot\beta$，$y\in\alpha\odot\gamma$，而 $x+y=r$。所以左边包含于右边。这个分拆也适用于 $r<0$，不要求 x,y 为正。

再设 $r=x+y$，其中 $x\in\alpha\odot\beta$，$y\in\alpha\odot\gamma$。用正见证引理分别选

$$a_1\in\alpha,\ b\in\beta,\quad x<a_1b, \qquad a_2\in\alpha,\ c\in\gamma,\quad y<a_2c,$$

所有见证都严格为正。令 $a=\max\{a_1,a_2\}$。因为最大值就是二者之一，仍有 $a\in\alpha$。于是

$$r=x+y<a_1b+a_2c\le ab+ac=a(b+c).$$

而 $b+c\in\beta+\gamma$ 且为正，所以 $r\in\alpha\odot(\beta+\gamma)$，证明反向包含。 □

注 2.34 (分配律为什么需要统一见证)**.** 右到左的证明不能直接把 a_1b+a_2c 写成 $a(b+c)$，因为一开始的两个 a_i 不相同。取最大值既同时支配两者，又仍留在原分割内，才把两份成员关系合成了一份。左到右则用误差 $d/2+d/2$ 把严格不等式拆成恰好相加为 r 的两个成员。这里没有调用实数连续性或极限。

2.10 由非负差表示推广到全部分割

逐一列出因子的正负情形可以定义乘法，但之后还要证明跨越符号变化的分配律。我们采用一个能把这些验证统一起来的办法：把每个分割表示成两个非负分割之差。

从现在起，$\alpha-\beta$ 表示已经构造好的 $\alpha+(-\beta)$。非负分割在加法下封闭，记其全体为 $\mathcal{D}_+$。

引理 2.35 (差表示及其相等判据)**.** *每个 $\xi\in\mathcal{D}$ 都能写成 $\xi=a-b$，其中 $a,b\in\mathcal{D}_+$。对于 $a,b,a',b'\in\mathcal{D}_+$，有*

$$a-b=a'-b' \quad\Longleftrightarrow\quad a+b'=a'+b.$$

证明. 若 $\xi\ge\mathbf{0}$，取 $a=\xi$，$b=\mathbf{0}$。若 $\xi<\mathbf{0}$，取负反序给出 $-\xi>\mathbf{0}$，取 $a=\mathbf{0}$，$b=-\xi$，便有 $a-b=\xi$。对于相等判据，从左边等式两端加上 $b+b'$，结合、交换并消去逆元，得到右边；从右边两端加上 $(-b)+(-b')$，得到左边。这两个操作只用加法群。 □

下文在差表示中用小写字母 $a,b,c,\dots$ 表示非负分割，不是有理见证；每处有理变量仍会明确标出。为使长式可读，在非负分割之间暂把 $\odot$ 省写为并列，例如 $ac=a\odot c$。

定义 2.36 (一般乘法的候选定义)**.** 选择非负差表示 $\xi = a - b,\ \eta = c - d$，定义候选值

$$\xi\eta = (ac + bd) - (ad + bc). \tag{M}$$

右边的所有乘积均是已定义的非负乘法，外层差是已定义的加法群运算。

定理 2.37 (乘法与差表示无关)**.** *式 (M) 不依赖两个因子的非负差表示，因而定义了 $\mathcal{D}$ 上的二元运算。它交换，并且在非负因子上与 $\odot$ 一致。*

证明. 先固定 $\eta = c - d$。假设同一 ξ 还有表示 $a' - b'$。由引理 2.35，$a + b' = a' + b$。分别乘非负分割 c, d，用已经证明的非负分配律，得到

$$ac + b'c = a'c + bc, \qquad ad + b'd = a'd + bd.$$

因此在加法群中，

$$\begin{aligned}(ac + bd) + (a'd + b'c) &= (ac + b'c) + (bd + a'd)\\ &= (a'c + bc) + (ad + b'd)\\ &= (a'c + b'd) + (ad + bc).\end{aligned}$$

差表示相等判据说明

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (a'c + b'd) - (a'd + b'c).$$

这证明更换第一因子的表示不改变结果。

对固定的两组表示，非负乘法交换律给出

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (ca + db) - (cb + da).$$

所以交换两因子及它们的表示，候选值不变。如果现在只更换第二因子的表示，先交换两因子，应用刚证的“更换第一表示不变”，再交换回来，候选值仍不变。两个表示都更换时，先改第一组，再改第二组，即得完全独立性；交换律也随之成立。

如果 $\xi, \eta \geq \mathbf{0}$，选择 $\xi = \xi - \mathbf{0},\ \eta = \eta - \mathbf{0}$，代入式 (M)，零因子公式使结果为 $(\xi \odot \eta + \mathbf{0}) - (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \xi \odot \eta$。 □

定理 2.38 (全体分割的环公理)**.** *一般乘法有单位元 $\mathbf{1}$，满足结合律与分配律。因此 $(\mathcal{D}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ 是交换含幺环，且 $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$。*

证明. 加法交换群和乘法交换律已经证明。这里只补齐其余公理，不以“形式展开”代替尚未验证的分配律。

设 $\xi = a - b$，其中 $a, b \geq \mathbf{0}$。用 $\mathbf{1} = \mathbf{1} - \mathbf{0}$ 代入定义，得到

$$\xi\mathbf{1} = (a \odot \mathbf{1} + b \odot \mathbf{0}) - (a \odot \mathbf{0} + b \odot \mathbf{1}) = a - b = \xi.$$

同样代入 $\mathbf{0} = \mathbf{0} - \mathbf{0}$ 得 $\xi\mathbf{0} = \mathbf{0}$。

证明分配律。取非负差表示 $\xi = a - b,\ \eta = c - d,\ \zeta = e - f$。加法群给出 $\eta + \zeta = (c + e) - (d + f)$，这是一组合法的非负差表示。因此

$$\begin{aligned}\xi(\eta + \zeta) &= \big(a(c + e) + b(d + f)\big) - \big(a(d + f) + b(c + e)\big)\\ &= (ac + ae + bd + bf) - (ad + af + bc + be).\end{aligned}$$

第二步只在非负因子间用了已证分配律。另一方面，利用一般乘法的定义及加法群的逆元公式，

$$\begin{aligned}\xi\eta+\xi\zeta &= \big((ac+bd)-(ad+bc)\big)+\big((ae+bf)-(af+be)\big)\\ &= (ac+ae+bd+bf)-(ad+af+bc+be).\end{aligned}$$

两式相等。乘法交换律将左分配律转成右分配律：$(\eta+\zeta)\xi=\xi(\eta+\zeta)=\xi\eta+\xi\zeta=\eta\xi+\zeta\xi$。

证明结合律，仍使用同三组非负表示。为 $\xi\eta$ 选择 $(ac+bd)-(ad+bc)$，直接代入乘法定义，得到

$$\begin{aligned}(\xi\eta)\zeta &= \big((ac+bd)e+(ad+bc)f\big)\\ &\quad -\big((ac+bd)f+(ad+bc)e\big)\\ &= (ace+bde+adf+bcf)\\ &\quad -(acf+bdf+ade+bce).\end{aligned}$$

所有三重非负乘积由定理 2.32 可不写括号。为 $\eta\zeta$ 选择 $(ce+df)-(cf+de)$，又有

$$\begin{aligned}\xi(\eta\zeta) &= \big(a(ce+df)+b(cf+de)\big)\\ &\quad -\big(a(cf+de)+b(ce+df)\big)\\ &= (ace+adf+bcf+bde)\\ &\quad -(acf+ade+bce+bdf).\end{aligned}$$

正项四项与负项四项分别只差排列，由加法交换律相等，结合律得证。最后 $0<1$ 在 $\mathbb{Q}$ 中成立，保序嵌入给出 $\mathbf{0}=0^*<1^*=\mathbf{1}$，所以两单位元不同。 □

命题 2.39 (符号与序的相容性)**.** *一般乘法满足*

$$(-\xi)\eta=-(\xi\eta),\qquad (-\xi)(-\eta)=\xi\eta.$$

正分割的乘积严格为正。若 $\xi<\eta$, $\zeta>\mathbf{0}$，则 $\xi\zeta<\eta\zeta$；若 $\zeta<\mathbf{0}$，则 $\xi\zeta>\eta\zeta$。

证明. 由分配律，

$$\xi\eta+(-\xi)\eta=(\xi+(-\xi))\eta=\mathbf{0}\eta=\mathbf{0}.$$

逆元唯一性使 $(-\xi)\eta=-(\xi\eta)$。结合交换律，

$$(-\xi)(-\eta)=-\big(\xi(-\eta)\big)=-\big(-(\xi\eta)\big)=\xi\eta.$$

对于正分割，一般乘法与非负乘法一致，其正性已在命题 2.30 证明。

若 $\xi<\eta$，平移得 $\eta-\xi>\mathbf{0}$。当 $\zeta>\mathbf{0}$ 时，正性和分配律给出

$$\eta\zeta-\xi\zeta=(\eta-\xi)\zeta>\mathbf{0},$$

即 $\xi\zeta<\eta\zeta$。当 $\zeta<\mathbf{0}$ 时，$-\zeta>\mathbf{0}$，刚才的结果给出 $\xi(-\zeta)<\eta(-\zeta)$，即 $-(\xi\zeta)<-(\eta\zeta)$。加法取负反序，得到 $\xi\zeta>\eta\zeta$。 □

2.11 倒数的构造与域公理的完成

定义 2.40 (正分割的倒数候选)**.** 对于 $\alpha>\mathbf{0}$，定义

$$I(\alpha)=\{r\in\mathbb{Q}:r<0\}\ \cup\ \{r\in\mathbb{Q}:\exists\, b\in\mathbb{Q}\setminus\alpha,\ b>0,\ r<1/b\}.$$

此处 $1/b$ 是有理数的倒数，尚不是分割的除法。

命题 2.41 (倒数候选是正分割)**.** *若 $\alpha > \mathbf{0}$，则 $I(\alpha) \in \mathcal{D}$ 且 $I(\alpha) > \mathbf{0}$。*

证明. 负数部分使它非空。选正有理成员 $a_0 \in \alpha$。对于任意 $b \notin \alpha$，分离引理给出 $b > a_0 > 0$。所以任何第二部分的成员 r 都满足 $r < 1/b < 1/a_0$。第一部分的成员也小于 $1/a_0$，故 $1/a_0$ 不在候选中，证明它是真子集。

若 r 属于候选且 $s < r$，当 $r < 0$ 时，$s < 0$；当 $r \geq 0$ 时，存在 $b \notin \alpha$, $b > 0$, $r < 1/b$，于是 $s < 1/b$。所以候选向下封闭。若 $r < 0$，$r/2$ 是更大的负成员；若 $r \geq 0$，沿用见证 b，取 $r' = (r + 1/b)/2$，便有 $r < r' < 1/b$，得到更大的成员。因此它没有最大元。

最后选任一 $b \notin \alpha$；它满足 $b > a_0 > 0$，所以 $1/(2b) > 0$ 属于候选。这证明候选严格为正。 □

定理 2.42 (正分割与其倒数的乘积)**.** *对每个 $\alpha > \mathbf{0}$，有*

$$\alpha I(\alpha) = \mathbf{1}.$$

证明. 两个因子都正，可以使用正见证引理。若 $r \in \alpha I(\alpha)$，选正有理数 $a \in \alpha$, $c \in I(\alpha)$，使 $r < ac$。因为 $c > 0$，倒数候选定义给出 $b \notin \alpha$, $b > 0$, $c < 1/b$。分离引理使 $a < b$，所以

$$r < ac < a/b < 1.$$

故 $r \in 1^*$，证明乘积包含于 $\mathbf{1}$。

反过来，任意 $r \in 1^*$ 满足 $r < 1$。若 $r < 0$，它按定义属于正分割的乘积。以下设 $0 \leq r < 1$。先选正有理数 $a_0 \in \alpha$，令

$$\delta = \frac{(1 - r)a_0}{2} > 0.$$

从 $a_0 \in \alpha$ 和任一 $b_0 \notin \alpha$ 出发，按照引理 2.14 的证明二分；左端点始终不小于 a_0。选有限步使长度小于 δ，得到

$$a \in \alpha, \quad b \notin \alpha, \quad a \geq a_0 > 0, \quad 0 < b - a < \delta.$$

于是 $b > a_0$，并有

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{b - a}{b} > 1 - \frac{\delta}{a_0} = \frac{1 + r}{2} > r.$$

除以 $a > 0$，得到 $r/a < 1/b$。取有理数

$$c = \frac{r/a + 1/b}{2} > 0.$$

则 $c < 1/b$ 使 $c \in I(\alpha)$，而 $c > r/a$ 使 $r < ac$。因此 $r \in \alpha I(\alpha)$。两向包含完成证明。 □

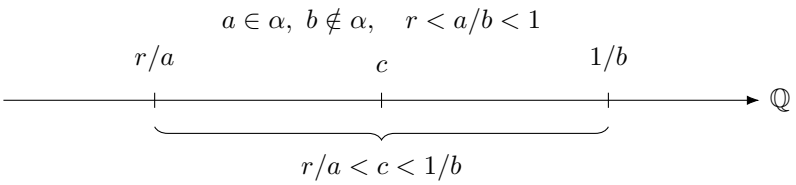


图 2.2: 倒数证明中的有理数选择（示意，非按比例）。选出 c 后，一侧保证 $c \in I(\alpha)$，另一侧保证 $r < ac$。

定理 2.43 (完备有序域的存在)**.** 分割集合 $\mathcal{D}$ 配以上述序、加法和一般乘法，是一个具有上确界性质的有序域。对 $\xi \neq \mathbf{0}$，其乘法逆元为

$$\xi^{-1} = \begin{cases} I(\xi), & \xi > \mathbf{0}, \\ -I(-\xi), & \xi < \mathbf{0}. \end{cases}$$

证明. 交换含幺环公理已由定理 2.38 建立。若 $\xi > \mathbf{0}$，前一定理给出 $\xi I(\xi) = \mathbf{1}$。若 $\xi < \mathbf{0}$，则 $-\xi > \mathbf{0}$，符号规则给出

$$\xi\big(-I(-\xi)\big) = (-\xi)I(-\xi) = \mathbf{1}.$$

所以每个非零元素都有乘法逆元。逆元唯一：若 $\xi u = \mathbf{1} = \xi v$，由结合律与交换律，

$$u = u\mathbf{1} = u(\xi v) = (u\xi)v = \mathbf{1}v = v.$$

非零乘积仍非零：若 $\xi\eta = \mathbf{0}$ 且 $\xi \neq \mathbf{0}$，乘以 ξ^{-1} 得 $\eta = \xi^{-1}(\xi\eta) = \mathbf{0}$。因此非零元素关于乘法封闭，结合律、交换律、单位元与逆元使其成为交换群。连同加法群与分配律，得到域。

分割包含关系是全序，平移保序已由定理 2.24 建立，正分割乘积为正已由命题 2.39 建立，恰好满足有序域的序公理。最后，定理 2.10 已证明每个非空有上界的分割集合都有上确界。这项序性质在添加乘法后仍是原来的同一性质。故所得有序域具有上确界性质。 □

定义 2.44 (本册采用的实数模型)**.** 从此把这个完备有序域记为 $\mathbb{R}$，其元素称为实数。$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ 可以按通常习惯写作 $0, 1$，分割乘法 $\odot$ 统一写作乘法。所谓“完备”在本定义中首先指上确界性质；它与实数列的 Cauchy 完备性、区间套等性质的等价，将在第四、五章分别证明。

定义 2.45 (除法)**.** 若 $\eta \neq 0$，定义 $\xi/\eta = \xi\eta^{-1}$。不定义除以零。

命题 2.46 (除法解决的方程)**.** 当 $\eta \neq 0$ 时，方程 $\eta z = \xi$ 有唯一解 $z = \xi/\eta$。

证明. 由结合律与逆元性质，$\eta(\xi\eta^{-1}) = \xi(\eta\eta^{-1}) = \xi$。若 z 是任意解，在等式 $\eta z = \xi$ 两边乘以 η^{-1}，得到 $z = (\eta^{-1}\eta)z = \eta^{-1}\xi = \xi/\eta$。对于 $\eta = 0$，左边总为零：若 $\xi \neq 0$ 则无解，若 $\xi = 0$ 则每个 z 都是解，因而没有唯一的商。 □

2.12 有理运算在新域中确实保持

有理嵌入的加法与序此前已检查；现在补齐乘法和除法，才能无歧义地把 $\mathbb{Q}$ 当作 $\mathbb{R}$ 的子域。

命题 2.47 (有理嵌入是域嵌入)**.** 对 $p, q \in \mathbb{Q}$，有

$$p^* q^* = (pq)^*.$$

当 $q \neq 0$ 时，还满足

$$(q^*)^{-1} = (1/q)^*, \qquad p^*/q^* = (p/q)^*.$$

这里左边运算在分割域中，右边先在 $\mathbb{Q}$ 中运算再取分割。

证明. 先设 $p, q > 0$。如果有理数 $r \in p^* q^*$ 且 $r < 0$，则 $r < pq$。如果 $r \geq 0$，乘积定义给出 $0 < a < p$, $0 < b < q$, $r < ab$，所以 $r < pq$。因此 $p^* q^* \subseteq (pq)^*$。

若 $r < pq$ 且 $r < 0$，乘积定义直接包含它。若 $0 \le r < pq$，取

$$a = \frac{r/q + p}{2}.$$

则 $0 < a < p$ 且 $r/q < a$，因此 $r/a < q$。再取

$$b = \frac{r/a + q}{2}.$$

这时 $0 < b < q$ 且 $r < ab$，所以 $r \in p^*q^*$。这证明正有理数的乘法相容。

若某个因子为零，域中和有理数中的零因子公式使等式两边都为 0^*。若 $p < 0$，$q > 0$，令 $u = -p > 0$，利用已证明的负号相容及符号规则，

$$p^*q^* = (-u^*)q^* = -(u^*q^*) = -(uq)^* = (-uq)^* = (pq)^*.$$

若 $p > 0$，$q < 0$，由交换律改为上一情形。若 $p < 0$，$q < 0$，令 $u = -p > 0$，$v = -q > 0$，则

$$p^*q^* = (-u^*)(-v^*) = u^*v^* = (uv)^* = (pq)^*.$$

全部符号情况已经覆盖。

对于 $q \neq 0$，有理嵌入的单射性使 $q^* \neq 0^*$，且乘法相容给出

$$q^*(1/q)^* = (q \cdot 1/q)^* = 1^*.$$

乘法逆元唯一，所以 $(q^*)^{-1} = (1/q)^*$。最后 $p^*/q^* = p^*(1/q)^* = (p/q)^*$，证明除法相容。 □

推论 2.48 (自然数与有理数在实数域中的位置)**.** $\mathbb{R}$ 是 *Archimedes* 有序域，$\mathbb{Q}$ 在其中序稠密。第一章中关于任意有序域的符号、绝对值、确界运算与误差估计，现在均可用于 $\mathbb{R}$。

证明. 保序域嵌入把整数 n 对应为 n^*；命题 2.27 已证明对每个分割 α 都有 $n^* > \alpha$，故满足 Archimedes 定义。给定 $\alpha < \beta$，命题 2.9 给出 $\alpha < q^* < \beta$，这就是嵌入后的有理稠密性。一般有序域结论的全部假设已在定理 2.43 验证，因此可以应用。 □

2.13 缺口闭合：平方根二现在是一个数

定理 2.49 (构造的分割确实满足平方关系)**.** 例 *2.4* 中的分割 α_2 是唯一的正实数 s 满足 $s^2 = 2$。

证明. α_2 含正有理数，故严格为正。先证明 $\alpha_2^2 \subseteq 2^*$。若有理数 $r \in \alpha_2^2$ 且 $r < 0$，则 $r < 2$。若 $r \ge 0$，有正有理见证 $a, b \in \alpha_2$，使 $r < ab$。令 $m = \max\{a, b\}$。则 $m \in \alpha_2$，$m > 0$，所以 $m^2 < 2$，从而 $r < ab \le m^2 < 2$。因此确有这一包含。

反向包含中，取有理数 $r < 2$。若 $r < 0$，按定义属于乘积。若 $0 \le r < 2$，由第一章的二分构造取 a_n, b_n。其中 $a_n \in \alpha_2$，$1 \le a_n < b_n \le 2$，并有 $b_n - a_n = 2^{-n}$、$a_n^2 < 2 < b_n^2$。选 n 使 $4 \cdot 2^{-n} < 2 - r$，于是

$$0 < 2 - a_n^2 < b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) \le 4 \cdot 2^{-n} < 2 - r.$$

减去 2 并取负得 $a_n^2 > r$。因此同一正见证 a_n, a_n 证明 $r \in \alpha_2^2$。所以 $\alpha_2^2 = 2^*$，即在识别后的记号中 $\alpha_2^2 = 2$。

若另有正实数 s 满足 $s^2 = 2$，则它不能大于 α_2，因为第一章的非负平方比较会给出 $s^2 > \alpha_2^2$；也不能小于 α_2，因为这将给出相反的严格平方不等式。三歧性只留下 $s = \alpha_2$。 □

注 2.50 (同一个对象的三种描述)**.** 到此，α_2 已同时具有三种描述：一个具体的有理下集、方程 $s^2=2$ 的唯一正实数解，以及正有理集合 $A=\{q\ge 0: q^2<2\}$ 在新域中的上确界。最后一种描述还要核对：每个 $a\in A$ 都属于 α_2，所以 $a^*<\alpha_2$，证明上界性。若 $\beta<\alpha_2$，由有理分割稠密性选 $\beta<q^*<\alpha_2$，端点判断给出 $q\in\alpha_2$。若 $q\ge 0$，则 $q\in A$，而 $q^*>\beta$，证明 β 不是上界；若 $q<0$，则 $1\in A$ 且 $\beta<q^*<1^*$，也排除上界。因此它确实是嵌入后的 A 的上确界。

2.14 上确界如何产生一般的正整数次根

平方根二的具体分割证明展示了构造细节。现在再从上确界性质出发，证明一般的开方定理，检验完备性如何转化为新的代数存在性。此处仍不调用连续函数的中间值定理。

引理 2.51 (幂的比较与定量估计)**.** 设 $n\in\mathbb{N}$, $0\le u<v$。则 $u^n<v^n$。若 $s\ge 0$, $0<h<1$，则

$$0<(s+h)^n-s^n\le nh(s+1)^{n-1}.$$

若 $s>0$, $0<h<s$，则

$$0<s^n-(s-h)^n\le nhs^{n-1}.$$

证明. 域中的分配律给出因式分解

$$v^n-u^n=(v-u)\sum_{k=0}^{n-1}v^{\,n-1-k}u^k.$$

为核对这个恒等式，将右边分成 $\sum_{k=0}^{n-1}v^{n-k}u^k-\sum_{k=0}^{n-1}v^{n-1-k}u^{k+1}$；第二和令 $j=k+1$，中间 $j=1,\dots,n-1$ 各项互相消去，只剩 v^n-u^n。这里约定零次幂为 1，包括这个多项式恒等式中出现的 0^0 项。

因 $v-u>0$, $v>0$，和式的每项非负，其中 $k=0$ 项 $v^{n-1}>0$。故差严格为正。对于 $v=s+h$, $u=s$，所有底数都不大于 $s+1>0$，每个 $n-1$ 次混合乘积都不大于 $(s+1)^{n-1}$，和式不大于它的 n 倍，便得到第一条估计。对于 $v=s$, $u=s-h$，所有底数都在 $[0,s]$ 中，每个混合乘积不大于 s^{n-1}，得到第二条估计。混合乘积的比较逐因子乘非负数即可保留非严格不等号，因此也涵盖某些底数为零的情形。 □

定理 2.52 (正整数次根的存在与唯一性)**.** 对于每个 $x>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$，存在唯一 $s>0$ 使 $s^n=x$。记为 $x^{1/n}$ 或 $\sqrt[n]{x}$。

证明. 定义实数集合

$$E=\{t\in\mathbb{R}: t\ge 0,\ t^n<x\}.$$

令 $t_0=\min\{1,x\}/2$。则 $0<t_0<1$, $t_0<x$，而 $t_0^n\le t_0<x$：这个幂估计来自每乘一个 $t_0<1$，非负乘积就不会增大。因此 $t_0\in E$，集合非空。令 $M=\max\{1,x\}+1$。若 $t\ge M$，则 $t>1$，逐次乘 $t\ge 1$ 得 $t^n\ge t\ge M>x$，所以 $t\notin E$。因此 M 是上界，上确界性质给出 $s=\sup E$。特别地 $s\ge t_0>0$。

若 $s^n<x$，令

$$h=\frac{1}{2}\min\left\{1,\frac{x-s^n}{n(s+1)^{n-1}}\right\}>0.$$

于是 $h<1$，由引理 2.51，

$$(s+h)^n - s^n \le nh(s+1)^{n-1} \le (x-s^n)/2 < x - s^n.$$

因此 $(s+h)^n < x$，即 $s+h \in E$，但 $s+h > s$，违背上界性。

若 $s^n > x$，令

$$h = \frac{s^n - x}{2ns^{n-1}} > 0.$$

因 $x>0$，有 $h < s/(2n) \le s/2$，所以 $0<h<s$。引理给出

$$s^n - (s-h)^n \le nhs^{n-1} = (s^n - x)/2,$$

故 $(s-h)^n \ge (s^n+x)/2 > x$。若某个 $t \in E$ 满足 $t \ge s-h>0$，幂比较会使 $t^n \ge (s-h)^n > x$，与 $t \in E$ 矛盾。所以每个 $t \in E$ 都小于 $s-h$，即 $s-h$ 是比 s 更小的上界，又违背最小性。

两种严格不等式均被排除，故 $s^n = x$。若另有 $u>0$ 满足 $u^n = x$，则 $u<s$ 会使 $u^n < s^n$，$u>s$ 会使 $u^n > s^n$，都不可能。因此 $u=s$。 □

推论 2.53 (零、负数与奇偶性)**.** *零的唯一非负 n 次根是零。若 $x<0$，则奇数 n 时存在唯一实根 $-(-x)^{1/n}$；偶数 n 时没有实根。对于 $x>0$，偶数 n 时全部实根为 $x^{1/n}$ 与 $-x^{1/n}$，奇数 n 时只有正根。*

证明. 若 $u>0$，正数乘积为正，所以 $u^n>0$，不可能等于零。因此零的非负根只能是零。若 $u<0$，写 $u=-v$，$v>0$。逐次使用乘法符号规则给出 $u^n = (-1)^n v^n$。当 n 奇时它严格为负，当 n 偶时它严格为正；$u=0$ 则幂为零。对于 $x<0$ 和奇数 n，定理给出唯一 $v>0$ 满足 $v^n = -x$，于是 $(-v)^n = -v^n = x$；任何解必须为负，取负后必是上述唯一正根，所以解唯一。偶数次幂不可能为负，故无解。对于 $x>0$，非负解中只有定理中的正根；负解写作 $-v$ 后，偶数时要求 $v^n = x$，只有那个正根的相反数，奇数时幂为负不能等于 x。这穷尽了所有符号情形。 □

2.15 构造完成后的逻辑边界

本章至此完成了分割模型的存在性证明：底层是有理下集，序是包含，加法、取负、乘法和倒数都经过封闭性与公理验证；有理数保序保运算地嵌入，新域有上确界性质。第一章的平方根缺口已在其中闭合，一般正整数次根也由完整证明获得。

下一章将独立从有理 Cauchy 列构造另一个模型，比较两种表示，并证明完备有序域在保序域同构意义下唯一。这里的“唯一”不是说所有构造底层集合完全相等，而是要建立保留大小和全部域运算的双射。第四章才系统证明上确界性质与实数列收敛、区间套等原理的等价链；本章没有把它们当作构造的前提。

有理指数可在整数次根基础上定义，但指数表示无关性与幂法则仍需证明；实指数及对数还需要进一步的极限或确界构造。本章不把这些尚未验证的记号当作免费运算法则。

3 有理 Cauchy 列、两种模型与唯一性

3.1 先在有理数中说明全部量词

分割用“一个数的下方有哪些有理数”表示它；另一种办法用一列越来越稳定的有理近似表示它。本章先独立建立第二个模型的域与序，不把这些有理列的实数极限当作定义。之后再构造两模型的保序域同构，并区分“模型同构”与“底层集合相等”。

定义 3.1 (有理 Cauchy 列与零列)**.** 本章数列下标为 $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$，每项属于 $\mathbb{Q}$。有理数列 $x = (x_n)$ 是 Cauchy 列，若

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq N, \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

它是零列，若

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |x_n| < \varepsilon.$$

记全体有理 Cauchy 列为 $\mathscr{C}$，全体零列为 $\mathscr{N}$。

第一章下标从零开始的例子可删去首项再重编号，不改变这里的性质。“充分大的 n”在本章总是指存在一个整数阈值，此阈值之后的所有指标都满足条件；不能用任意晚出现的个别指标代替。

引理 3.2 (有限次改动与有界性)**.** *1. 零列一定是 Cauchy 列。*

2. 改动数列的有限多项不改变其 Cauchy 性，也不改变其是否为零列。

3. 每个有理 Cauchy 列都有正有理数界：存在 $M \in \mathbb{Q}$, $M \geq 1$, 使所有 n 都满足 $|x_n| \leq M$。

证明. 若 x 是零列，给定正有理数 ε，取 N 使 $n \geq N$ 时 $|x_n| < \varepsilon/2$。对于 $m, n \geq N$，三角不等式给出 $|x_m - x_n| \leq |x_m| + |x_n| < \varepsilon$，故为 Cauchy 列。

若两列从第 K 项起相同，把原来的阈值 N 替换成 $\max\{N, K\}$，尾部的每条不等式完全相同。因此 Cauchy 性与零列条件均沿两个方向传递。

对于第三项，用 Cauchy 条件取正有理误差 1，得某个 N。于是对 $n \geq N$，

$$|x_n| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < |x_N| + 1.$$

取 $M = 1 + \sum_{j=1}^{N} |x_j| \geq 1$，则尾部被 M 控制，前 $N-1$ 项也各自不大于 M。这里的和是有限有理和，不借助实数确界。 □

命题 3.3 (逐项运算的封闭性)**.** *若 $x, y \in \mathscr{C}$，则 $-x$, $x + y$, xy 都在 $\mathscr{C}$，其中运算逐项进行。若 $u, v \in \mathscr{N}$，则 $-u, u + v \in \mathscr{N}$。若 $u \in \mathscr{N}$ 且 z 是有界有理列，则 $uz \in \mathscr{N}$。*

证明. 因为 $|(-x_m) - (-x_n)| = |x_m - x_n|$，原阈值直接验证 $-x$。对于 $x + y$，给定正有理 ε，分别选阈值控制 $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$ 与 $|y_m - y_n| < \varepsilon/2$，再取两个阈值的最大值。此后

$$|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \varepsilon.$$

对于乘积，先取有理界 $|x_n| \le M$, $|y_n| \le L$，其中 $M, L \ge 1$。恒等式

$$x_m y_m - x_n y_n = x_m(y_m - y_n) + y_n(x_m - x_n)$$

给出

$$|x_m y_m - x_n y_n| \le M|y_m - y_n| + L|x_m - x_n|.$$

分别以 $\varepsilon/(2M)$、$\varepsilon/(2L)$ 控制右边两差，取共同阈值后，右边小于 ε。

对于零列取负，绝对值不变；对于零列相加，分别控制 $|u_n| < \varepsilon/2$, $|v_n| < \varepsilon/2$，三角不等式给出和的零列条件。最后，若 $|z_n| \le B$，增大 B 使 $B \ge 1$。选择 $|u_n| < \varepsilon/B$ 的尾部，就有 $|u_n z_n| \le B|u_n| < \varepsilon$。各误差参数均为正有理数。 □

3.2 把误差趋零的近似视为同一对象

定义 3.4 (等价关系与商集合)**.** 对 $x, y \in \mathscr{C}$，定义

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n - y_n) \in \mathscr{N}.$$

记 x 的等价类为 $[x]$，商集合记为 $K = \mathscr{C}/\!\sim$。

命题 3.5 (确为等价关系)**.** *上述关系自反、对称且传递。两列只差有限多项时必等价。*

证明. $x_n - x_n = 0$ 构成零列，所以自反。若 $x - y$ 是零列，其负列 $y - x$ 仍为零列，所以对称。若 $x - y$ 与 $y - z$ 都为零列，它们的和 $(x - y) + (y - z) = x - z$ 也是零列，所以传递。若两列的尾部完全相同，其差的尾部全为零；对任意误差，进入这个尾部即可满足零列条件，所以等价。 □

定义 3.6 (类上的运算候选)**.** 定义

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad [x][y] = [xy], \qquad -[x] = [-x].$$

常值有理列 $\underline{q} = (q, q, \ldots)$ 是 Cauchy 列，记其类为 $\widehat{q} = [\underline{q}]$。暂记零、单位元为 $0_K = \widehat{0}$, $1_K = \widehat{1}$。

定理 3.7 (运算的良定义与环公理)**.** *这些运算与代表列的选择无关，并使 K 成为交换含幺环，且 $0_K \ne 1_K$。*

证明. 封闭性已由命题 3.3 保证。若 $x \sim x'$, $y \sim y'$，则

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$$

为零列，故和类相同。取负后差为 $-(x - x')$，也是零列。乘积的差逐项满足

$$x_n y_n - x'_n y'_n = (x_n - x'_n) y_n + x'_n (y_n - y'_n).$$

其中 $x - x', y - y'$ 是零列，y, x' 是有界列，故两项均为零列，其和也为零列。因此乘积类相同，全部运算良定义。

下面验证公理。在每个指标处，有理数的运算满足

$$(x_n + y_n) + z_n = x_n + (y_n + z_n), \qquad x_n + y_n = y_n + x_n,$$
$$(x_n y_n) z_n = x_n (y_n z_n), \qquad x_n y_n = y_n x_n,$$
$$x_n (y_n + z_n) = x_n y_n + x_n z_n.$$

这些是对应列的逐项相等，因而差列恒为零，取类得到两种结合律、两种交换律与分配律。恒等式 $x_n+0=x_n$，$x_n+(-x_n)=0$，$x_n\cdot 1=x_n$ 又分别给出加法零元、加法逆元与乘法单位元。因此全部环公理成立。

若 $0_K=1_K$，常值列 1 就是零列；但对误差 $1/2$，没有任何指标满足 $1<1/2$，矛盾。因此两单位元不同。 □

注 3.8 (相等的不是数列本身)**.** 例如有理列 $(1/n)$ 与常值零列并不逐项相等，但由有理数的 Archimedes 性，对每个正有理 ε 可取 N 使 $1/N<\varepsilon$，此后 $1/n\le 1/N<\varepsilon$。所以它们属于同一类。反之，两列在无穷多个指标上相等，不足以保证等价：常值零列与交替取 $0,1$ 的列虽然有无穷多个相同项，后者却连 Cauchy 条件也不满足。取误差 $1/2$，每个尾部都有一对差为 1 的项即可验证。

3.3 非零类最终远离零

引理 3.9 (非零 Cauchy 列的间隙与符号)**.** *若 $x\in\mathscr{C}$ 不是零列，则存在正有理数 c 和整数 N，使以下两种情形恰有一种成立：*

$$\forall n\ge N,\quad x_n>c,\qquad \text{或}\qquad \forall n\ge N,\quad x_n<-c.$$

证明. “不是零列”的量词否定为

$$\exists\varepsilon_0\in\mathbb{Q},\ \varepsilon_0>0,\quad \forall L\in\mathbb{N},\quad \exists k\ge L,\quad |x_k|\ge\varepsilon_0.$$

由 Cauchy 条件，以误差 $\varepsilon_0/2$ 取 N，使 $m,n\ge N$ 时 $|x_m-x_n|<\varepsilon_0/2$。再由上述否定式选一个 $k\ge N$ 使 $|x_k|\ge\varepsilon_0$。固定这个 k，令 $c=\varepsilon_0/2$。

若 $x_k\ge\varepsilon_0$，则对所有 $n\ge N$，$x_n>x_k-\varepsilon_0/2\ge c$。若 $x_k\le-\varepsilon_0$，则对所有 $n\ge N$，$x_n<x_k+\varepsilon_0/2\le -c$。由于 $|x_k|\ge\varepsilon_0$，两种情形覆盖全部可能；它们不能同时成立，因为两个尾部有共同指标，而一个数不能同时大于正数和小于负数。 □

关键不只是“有些项离零远”，而是 Cauchy 条件把一个足够晚的远离零的项变成整个尾部的共同符号和共同下界。直接对一个有时接近零的有理列取倒数，通常无法得到 Cauchy 列。

定理 3.10 (倒数列与域结构)**.** *每个非零类 $X=[x]\in K$ 都有唯一乘法逆元。因而 K 是域。*

证明. 由 $X\neq 0_K$，列 x 不是零列。前一引理给出 $c>0,N$，使 $|x_n|>c$ 对所有 $n\ge N$ 成立。定义有理列

$$z_n=\begin{cases}0, & n<N,\\ 1/x_n, & n\ge N.\end{cases}$$

有限前段取零只是为了给所有指标定义一个数；尾部的倒数才负责逆元性质。给定正有理 ε，对 x 使用 Cauchy 误差 εc^2，并将阈值增大到至少 N。此后

$$|z_m-z_n|=\frac{|x_m-x_n|}{|x_m||x_n|}\le\frac{|x_m-x_n|}{c^2}<\varepsilon.$$

所以 $z\in\mathscr{C}$。又 $x_nz_n=1$ 对所有 $n\ge N$ 成立，故 $xz-\underline{1}$ 的尾部恒为零，是零列。因此 $[x][z]=1_K$。

若 U, V 都是 X 的逆元，则环中的结合、交换律给出

$$U = U1_K = U(XV) = (UX)V = 1_K V = V.$$

因此逆元唯一。如果改用另一等价代表列或改用不同的有限前段，上述办法仍产生 X 的逆元，唯一性保证得到同一类；无需把代表列的倒数逐项强行比较。

最后，若 $XY = 0_K$，$X \neq 0_K$，乘以 X^{-1} 得 $Y = 0_K$。所以非零元素的乘积非零，乘法在非零元素上封闭；结合律、交换律、单位元与刚证的逆元组成乘法交换群。这完成了域公理。 □

3.4 序必须带有统一的正间隙

定义 3.11 (正类与大小)**.** 称 $X = [x]$ 为正类，如果存在正有理数 c 和整数 N，使 $x_n > c$ 对所有 $n \geq N$ 成立。记 $X > 0_K$。对 $X, Y \in K$，定义

$$X < Y \quad \Longleftrightarrow \quad Y - X > 0_K.$$

要求尾部有统一正间隙，不能只要求每项为正：$(1/n)$ 的每项为正，但它代表零。

定理 3.12 (有序域公理)**.** *正类定义与代表列无关，并且上述关系使 K 成为有序域。*

证明. 设 $x \sim y$，且 $x_n > c > 0$ 在某个尾部成立。由零列条件，另一个尾部满足 $|x_n - y_n| < c/2$。取共同尾部，则 $y_n > x_n - c/2 > c/2$，所以正性传到 y。对称地从 y 可传回 x，证明定义无关。

正类不是零类，因为正间隙 c 与误差 $c/2$ 的零列要求冲突。一个类及其负类也不能都为正：若选同一代表列 x，两种正性分别使尾部满足 $x_n > c > 0$ 与 $x_n < -d < 0$，取共同指标即矛盾。反过来，任意非零类由引理 3.9 必为正或其负类为正。因此任意 X 在零、正、负三种情形中恰居其一。

若正类 $X = [x], Y = [y]$ 有尾部间隙 $c, d > 0$，在共同尾部 $x_n + y_n > c + d > 0$，故 $X + Y$ 为正；同时 $x_n y_n > cd > 0$，故 XY 为正。据此验证序：$X < X$ 不成立，因为零类不正。对 $X \neq Y$，差 $Y - X$ 非零，三歧性给出 $X < Y$ 或 $Y < X$，且不能同时成立。若 $X < Y$，$Y < Z$，则两个正差的和 $(Y - X) + (Z - Y) = Z - X$ 为正，故 $X < Z$。平移时 $(Y + W) - (X + W) = Y - X$，所以严格大小保持。最后，两个正类的乘积为正已经验证。这些正是有序域所需的全部序公理。 □

命题 3.13 (常值嵌入与 Archimedes 性)**.** *映射 $q \mapsto \widehat{q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 到 K 的保序域嵌入；K 是 Archimedes 有序域。*

证明. 常值列的逐项运算给出 $\widehat{p} + \widehat{q} = \widehat{p+q}$、$\widehat{p}\widehat{q} = \widehat{pq}$，并保持零与单位元。若 $\widehat{p} = \widehat{q}$ 且 $p \neq q$，常值差的绝对值为 $|p - q| > 0$，取误差 $|p - q|/2$ 即违反零列条件。因此映射单射。若 $p < q$，常值差 $q - p$ 具有正间隙 $(q - p)/2$，故 $\widehat{p} < \widehat{q}$。若 $\widehat{p} < \widehat{q}$，定义要求常值 $q - p$ 大于一个正数，所以 $p < q$。对于 $q \neq 0$，常值列乘积 $\underline{q}\,\underline{1/q} = \underline{1}$，逆元唯一性使嵌入保持倒数，进而保持除法。

给定 $X = [x]$，选正有理数界 M 使 $|x_n| \leq M$。由 $\mathbb{Q}$ 的 Archimedes 性选整数 $k > M + 1$，于是对每个 n，$k - x_n \geq k - M > 1$。故 $\widehat{k} - X > 0_K$，即 $X < \widehat{k}$。常值整数确实就是 K 内由单位元反复相加得到的整数，所以自然数在 K 中无上界。 □

命题 3.14 (代表项在商域中逼近本类)**.** *给定 $X=[x]\in K$ 与正有理数 ε，存在 N 使*

$$-\widehat{\varepsilon}<X-\widehat{x_n}<\widehat{\varepsilon}\qquad (n\geq N).$$

证明. 以误差 $\varepsilon/2$ 对 x 使用 Cauchy 条件，取 N。固定任意 $n\geq N$。在代表列的变动下标 $m\geq N$ 上，有 $|x_m-x_n|<\varepsilon/2$。因此两列

$$\varepsilon-(x_m-x_n),\qquad \varepsilon+(x_m-x_n)$$

在这个尾部都严格大于 $\varepsilon/2>0$。它们分别代表 $\widehat{\varepsilon}-(X-\widehat{x_n})$ 与 $\widehat{\varepsilon}+(X-\widehat{x_n})$，所以两者为正类，恰好给出所述两个不等式。这里固定的 n 是选取近似常数的下标，m 才是验证类的正性时的尾部下标，二者不能混为一谈。 □

3.5 商域的 Cauchy 完备性：一次明确的对角选择

这里先证明本模型自身的一个性质，之后第四章才讨论任意 Archimedes 有序域中各种完备性条件如何互推。为避免词义混乱，在一般有序域 F 中，数列 U_j 是 Cauchy 列，指对每个 $\varepsilon\in F,\varepsilon>0$，某个尾部满足 $|U_j-U_k|<\varepsilon$；收敛到 $U\in F$，指对每个这样的 ε，某个尾部满足 $|U_j-U|<\varepsilon$。有序域的绝对值已经在第一章定义。

引理 3.15 (极限唯一与收敛列的 Cauchy 性)**.** *在任意有序域中，同一数列的极限若存在则唯一；每个收敛列都是 Cauchy 列。*

证明. 设 U_j 同时收敛到 A,B，且 $A\neq B$。取域内正误差 $\varepsilon=|A-B|/3$，两个收敛条件给出共同尾部，使

$$|A-B|\leq|A-U_j|+|U_j-B|<2\varepsilon=\frac{2}{3}|A-B|.$$

一个正数不可能严格小于自己的 $2/3$，故假设矛盾，得到 $A=B$。

若 U_j 收敛到 A，给定任意域内正误差 ε，取尾部使 $|U_j-A|<\varepsilon/2$。对这个尾部中任意 j,k，有

$$|U_j-U_k|\leq|U_j-A|+|U_k-A|<\varepsilon.$$

这正是 Cauchy 条件，不需要 Archimedes 性或上确界性质。 □

引理 3.16 (Archimedes 域中的有理误差基)**.** *在 Archimedes 有序域 F 中，检验上述收敛或 Cauchy 条件时，只检验正有理误差就足够。*

证明. 如果对全部正的 F 中误差成立，当然对其中的正有理误差成立。反过来，给定任意 F 中的 $\varepsilon>0$，有理稠密性给出有理数 r 满足 $0<r<\varepsilon$。选使所需绝对值小于 r 的尾部，则这个尾部也使绝对值小于 ε。收敛与 Cauchy 两种条件都由同一个比较得到。 □

定理 3.17 (有理 Cauchy 列商域是 Cauchy 完备的)**.** *K 中的每个 Cauchy 列都收敛到 K 中某个元素。*

证明. 设 $(X_j)_{j\geq1}$ 是 K 中的 Cauchy 列。由于 K 是 Archimedes 域，有理数在其中稠密。对每个 j，可以选择 $q_j\in\mathbb{Q}$，使

$$|X_j-\widehat{q_j}|<\widehat{1/j}. \tag{A}$$

这里不需同时为所有类挑选代表列。若要使有理数选择完全确定，可先按高度 $|p|+d=1,2,\dots$ 列出全部 $(p,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$，每个有限高度层内按 p 的递增顺序排列，并输出 p/d。每层只有有限对，每个有理数至少出现一次。对第 j 个条件，选列表中第一个满足式 (A) 的有理数；候选非空由稠密性保证，自然数良序保证第一个存在。

先证明有理列 $q=(q_j)$ 是 Cauchy 列。给定正有理数 ε，由有理数的 Archimedes 性取 J_1，使 $j\ge J_1$ 时 $1/j<\varepsilon/3$。由 (X_j) 的 Cauchy 条件，再取 J_2，使 $j,k\ge J_2$ 时 $|X_j-X_k|<\widehat{\varepsilon/3}$。当 $j,k\ge\max\{J_1,J_2\}$，三角不等式给出

$$|\widehat{q_j}-\widehat{q_k}|\le|\widehat{q_j}-X_j|+|X_j-X_k|+|X_k-\widehat{q_k}|<\widehat{\varepsilon}.$$

保序域嵌入保持绝对值：有理数非负时像与它本身的像一致，负时取负相容也给出同一结论。因此上式等价于有理不等式 $|q_j-q_k|<\varepsilon$，证明 $q\in\mathscr{C}$。

令 $X=[q]\in K$。给定正有理 ε，命题 3.14 使某个尾部满足 $|X-\widehat{q_j}|<\widehat{\varepsilon/2}$。再增大阈值，使 $1/j<\varepsilon/2$。由式 (A)，此后

$$|X_j-X|\le|X_j-\widehat{q_j}|+|\widehat{q_j}-X|<\widehat{1/j}+\widehat{\varepsilon/2}<\widehat{\varepsilon}.$$

所以 X_j 按正有理误差收敛到 X，有理误差基引理把结论扩展到全部正 K 中误差。整个证明没有使用分割模型的极限或上确界。 □

注 3.18 (这一步为何称为对角选择)**.** 输入是“一列近似过程” $X_1,X_2,\dots$，每个过程本身是一个等价类。证明从第 j 个类选一个误差小于 $1/j$ 的有理数，把它们合成一条新的有理 Cauchy 列。指标与精度同步推进，而不是先假定每个类在某个既有实数域中已有极限。

3.6 任意 Archimedes 有序域都映入分割域

下面证明一个一般结论。它既能连接两个实数模型，也会给出唯一性定理的核心。这里 F 是任意 Archimedes 有序域，按第一章的典范嵌入识别其中的 $\mathbb{Q}$；右边的 $\mathcal{D}$ 则始终是第二章构造的分割域。

定义 3.19 (有理下切映射)**.** 对 $t\in F$，定义

$$L_F(t)=\{q\in\mathbb{Q}:q<t\ \text{在}F\ \text{中成立}\}.$$

命题 3.20 (下切是分割并严格保序)**.** $L_F(t)\in\mathcal{D}$，且映射 $L_F:F\to\mathcal{D}$ 满足

$$t<u\iff L_F(t)<L_F(u),\qquad L_F(q)=q^*\quad(q\in\mathbb{Q}).$$

特别地，它是单射。

证明. 选自然数 $M>|t|+1$，则 $-M<t<M$。所以 $-M\in L_F(t)$，而 $M\notin L_F(t)$，证明非空和真子集。如果 $p<q<t$，则 $p<t$，所以向下封闭。如果 $q<t$ 且 $q\in\mathbb{Q}$，有理稠密性给出 $r\in\mathbb{Q}$，$q<r<t$，因此没有最大元。故它是分割。

若 $t<u$，则每个 $q<t$ 也满足 $q<u$，所以 $L_F(t)\subseteq L_F(u)$。再选有理数 r 满足 $t<r<u$，则 $r\in L_F(u)\setminus L_F(t)$，包含严格。反过来，若像的包含严格，$t=u$ 会使两像相等，而 $u<t$ 会由已证方向使反向包含严格，都不可能；所以 $t<u$。如果 $t\ne u$，两者有严格大小，从而像不同，故单射。对有理数 q，典范嵌入反映有理大小，故 $L_F(q)=\{r\in\mathbb{Q}:r<q\}=q^*$。 □

定理 3.21 (下切映射保持域运算)**.** 映射 L_F 是保序域嵌入。具体地，

$$L_F(t+u) = L_F(t) + L_F(u), \qquad L_F(tu) = L_F(t)L_F(u),$$

并保持取负、零、单位元及非零元素的倒数。

证明. 先证加法。若有理数 $r \in L_F(t)+L_F(u)$，则可写 $r = a+b$，其中 $a, b \in \mathbb{Q}$，$a < t$，$b < u$，所以 $r < t+u$，即 $r \in L_F(t+u)$。反过来，若有理数 $r < t+u$，则 $r-u < t$。选有理数 a 满足 $r-u < a < t$，令 $b = r-a \in \mathbb{Q}$，则 $b < u$，且 $r = a+b$。所以 r 属于分割和，证明两向包含。已有 $L_F(0) = 0^*, L_F(1) = 1^*$。因而 $L_F(t) + L_F(-t) = L_F(0) = \mathbf{0}$，加法逆元唯一性给出 $L_F(-t) = -L_F(t)$。

再设 $t, u > 0$，证明乘法。若有理数 $r \in L_F(t)L_F(u)$ 且 $r < 0$，则 $r < tu$。若 $r \geq 0$，有正有理见证 $a < t$，$b < u$，$r < ab$；有序域中的正乘法给出 $ab < tu$，所以仍有 $r < tu$。这证明乘积分割包含于 $L_F(tu)$。

反过来，设有理数 $r < tu$。若 $r < 0$，它按定义属于乘积。设 $r \geq 0$。选自然数 $M > \max\{t, u, 1\}$。有理稠密性允许选正有理数 δ 满足

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{t}{2}, \frac{u}{2}, \frac{tu-r}{2M}\right\} \quad \text{（这些比较在}F\text{ 中）}.$$

再选有理数 $t-\delta < a < t$，$u-\delta < b < u$。则 $a, b > 0$，属于对应下切。并且

$$0 < tu - ab = t(u-b) + b(t-a) < M\delta + M\delta = 2M\delta < tu - r.$$

因此 $ab > r$，正见证 a, b 证明 $r \in L_F(t)L_F(u)$。正因子的乘法相容得证。

若 $t = 0$ 或 $u = 0$，两边均为零分割。若 $t < 0, u > 0$，令 $v = -t > 0$，则

$$L_F(tu) = L_F(-vu) = -L_F(vu) = -L_F(v)L_F(u) = L_F(t)L_F(u).$$

若 $t > 0, u < 0$，交换两个因子化到上一情形。若 $t < 0, u < 0$，令 $v = -t > 0, w = -u > 0$，则

$$L_F(tu) = L_F(vw) = L_F(v)L_F(w) = (-L_F(t))(-L_F(u)) = L_F(t)L_F(u).$$

乘法相容覆盖全部情况。当 $t \neq 0$，保序单射使 $L_F(t) \neq \mathbf{0}$，而

$$L_F(t)L_F(t^{-1}) = L_F(1) = \mathbf{1}.$$

逆元唯一性使 $L_F(t^{-1}) = L_F(t)^{-1}$。因此所有域运算均保持，保序性已在前一命题验证。 □

注 3.22. 这个定理没有声称每个 Archimedes 有序域都等于实数域。例如 $F = \mathbb{Q}$ 的下切映射只有有理分割作为像，不包含 α_2。下一步必须另外证明映射的满射性；域嵌入本身不能承担这一结论。

3.7 两种构造之间的明确同构

对 K 应用前两节，得到保序域嵌入

$$\Phi = L_K : K \longrightarrow \mathcal{D}, \qquad \Phi([x]) = \{q \in \mathbb{Q} : \widehat{q} < [x]\}.$$

按正类定义，它还有完全有理的描述

$$q \in \Phi([x]) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{Q},\ c > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N, \quad x_n > q + c. \tag{B}$$

式 (B) 的“统一余量 c”很重要：仅要求尾部 $x_n > q$，会错误地把 $q = 0$ 放进零列 $(1/n)$ 对应的下切。

定理 3.23 (两模型的保序域同构)**.** 映射 Φ 是从 K 到 $\mathcal{D}$ 的保序域同构。具体地，每个分割 α 可由下述有理二分列 $a=(a_n)$ 表示，并有 $\Phi([a])=\alpha$。

证明. 保序域嵌入已证明，只需给出每个分割的原像。选择有理数 $a_0\in\alpha$，$b_0\notin\alpha$。两侧分离使 $a_0<b_0$。令 $m_n=(a_n+b_n)/2$，若 $m_n\in\alpha$，取 $(a_{n+1},b_{n+1})=(m_n,b_n)$；若 $m_n\notin\alpha$，取 $(a_{n+1},b_{n+1})=(a_n,m_n)$。归纳可得

$$a_n\in\alpha,\quad b_n\notin\alpha,\quad a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n,\quad b_n-a_n=2^{-n}(b_0-a_0).$$

成员关系由所选分支维持，每一步的长度恰为上一长度的一半，故长度公式成立。

删去下标零，取 $n\ge 1$ 的左端点列。给定正有理 ε，取 N 使 $2^{-N}(b_0-a_0)<\varepsilon$。若 $m\ge n\ge N$，嵌套关系给出

$$0\le a_m-a_n\le b_n-a_n\le 2^{-N}(b_0-a_0)<\varepsilon.$$

若 $n\ge m$，交换指标得到同一绝对值估计。因此 a 是有理 Cauchy 列，定义了 $X=[a]\in K$。

若有理数 $q\in\alpha$，由无最大元性选 $r\in\alpha$，$r>q$。所有 $b_n\notin\alpha$，故 $b_n>r$。取 N 使 $2^{-N}(b_0-a_0)<(r-q)/2$，则对每个 $n\ge N$，

$$a_n=b_n-(b_n-a_n)>r-\frac{r-q}{2}=q+\frac{r-q}{2}.$$

正有理数 $c=(r-q)/2$ 给出式 (B) 的见证，所以 $q\in\Phi(X)$。

若 $q\notin\alpha$，分离性使每个 $a_n<q$。于是不存在正有理 c 和尾部使 $a_n>q+c$，所以 $q\notin\Phi(X)$。两种成员情况说明 $\Phi(X)=\alpha$，证明满射。因此 Φ 是保持序与域运算的双射，即所述同构。 □

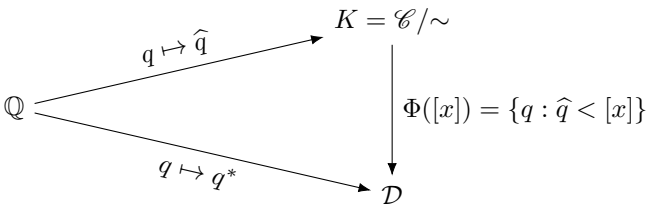


图 3.1: 两种实数模型之间的对应。两条从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathcal{D}$ 的路径相同，因为 $\Phi(\widehat{q})=q^*$。箭头间的相容性由保序域嵌入及满射证明保证。

推论 3.24 (商模型也有上确界性质)**.** K 的每个非空有上界子集都有上确界。

证明. 设 $E\subseteq K$ 非空，上界为 U。由于 Φ 保序，$\Phi(E)$ 非空且上界为 $\Phi(U)$。在分割域中令 $\sigma=\sup_{\mathcal{D}}\Phi(E)$，满射性给出 $S=\Phi^{-1}(\sigma)\in K$。对每个 $X\in E$，有 $\Phi(X)\le\sigma=\Phi(S)$，反映序关系得到 $X\le S$，故 S 是上界。若 V 是另一上界，$\Phi(V)$ 就是 $\Phi(E)$ 的上界，所以 $\sigma\le\Phi(V)$，再反映序得到 $S\le V$。故 $S=\sup_K E$。 □

例 3.25 (平方根二的代表列)**.** 第一章的二分端点列从 $n=1$ 起都是有理 Cauchy 列。因为 $b_n-a_n=2^{-n}$ 是零列，它们满足 $[a]=[b]$。对于 α_2，一个正有理中点 m 属于该分割恰好等价于 $m^2<2$，所以本节按成员关系二分时可取同一组端点。因此 $\Phi([a])=\alpha_2=\Phi([b])$。同构保乘法与有理常值，给出

$$\Phi([a]^2)=\alpha_2^2=2^*=\Phi(\widehat{2}).$$

由单射性，$[a]^2 = \widehat{2}$。这不是先把 a_n 的“实数极限”写作平方根，再倒过来定义这个类；类与映射均已独立建立。

命题 3.26 (商类与分割域中的极限相互对应)**.** *若 $x = (x_n)$ 是有理 Cauchy 列，令 $s = \Phi([x])$，则有理分割列 (x_n^*) 在 $\mathcal{D}$ 中收敛到 s。反过来，若同一列 (x_n^*) 收敛到 $t \in \mathcal{D}$，则 $t = \Phi([x])$。*

证明. 给定正有理 ε，命题 3.14 给出尾部

$$-\widehat{\varepsilon} < [x] - \widehat{x_n} < \widehat{\varepsilon}.$$

映射 Φ 保持序、减法与有理嵌入，因此该尾部满足

$$(-\varepsilon)^* < s - x_n^* < \varepsilon^*.$$

由第一章的绝对值区间刻画，这等价于 $|s - x_n^*| < \varepsilon^*$。分割域具有 Archimedes 性，有理误差基引理把它提升为全部正实误差下的收敛，故 x_n^* 收敛到 s。

若它也收敛到 t，由引理 3.15 的极限唯一性，$t = s$。因此我们可以在构造完成后说“类 $[x]$ 表示有理近似列的实数极限”，但这是模型对应定理的结论，不能倒过来作为构造 K 的前提。 □

3.8 完备有序域的唯一性究竟是什么意思

引理 3.27 (上确界性质强制 Archimedes 性)**.** *若有序域 F 的每个非空有上界子集都有上确界，则 F 是 Archimedes 有序域。*

证明. 反设 F 内的自然数集合有上界。它非空，按假设存在 $s = \sup_F \mathbb{N}$。因为 $s - 1 < s$，这个数不能仍是自然数集合的上界，否则违反最小性。故存在自然数 n 满足 $n > s - 1$。平移给出 $n + 1 > s$，然而 $n + 1$ 也是自然数，与 s 的上界性矛盾。因此自然数集合无上界，正是 Archimedes 性。 □

定理 3.28 (每个完备有序域同构于分割域)**.** *若有序域 F 具有上确界性质，则 $L_F : F \to \mathcal{D}$ 是保序域同构。*

证明. 上一引理使 F 具有 Archimedes 性，因此 L_F 已是保序域嵌入，只需证明满射。

给定分割 $\alpha \in \mathcal{D}$，把其有理成员通过典范嵌入看成 F 中的集合 E。由于 α 非空，$E \neq \varnothing$。选有理数 $b \notin \alpha$，分离引理使每个 $a \in \alpha$ 都小于 b；有理嵌入保序，故 b 在 F 中是 E 的上界。令 $s = \sup_F E$。

若 $q \in \alpha$，选 $r \in \alpha$ 使 $q < r$。由于 $r \in E$，有 $r \leq s$，故 $q < s$，即 $q \in L_F(s)$。反过来，若 $q \in L_F(s)$ 但 $q \notin \alpha$，则分离引理使所有 $a \in \alpha$ 都小于 q，所以 q 是 E 的 F 中上界。最小性要求 $s \leq q$，与 $q < s$ 矛盾。因此 $L_F(s) = \alpha$，证明满射。 □

定理 3.29 (完备有序域的唯一保序域同构)**.** 设 F, G 都是具有上确界性质的有序域。则存在唯一保持单位元、域运算与序的同构 $T : F \to G$。它固定两域中典范对应的每个有理数。

证明. 存在性由前一定理给出明确映射

$$T = L_G^{-1} \circ L_F.$$

两映射都是双射，且正向与反向都保持序与域运算，所以它们的复合也是保序域同构。为核对逆映射的运算保持，例如令 $A = L_G(u), B = L_G(v)$，则 $A+B = L_G(u+v)$，从而 $L_G^{-1}(A+B) = u + v = L_G^{-1}(A) + L_G^{-1}(B)$；乘法用 $AB = L_G(uv)$ 给出同一核对。大小的双向保持已包含在严格保序的等价陈述中。

证明唯一性。任何所述同构 $S : F \to G$ 都满足 $S(1) = 1$；由加法相容，归纳得 $S(n) = n$；由 $S(0) = 0$ 和加法逆元相容，得 $S(-n) = -n$；由非零元素的乘法逆元相容，得到 $S(p/q) = p/q$。因此它固定全部有理数。

对每个 $t \in F$ 与 $q \in \mathbb{Q}$，保序和保序的逆映射给出

$$q < t \text{ 在} F \text{ 中} \quad \Longleftrightarrow \quad S(q) < S(t) \text{ 在} G \text{ 中} \quad \Longleftrightarrow \quad q < S(t) \text{ 在} G \text{ 中}.$$

因此 $L_G(S(t)) = L_F(t)$。由于 L_G 单射，必有 $S(t) = L_G^{-1}(L_F(t)) = T(t)$。对每个 t 都成立，所以 $S = T$，唯一性得证。 □

这个定理比较的是结构，不要求分割集合、有理列等价类和其他构造在集合意义下相等。它还说明两个模型中的 “同一个实数” 有可检验的标准：它们下方的有理数完全相同。这里能由全部有理比较确定一个元素，依赖 Archimedes 性所保证的有理稠密性。

命题 3.30 (序可以从域运算恢复)**.** 在具有上确界性质的有序域中，严格正元素恰好是非零元素的平方。因此两个这样的域之间，任何保持单位元的域同态都自动保序，并且必为上一条定理中的唯一同构。特别地，实数域的任何保持单位元的域自同态都是恒等映射。

证明. 非零平方为正是第一章已证的有序域结论。反过来，设 $a > 0$ 属于完备有序域 F。保序域同构 L_F 把它送到分割域中的正元素 $L_F(a)$。第二章的正整数次根定理给出 $w > 0$ 且 $w^2 = L_F(a)$。令 $v = L_F^{-1}(w) > 0$，保乘法得到 $v^2 = a$。这证明正数与非零平方的刻画。

设 $S : F \to G$ 是保持单位元的域同态，先验证它单射。若 $S(v) = 0$ 且 $v \neq 0$，则 $1 = S(1) = S(vv^{-1}) = S(v)S(v^{-1}) = 0$，与 G 的域公理矛盾。因此其核只有零，若 $S(u) = S(v)$，则 $S(u - v) = 0$ 使 $u = v$。若 $a > 0$，写 $a = v^2$，$v \neq 0$，于是 $S(a) = S(v)^2 > 0$。若 $u < v$，则 $v - u > 0$，从而 $S(v) - S(u) = S(v - u) > 0$，所以严格保序；反向大小由三歧性和单射性排除其他两种可能，也得到反映序关系。

同态保持单位元与域运算，逐次作用于整数、取负与倒数，便固定典范有理数。因此对每个 $t \in F$，仍有 $L_G(S(t)) = L_F(t)$。由 L_G 的单射性，$S = L_G^{-1} \circ L_F$；右边是已经证明的双射，所以 S 自动满射，是唯一同构。当 $F = G$ 时，恒等映射本身就是这样的同构，唯一性使全部这样的自同态等于它。 □

3.9 Archimedes 假设不能随意删去

例 3.31 (有无限大元素的有序域)**.** 使用代数中的有理函数域

$$F = \mathbb{Q}(T) = \{P(T)/Q(T) : P, Q \in \mathbb{Q}[T],\ Q \neq 0\},$$

其中 T 是不定元，两个分式按交叉乘积相等来识别。对非零多项式 P，记其最高次项系数为 $\ell(P)$。规定非零有理函数为正，当且仅当

$$\frac{\ell(P)}{\ell(Q)} > 0 \qquad \text{对于} P(T)/Q(T).$$

这相当于比较最高次项的符号，但这里不借助函数的实数无穷远极限。

先验证符号与分式表示无关。若 $P/Q = R/S \neq 0$，则 $PS = RQ$，故 $\ell(P)\ell(S) = \ell(R)\ell(Q)$。除以非零数 $\ell(Q)\ell(S)$，得到 $\ell(P)/\ell(Q) = \ell(R)/\ell(S)$，两种表示的符号一致。乘积的最高次项系数相乘，故两个正有理函数的积仍为正。

对于两个正有理函数，可把各自分子、分母同时乘 -1，使两个分母的最高次项系数都为正。这时两个分子的最高次项系数也为正。记两函数为 $P/Q, R/S$，则和为 $(PS+RQ)/(QS)$。PS 与 RQ 各有正的最高次项系数；若次数不同，和的最高项来自次数较高者，若次数相同，最高项系数是两个正数之和。因此 $PS+RQ$ 的最高项系数严格为正，分母 QS 也如此，故和为正。

每个非零函数恰好自身为正或其负为正。定义 $f < g$ 当且仅当 $g - f$ 为正。于是差的正负给出三歧性，正数和的封闭给出传递性，平移不改变差，正乘积封闭给出序与乘法的相容性。这验证了有序域所需的序公理。

然而对每个自然数 n，函数 $T-n$ 的最高项系数为 1，故 $T > n$。这个域不满足 Archimedes 性。更具体地，$1/T > 0$，但对每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{T} = \frac{T-n}{nT} > 0,$$

所以 $0 < 1/T < 1/n$；它是一个正的无穷小。

在这个例子中，集合 $\{q \in \mathbb{Q} : q < T\}$ 等于整个 $\mathbb{Q}$，不满足分割的真子集要求。另一方面，$1/T$ 下方的有理数虽然不占满 $\mathbb{Q}$，却出现了另一个问题。确实，若 $q \leq 0$，则 $q < 1/T$；若 $q > 0$，有理数的 Archimedes 性给出 n 使 $1/n < q$，而 $1/T < 1/n < q$，所以 q 不在 $1/T$ 下方。因此

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < 1/T\} = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\},$$

它含最大元 0，不是分割；而 0 的下切为 $\{q : q < 0\}$。这也直接展示：没有有理稠密性，“下切没有最大元”这一步就可能失败。

注 3.32 (一个必须分清的边界)**.** 上面的两个下方集合并不相同，差别正是有理端点 0。如果把其中含最大元的集合删去最大元，再比较结果，则二者都会变成 0^*，从而丢失 $0 < 1/T$ 的信息。更直接地，两个正无穷小 $1/T$ 与 $2/T$ 的下方有理集合都是 $\{q : q \leq 0\}$：负数和零都更小；对正有理数 q，选 n 使 $2/n < q$，再用 $2/T < 2/n$ 排除它。这两个不同元素的有理比较完全一致。所以不能在一般非 Archimedes 域中沿用“有理下切自动给出单射”的结论。

本章已独立构造有理 Cauchy 列商域，建立它与分割域的明确同构，并证明完备有序域的唯一性。第四章将系统证明完备性等价闭环，处理子列与上下极限；开覆盖紧性则在第五章定义开集与覆盖之后证明。

4 数列、完备性等价链与上下极限

4.1 本章的假设分层

前三章已经构造了实数域。本章仍要暂时退回到一般有序域 F，因为“在实数中几条性质都成立”与“这些性质互相蕴含”是两个不同命题。证明某个方向时，只使用该方向明确给出的条件，不调用已经在特定实数模型中成立的全部结论。

极限代数与子列的基础论证只需有序域。涉及 $1/n$ 与二分长度趋零时，另加 Archimedes 性。等价链固定在一个 Archimedes 有序域中进行，先不假设上确界性质。最后各节回到 $\mathbb{R}$，使用已经建立的完备性研究上下极限。

定义 4.1 (收敛及其否定)**.** 对于 F 中数列 $(x_n)_{n\ge 1}$ 与 $a\in F$，记 $x_n\to a$，若

$$\forall \varepsilon\in F,\ \varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\ge N,\quad |x_n-a|<\varepsilon.$$

不收敛到这个指定的 a，其精确含义是

$$\exists \varepsilon_0\in F,\ \varepsilon_0>0,\quad \forall N\in\mathbb{N},\quad \exists n\ge N,\quad |x_n-a|\ge\varepsilon_0.$$

数列不收敛，则是对每个 $a\in F$，后一个否定式都成立；允许相应的 ε_0 随 a 改变。

量词的位置决定证明责任。收敛时 N 可以依赖 ε、数列和候选极限，但选好以后，必须对尾部的全部 n 生效；不能再依赖一个随后才给出的 n。否定收敛时，只需在每个尾部找出一个失败指标，指标可以依赖尾部起点。

定义 4.2 (有界、单调与 Cauchy)**.** 数列有界，指存在 $M\in F,\ M>0$，使每个 n 都有 $|x_n|\le M$。若每个 n 都有 $x_n\le x_{n+1}$，称为单调递增（这里允许相等）；反向不等式定义单调递减。数列是 Cauchy 列，指

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall m,n\ge N,\quad |x_m-x_n|<\varepsilon.$$

其否定是

$$\exists\varepsilon_0>0,\quad \forall N,\quad \exists m,n\ge N,\quad |x_m-x_n|\ge\varepsilon_0.$$

本章不加说明的误差都属于当前有序域。

命题 4.3 (不使用完备性的基础事实)**.** *极限唯一；收敛列有界；收敛列是 Cauchy 列；Cauchy 列有界。删改有限多项不改变极限和 Cauchy 性。*

证明. 极限唯一与收敛推出 Cauchy 已在引理 3.15 中只用有序域公理证明，因此适用于当前 F。

若 $x_n\to a$，取误差 1 得到阈值 N，使 $n\ge N$ 时 $|x_n|\le |a|+|x_n-a|<|a|+1$。取有限和

$$M=|a|+1+\sum_{j=1}^{N}|x_j|>0$$

就同时控制尾部和前面的有限多项，证明有界。若是 Cauchy 列，以误差 1 取 N，则 $n\ge N$ 时 $|x_n|\le |x_N|+|x_n-x_N|<|x_N|+1$。用 $M=1+\sum_{j=1}^{N}|x_j|$ 控制全列即可。

如果两列从第 K 项起相同，把每个原阈值 N 改成 $\max\{N,K\}$，所有尾部估计都保持。这个论证沿两个方向都成立，分别给出有限项改动下极限和 Cauchy 性的不变性。 □

例 4.4 (显式阈值而非“足够大”)**.** 在 Archimedes 有序域中，给定 $\varepsilon>0$，取整数 $N>1/\varepsilon$。当 $n\ge N$ 时，$0<1/n\le 1/N<\varepsilon$，故 $1/n\to 0$。又

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

同一个阈值证明 $n/(n+1)\to 1$。

若 $0<q<1$，令 $h=q^{-1}-1>0$。归纳证明 $(1+h)^n\ge 1+nh$：首项等号成立；从第 n 步到下一步，

$$(1+h)^{n+1}\ge (1+nh)(1+h)=1+(n+1)h+nh^2\ge 1+(n+1)h.$$

因此 $0<q^n\le 1/(1+nh)<1/(nh)$。选 $N>1/(h\varepsilon)$，尾部满足 $q^n<\varepsilon$，故 $q^n\to 0$。当 $q=0$ 时从第一项起恒为零；当 $-1<q<0$ 时，$|q^n|=|q|^n$，应用已证的正数情形得到同一结论。

4.2 极限代数与不等式的边界

定理 4.5 (和、积、倒数与商)**.** 设 $x_n\to a$，$y_n\to b$。则

$$x_n+y_n\to a+b,\quad -x_n\to -a,\quad x_ny_n\to ab,\quad |x_n|\to|a|.$$

若 $b\neq 0$，则 y_n 在某个尾部非零，且 $1/y_n\to 1/b$、$x_n/y_n\to a/b$。尾部之前的商可以任意补定义有限多项。

证明. 给定 $\varepsilon>0$，分别以 $\varepsilon/2$ 控制 $|x_n-a|$ 和 $|y_n-b|$，取共同阈值后，

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|\le |x_n-a|+|y_n-b|<\varepsilon.$$

取负时误差绝对值完全相同，所以 $-x_n\to -a$。反三角不等式给出 $\big||x_n|-|a|\big|\le |x_n-a|$，故原收敛阈值也证明绝对值收敛。

对于乘积，先取 $M\ge 1$ 使所有 $|x_n|\le M$。恒等式 $x_ny_n-ab=x_n(y_n-b)+b(x_n-a)$ 给出

$$|x_ny_n-ab|\le M|y_n-b|+|b||x_n-a|.$$

选共同尾部满足

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M},\qquad |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}.$$

第一项小于 $\varepsilon/2$，第二项不大于 $|b|\varepsilon/(2(|b|+1))<\varepsilon/2$，所以总误差小于 ε。

若 $b\neq 0$，先取尾部使 $|y_n-b|<|b|/2$。于是 $|y_n|>|b|/2>0$。再把尾部增大，使 $|y_n-b|<\varepsilon|b|^2/2$，便有

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|y_n-b|}{|y_n||b|}\le\frac{2|y_n-b|}{|b|^2}<\varepsilon.$$

倒数收敛得证。最后把 x_n/y_n 写作 $x_n(1/y_n)$，使用刚刚证明的乘积极限。这些证明只使用域运算、绝对值和有限多个阈值的最大值，没有使用上确界。 □

命题 4.6 (保序与最终符号)**.** *若 $x_n \to a$，$y_n \to b$，且某个尾部满足 $x_n \le y_n$，则 $a \le b$。若 $a < b$，则某个尾部满足 $x_n < y_n$。特别地，正极限使尾部严格为正，负极限使尾部严格为负。*

证明. 第一问反设 $a > b$，取 $\varepsilon = (a-b)/3 > 0$。在共同尾部，有

$$x_n > a - \varepsilon > b + \varepsilon > y_n,$$

其中中间差为 $a - b - 2\varepsilon = (a-b)/3 > 0$，与假设矛盾。第二问取 $\varepsilon = (b-a)/3 > 0$，共同尾部满足

$$x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n.$$

对于 $a > 0$，令常值零列扮演第一列，由 $0 < a$ 得尾部 $0 < x_n$；对于 $a < 0$，把 x_n 与常值零列比较，得到 $x_n < 0$。 □

注 4.7 (严格不等号不会自动保留)**.** 正列 $x_n = 1/n$ 在 Archimedes 域中收敛到 0，所以“所有项严格大于零”不能推出“极限严格大于零”。若另有固定 $c > 0$ 使尾部 $x_n \ge c$，保序性才给出 $a \ge c > 0$。统一间隙与逐项严格正是不同条件。

定理 4.8 (夹逼)**.** *若某个尾部满足 $u_n \le x_n \le v_n$，且 $u_n \to a$，$v_n \to a$，则 $x_n \to a$。*

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，取共同尾部同时满足原夹逼关系及 $|u_n - a| < \varepsilon$，$|v_n - a| < \varepsilon$。则 $a - \varepsilon < u_n \le x_n \le v_n < a + \varepsilon$，绝对值的区间刻画给出 $|x_n - a| < \varepsilon$，这就是收敛。 □

4.3 子列：严格递增的指标不能省略

定义 4.9 (子列及子列极限)**.** 若 $n_1 < n_2 < \cdots$ 是自然数的严格递增列，则 $(x_{n_k})_{k \ge 1}$ 称为 (x_n) 的子列。若此子列收敛到 a，称 a 为原列的一个子列极限。

引理 4.10 (指标与继承性)**.** *严格递增的自然数列满足 $n_k \ge k$。收敛列的每条子列收敛到同一极限；Cauchy 列的每条子列仍为 Cauchy 列。*

证明. $n_1 \ge 1$。若 $n_k \ge k$，由整数的严格递增性 $n_{k+1} \ge n_k + 1 \ge k + 1$，归纳得指标估计。若 $x_n \to a$，给定误差取原列阈值 N，则 $k \ge N$ 时 $n_k \ge k \ge N$，所以 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$。若原列为 Cauchy，取其阈值 N，则 $j, k \ge N$ 时 $n_j, n_k \ge N$，所以 $|x_{n_j} - x_{n_k}| < \varepsilon$。两种性质都只用指标估计传递。 □

命题 4.11 (Cauchy 列有一条收敛子列就足够)**.** *在任意有序域中，若 (x_n) 是 Cauchy 列，且 $x_{n_k} \to a$，则 $x_n \to a$。*

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，取 N 使 $m, n \ge N$ 时 $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$。由子列收敛，取 K 使 $k \ge K$ 时 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$。固定一个 $k \ge \max\{K, N\}$，则 $n_k \ge k \ge N$。对每个原列指标 $n \ge N$，都有

$$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

固定的子列项为整个原列尾部提供同一比较点，所以结论是原列收敛，而不只是子列收敛。 □

命题 4.12 (不收敛的子列见证)**.** *在任意有序域中：*

1. *若 x_n 不收敛到指定的 a，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和一条子列，使每个 k 都满足 $|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$。*
2. *$x_n \to a$ 当且仅当原列的每条子列都有一条进一步子列收敛到 a。*

证明. 第一问用收敛的否定式选定 ε_0。选 n_1 为满足 $|x_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0$ 的最小指标；选好 n_k 后，在 $n \geq n_k + 1$ 中选满足同样不等式的最小指标 n_{k+1}。候选非空由否定式保证，最小指标由自然数良序保证。于是指标严格递增，每项都失败。

第二问的正向：原列收敛时每条子列已收敛到 a，再取它自身作为进一步子列即可。反向若原列不收敛到 a，第一问给出所有项都距 a 至少 ε_0 的子列；它的每条进一步子列仍保留这条不等式，不可能收敛到 a，违反假设。 □

例 4.13 (同一列的两个子列极限)**.** 在 $\mathbb{R}$ 中，$x_n = (-1)^n$ 的偶指标子列恒为 1，奇指标子列恒为 -1，故它有两个不同子列极限。如果原列收敛，继承性会使两条子列有同一个极限，矛盾。因此有界性本身不能保证收敛。

4.4 七种完备性表述与证明路线

定义 4.14 (本章比较的性质)**.** 固定一个 Archimedes 有序域 F。下面的区间和极限全部在 F 内解释。

(S) 每个非空且有上界的 $A \subseteq F$，都有属于 F 的上确界。

(I) 每个非空且有下界的 $A \subseteq F$，都有属于 F 的下确界。

(M) 每条单调有界的 F 中数列，都收敛到 F 中一点。

(N) 若非空闭区间 $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in F : a_n \leq x \leq b_n\}$ 满足 $I_{n+1} \subseteq I_n$，且 $b_n - a_n \to 0$，则 $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ 恰含一点。

(B) 每条有界的 F 中数列，都有一条收敛到 F 中一点的子列。

(C) 每条 F 中 Cauchy 列，都收敛到 F 中一点。

(P) 每个有界无限集 $E \subseteq F$，都有一个属于 F 的聚点。这里 c 是聚点，指每个 $\varepsilon > 0$ 都有 $x \in E$ 满足 $0 < |x - c| < \varepsilon$；不要求 $c \in E$。

定理 4.15 (完备性的等价表述)**.** *在固定的 Archimedes 有序域中，定义 4.14 的七种性质等价。*

证明分散在以下各节，路线如图 4.1。这里每一个箭头都有单独的证明；最后一个箭头回到起点，才形成闭环。开覆盖形式的紧性尚未定义，将在第五章另接入这条等价链。

命题 4.16 (上确界与下确界互换)**.** *在任意有序域中，(S) 与 (I) 等价。*

证明. 设 (S) 成立，$A \neq \varnothing$ 有下界 d。集合 $-A = \{-x : x \in A\}$ 非空，且 $-d$ 是其上界。令 $t = \sup(-A)$。每个 $x \in A$ 满足 $-x \leq t$，故 $-t \leq x$，所以 $-t$ 是 A 的下界。若 v 也是下界，则对每个 $x \in A$ 有 $v \leq x$，即 $-x \leq -v$；于是 $-v$ 是 $-A$ 的上界，$t \leq -v$，也就是 $v \leq -t$。因此 $\inf A = -t$。

反向设 (I) 成立，$A \neq \varnothing$ 有上界 u，则 $-A$ 以下界 $-u$ 有界。令 $d = \inf(-A)$。从 $d \leq -x$ 得每个 $x \in A$ 都满足 $x \leq -d$。若 v 是 A 的任意上界，则 $-v$ 是 $-A$ 的下界，故 $-v \leq d$，即 $-d \leq v$。所以 $\sup A = -d$。 □

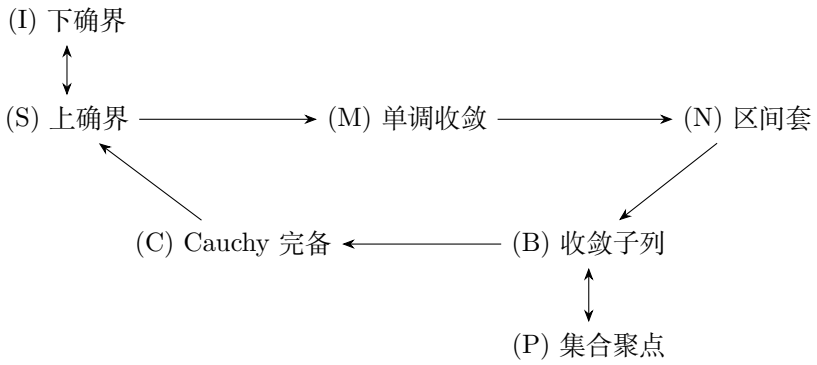


图 4.1: 同一个 Archimedes 有序域内的证明路线；图中没有把待证性质并列当作前提。

4.5 从上确界到区间套

命题 4.17 ((S) 推出 (M))**.** *有上确界性质的有序域中，每条单调有界列收敛。*

证明. 先设 x_n 递增且有上界。取值集 $A = \{x_n : n \geq 1\}$ 非空、有上界，令 $s = \sup A$。给定 $\varepsilon > 0$，$s - \varepsilon$ 小于最小上界，所以它不是上界，存在 N 满足 $x_N > s - \varepsilon$。递增性给出对所有 $n \geq N$，

$$s - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s.$$

因此 $|x_n - s| < \varepsilon$，即 $x_n \to s$。特别地，递增有界列的极限等于其全部项的上确界。

若 x_n 递减且有下界，则 $y_n = -x_n$ 递增且有上界。已证部分给 $y_n \to t = \sup\{-x_n : n \geq 1\}$。由取负的极限法则，$x_n \to -t$；前一命题识别 $-t = \inf\{x_n : n \geq 1\}$。 □

命题 4.18 ((M) 推出 (N))**.** *若单调有界列都收敛，则长度趋零的嵌套非空闭区间恰有一个公共点。*

证明. 由区间包含关系和非空性，端点满足

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

所以 a_n 递增且以上界 b_1 有界，b_n 递减且以下界 a_1 有界。由 (M)，存在 $a, b \in F$，使 $a_n \to a$，$b_n \to b$。极限代数给 $b_n - a_n \to b - a$，而假设给这个差趋于零。极限唯一性推出 $a = b$，记共同值为 c。

固定 k。对所有 $n \geq k$，有 $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$。将两端视为常值列，利用保序性得到 $a_k \leq c \leq b_k$。这对每个 k 都成立，所以 $c \in \bigcap_k I_k$。

若 c, d 都属于交集，则每个 n 都有 $|c - d| \leq b_n - a_n$。若 $c \neq d$，取误差 $|c - d|/2 > 0$，长度趋零给某个 n 使 $b_n - a_n < |c - d|/2$，与前面的不等式矛盾。因此公共点唯一。 □

命题 4.19 (上确界给出的另一种区间套证明)**.** *在具有 (S) 的有序域中，任意嵌套非空闭区间列都有公共点；不要求长度趋零。但公共点可能不唯一。*

证明. 令 $A = \{a_n : n \geq 1\}$。它非空。固定任意 k：当 $n \geq k$ 时，$a_n \leq b_n \leq b_k$；当 $n < k$ 时，$a_n \leq a_k \leq b_k$。故每个 b_k 都是 A 的上界。由 (S) 令 $c = \sup A$，则对每个 k，$a_k \leq c \leq b_k$，给出公共点。若各区间恒等于 $[0, 1]$，交集就是整个 $[0, 1]$，所以没有长度条件时不能断言唯一。 □

例 4.20 (闭、有界、趋零各自控制什么)**.** 在 $\mathbb{R}$ 中，开区间 $I_n=(0,1/n)$ 嵌套且长度趋零，交集却为空：若 x 在交集中，则 $x>0$，选 $n>1/x$，便有 $1/n<x$，与 $x<1/n$ 矛盾。闭的无界集合 $[n,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x\ge n\}$ 也嵌套而交空，因为任何实数都小于某个整数。区间 $[-1/n,1/n]$ 的交集为 $\{0\}$；区间 $[0,1+1/n]$ 的长度虽然严格递减，交集仍为 $[0,1]$。后一断言的验证是：$[0,1]$ 中的点属于每个区间；而 $x>1$ 时选 $n>1/(x-1)$，即有 $1+1/n<x$。因此“长度严格递减”不能代替“长度趋零”。

4.6 二分选择、收敛子列与 Cauchy 判别

命题 4.21 ((N) 推出 (B))**.** *在 Archimedes 有序域中，区间套性质推出：每条有界数列都有收敛子列。*

证明. 设所有 $|x_n|\le M$，其中 $M>0$。以 $I_0=[-M,M]$ 开始；其中含有原列的全部指标。若已得 $I_j=[a_j,b_j]$，且

$$J_j=\{n\in\mathbb{N}:x_n\in I_j\}$$

是无限集，令 $m_j=(a_j+b_j)/2$。两个闭半区间 $[a_j,m_j]$、$[m_j,b_j]$ 的并为 I_j。若左半区间对应的指标集无限，选它作 I_{j+1}；若左半对应指标集有限，右半对应指标集必须无限，否则两个有限集的并将覆盖无限的 J_j，矛盾。中点可以同时属于两半，不影响此论证。每一步都得到嵌套闭区间，且

$$b_j-a_j=\frac{2M}{2^j}.$$

例 4.4 在 Archimedes 假设下说明此长度趋于零。因此 (N) 给出唯一共同点 $c\in F$。

下面从区间中选的是原列的指标，而非把区间中不同数值的数目当作指标数目。取 n_1 为 J_1 的最小指标。已选 n_{k-1} 后，因 J_k 无限，而 $\{1,\dots,n_{k-1}\}$ 有限，集合 $\{n\in J_k:n>n_{k-1}\}$ 非空；取其最小元为 n_k。于是 n_k 严格递增，$x_{n_k},c\in I_k$，故

$$|x_{n_k}-c|\le b_k-a_k=\frac{2M}{2^k}\longrightarrow 0.$$

夹逼定理给出 $x_{n_k}\to c$。 □

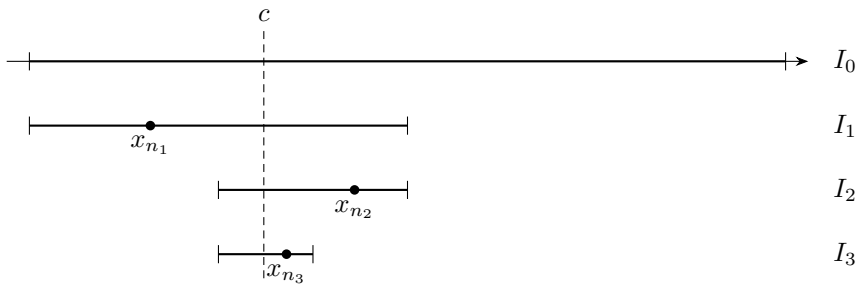


图 4.2: 一种二分选择示意。每个选定区间含无限多个原指标；选出的 n_k 还须严格递增。图不预定实际数列的取值。

命题 4.22 ((B) 推出 (C))**.** *若每条有界列有收敛子列，则每条 Cauchy 列收敛。*

证明. 设 x_n 为 Cauchy 列。命题 4.3 给出其有界性，所以 (B) 提供收敛子列 $x_{n_k}\to c$。命题 4.11 已证明，Cauchy 条件将这条子列的极限传给整个尾部，故 $x_n\to c$。此方向不需要另外的 Archimedes 假设。 □

4.7 从 Cauchy 完备恢复上确界

这是闭环中必须特别留意的一步：候选极限出现以前，不能写“取 $\sup A$”，也不能借用尚未由当前假设推出的区间套定理。二分法将直接构造两条 Cauchy 端点列。

命题 4.23 ((C) 推出 (S))**.** *在 Archimedes 有序域中，若每条 Cauchy 列收敛，则每个非空有上界集合都有上确界。*

证明. 给定非空有上界的 $A \subseteq F$。若 A 有最大元 m，则 m 是上界，而任何上界都至少为 m，所以 $m = \sup A$。

以下设 A 无最大元。选 $a_0 \in A$，选任意上界 b_0。因 a_0 不是最大元，存在 $x \in A$ 使 $x > a_0$，从而 $a_0 < b_0$。设 $L = b_0 - a_0 > 0$。递归保持

$$a_n \text{ 不是} A \text{ 的上界}, \qquad b_n \text{ 是} A \text{ 的上界}. \tag{*}$$

已得端点后，令 $m_n = (a_n + b_n)/2$。若 m_n 是上界，置 $a_{n+1} = a_n$，$b_{n+1} = m_n$；若 m_n 不是上界，置 $a_{n+1} = m_n$，$b_{n+1} = b_n$。这两个互斥情形覆盖全部可能，故递归定义明确，且 (*) 在每一步保留。这里后续的 a_n 不必属于 A，不变量只要求它不是上界。

区间嵌套，且归纳给出 $b_n - a_n = L/2^n$。给定 $\varepsilon > 0$，由 Archimedes 性下的几何列估计取 N 使 $L/2^N < \varepsilon$。对 $m, n \geq N$，四个端点均在 $[a_N, b_N]$ 中，所以

$$|a_m - a_n| \leq L/2^N < \varepsilon, \qquad |b_m - b_n| \leq L/2^N < \varepsilon.$$

因此两条端点列都是 Cauchy 列。由 (C)，有 $a_n \to s$，$b_n \to t$。差的极限和 $b_n - a_n \to 0$ 给出 $t - s = 0$，故 $t = s$。

对任意 $x \in A$，(*) 给 $x \leq b_n$ 对所有 n 成立；令 n 趋于无穷，保序性推出 $x \leq s$，因此 s 是 A 的上界。若 $u < s$，取误差 $(s - u)/2$，存在 n 满足

$$a_n > s - \frac{s-u}{2} = \frac{s+u}{2} > u.$$

由于 a_n 不是上界，存在 $x \in A$ 使 $x > a_n > u$。所以每个 $u < s$ 都不是上界。这就证明 s 是最小上界。 □

注 4.24 (闭环中 Archimedes 性的具体位置)**.** 命题 4.17、4.18、4.22 不另需 Archimedes 性；二分长度趋零用于 4.21 和 4.23。上确界性质自身会推出 Archimedes 性，见引理 3.27。但是在从 (C) 出发的证明中，还没有 (S)，不能先借这一引理取得 Archimedes 性。因此等价定理统一明确假定 F 是 Archimedes 域。

到此已经证明

$$\text{(S)} \Longrightarrow \text{(M)} \Longrightarrow \text{(N)} \Longrightarrow \text{(B)} \Longrightarrow \text{(C)} \Longrightarrow \text{(S)}, \qquad \text{(S)} \Longleftrightarrow \text{(I)}.$$

在实数域中这些性质全部成立：第二章已给出 (S)；本章则解释它们为何能彼此转化，而非仅逐条引用实数模型的既有结论。

推论 4.25 (实数列的 Cauchy 收敛准则)**.** *实数列收敛到某个实数，当且仅当它是 Cauchy 列。*

证明. 必要性是命题 4.3。充分性从实数的上确界性质出发，依次使用本章已证的 (S) ⇒ (M) ⇒ (N) ⇒ (B) ⇒ (C)。所以验证实数列收敛时，可以先控制任意两个尾部项的距离，不必事先猜出极限值；但取值域必须提供这里用到的完备性。 □

4.8 无限集合的聚点与数列的子列

数列允许重复同一个值，集合不记录重复次数。因此集合版本与数列版本之间必须分清“无限多个指标”与“无限多个不同值”。

引理 4.26 (聚点附近有无限多个不同点)**.** *在有序域中，若 c 是 E 的聚点，则每个 $\varepsilon>0$ 对应的集合*

$$\{x\in E : 0<|x-c|<\varepsilon\}$$

都是无限集。

证明. 反设某个这样的集合有限。若它为空，聚点定义在半径 ε 处已失败。否则将它写成 $\{z_1,\dots,z_r\}$，每个距离 $d_j=|z_j-c|$ 都严格为正。有限集有最小值（逐个比较即可），所以 $\delta=\min\{\varepsilon,d_1,\dots,d_r\}/2>0$。聚点定义给出 $x\in E$，使 $0<|x-c|<\delta$。因为 $\delta<\varepsilon$，此 x 必为某个 z_j；但 $|z_j-c|=d_j\geq 2\delta$，矛盾。 □

命题 4.27 ((B) 与 (P) 等价)**.** *在 Archimedes 有序域中，有界数列的收敛子列性质与有界无限集合的聚点性质等价。*

证明. 先设 (B)。给定有界无限集 E，递归选取互不相同的点 $z_1,z_2,\dots\in E$：选好有限多个后，$E\setminus\{z_1,\dots,z_k\}$ 非空，可以再选一个。这里采用通常集合论背景中的依赖选择原则（完整选择公理推出它）。只选出了一个可数无限子集，没有声称列举整个 E；E 本身可以不可数。有界列 (z_k) 由 (B) 有收敛子列 $z_{k_j}\to c\in F$。给定 $\varepsilon>0$，尾部所有项都距 c 小于 ε。它们互不相同，至多一项等于 c，因此尾部中能取一项满足 $0<|z_{k_j}-c|<\varepsilon$。所以 c 为 E 的聚点。

反向设 (P)，给定有界列 x_n，令其取值集 $E=\{x_n : n\geq 1\}$。若 E 有限，至少一个 $c\in E$ 出现无限多次。否则每个值对应的指标集有限，有限多个有限集的并有限，却应等于 $\mathbb{N}$，矛盾。对这个 c，每次取大于上次指标且值为 c 的最小指标，便得常值子列，收敛于 c。

若 E 无限，由 (P) 取聚点 $c\in F$。令 $n_0=0$；已取 n_{k-1} 后，引理 4.26 保证 $0<|x-c|<1/k$ 的 E 中不同值有无限多个。去掉有限前缀取值 $\{x_1,\dots,x_{n_{k-1}}\}$，仍至少留下一点。这点在原列出现的某个指标必大于 n_{k-1}。因此集合

$$\{n>n_{k-1} : 0<|x_n-c|<1/k\}$$

非空；取最小指标为 n_k。指标严格递增，且 $|x_{n_k}-c|<1/k\to 0$，故 $x_{n_k}\to c$。这里最后一步明确使用 Archimedes 性。 □

命题 4.27 补上最后一条双向联系，从而完成定理 4.15 的全部证明。聚点定义中的 $0<|x-c|$ 排除了单纯反复取同一个点的假见证；若删去 $0<$，任何属于 E 的孤立点都会被误认作聚点。

例 4.28 (同一个有理缺口使所有性质失败)**.** 第一章已构造有理端点列 $a_n^2<2<b_n^2$，其中 $1\leq a_n<b_n\leq 2$，区间嵌套，长度为 2^{-n}，每一步恰有一个端点改变。两端点列有理、有界、Cauchy。若在 $\mathbb{Q}$ 中 $a_n\to q$，由于 $0\leq b_n-a_n\to 0$，也有 $b_n\to q$。极限代数与保序性给出 $q^2\leq 2\leq q^2$，即 $q^2=2$，违反第一章的无有理平方根结论。这同时给出 (C)、(M) 在 $\mathbb{Q}$ 中的失败。

若有有理数属于全部 $[a_n,b_n]$，保序平方给出 $a_n^2\leq q^2\leq b_n^2$，而

$$0\leq q-a_n\leq b_n-a_n=2^{-n},\qquad 0\leq b_n-q\leq 2^{-n}$$

使两端点都趋于 q，故极限代数仍给 $q^2=2$。因此 (N) 失败。若 a_n 有有理收敛子列，因它是 Cauchy 列，命题 4.11 会给出整列有理收敛，矛盾，所以 (B) 失败。第一章已经直接证明 (S) 失败，取负后 (I) 也失败；已证的 (P) 推出 (B) 又排除 (P)。这里每一步失败都在同一 Archimedes 域 $\mathbb{Q}$ 中解释，并没有把“有界”误当成“完备”。

4.9 扩充实数与尾部确界

以下回到实数域 $\mathbb{R}$。收敛未必发生，但我们仍可追踪“每个尾部最终能高到哪里、低到哪里”。例如 $(-1)^n$ 没有极限，却有稳定的上下边界；$(-1)^n n$ 则在每个尾部都向正负两方无界。为了在一个记号体系中处理这些情形，先扩充序。

定义 4.29 (扩充实数的序与收敛)**.** 令 $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$，其中新增的两个符号不是实数，序规定为 $-\infty<x<+\infty$ 对每个 $x\in\mathbb{R}$ 成立。定义取负为 $-(+\infty)=-\infty$，$-(-\infty)=+\infty$，实数的取负保持原义。此操作反转序。

对于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中数列 z_n，定义：若 $a\in\mathbb{R}$，$z_n\to a$ 指每个 $\varepsilon>0$ 下，最终 $a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$；$z_n\to+\infty$ 指每个 $M\in\mathbb{R}$ 下最终 $z_n>M$；$z_n\to-\infty$ 指每个 $M\in\mathbb{R}$ 下最终 $z_n<M$。在实数列上，有限极限的定义就是原来的绝对值定义。

这里首先扩充的是序。我们不把 $(+\infty)-(+\infty)$、$0\cdot(+\infty)$、$(+\infty)/(+\infty)$ 当作已定义运算，也不能对扩充极限直接套用实数的四则定理。例如 $x_n=n$，$y_n=n$ 时差恒为零，而 $x_n=2n$，$y_n=n$ 时差趋于 $+\infty$，说明两个正无穷极限本身不能决定差的极限。

命题 4.30 (扩充序的确界)**.** *每个非空 $A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ 都在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中有上、下确界。取负满足*

$$\sup(-A)=-\inf A,\qquad \inf(-A)=-\sup A.$$

证明. 若 $+\infty\in A$，上确界为 $+\infty$。以下设 $+\infty\notin A$，令 $B=A\cap\mathbb{R}$。若 $B=\varnothing$，则 $A=\{-\infty\}$，上确界为 $-\infty$。若 $B\neq\varnothing$ 且在 $\mathbb{R}$ 中有上界，令 $s=\sup_{\mathbb{R}}B$，则它也控制可能属于 A 的 $-\infty$，且任何小于 s 的扩充实数不是 A 的上界，所以 $s=\sup_{\overline{\mathbb{R}}}A$。若 B 在 $\mathbb{R}$ 中无上界，任何有限实数都不是上界，$-\infty$ 也不是上界，只剩 $+\infty$ 为上确界。

令 $t=\sup(-A)$。对每个 $x\in A$，$-x\le t$，即 $-t\le x$。任一下界 v 满足 $-x\le -v$ 对所有 $x\in A$ 成立，故 $t\le -v$，即 $v\le -t$。这证明 $\inf A=-t$，同时给出 $\sup(-A)=-\inf A$。将已证公式用于集合 $-A$，并利用 $-(-A)=A$，得到 $\inf(-A)=-\sup A$。全程只用了反序，未对无穷符号作加减。 □

命题 4.31 (单调列在扩充序中的极限)**.** *任意单调递增的实数列都在扩充意义下趋于其取值集的上确界；任意单调递减的实数列都趋于其取值集的下确界。*

证明. 若递增列有上界，命题 4.17 已证明它趋于取值集的实上确界。若无上界，任给 $M\in\mathbb{R}$，存在 N 使 $x_N>M$；递增性给所有 $n\ge N$ 都有 $x_n\ge x_N>M$，故 $x_n\to+\infty$，恰为无上界取值集的扩充上确界。递增列的取值集包含 x_1，不会有上确界 $-\infty$，故情形已穷尽。

若递减列有下界，命题 4.17 给出其极限为实下确界。若无下界，任给 $M\in\mathbb{R}$，存在 N 使 $x_N<M$；此后 $x_n\le x_N<M$，所以 $x_n\to-\infty$，这就是取值集的扩充下确界。下确界 $+\infty$ 不可能，因为取值集包含实数 x_1。 □

定义 4.32 (上极限与下极限)**.** 对于任意实数列 x_n，令

$$T_n = \{x_k : k \ge n\}, \qquad u_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} T_n, \qquad \ell_n = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} T_n.$$

定义

$$U = \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\ge 1} u_n, \qquad L = \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\ge 1} \ell_n.$$

由于 $T_n \neq \varnothing$ 且包含实数，每个 u_n 属于 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，每个 ℓ_n 属于 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$；但它们的确界 U, L 可以是任意扩充实数。

命题 4.33 (尾部端点真正趋向上下极限)**.** 上述定义满足 $u_{n+1} \le u_n$，$\ell_{n+1} \ge \ell_n$，并在扩充意义下有

$$u_n \to U, \qquad \ell_n \to L, \qquad L \le U.$$

证明. 由 $T_{n+1} \subseteq T_n$，其上确界不能增大，下确界不能减小，得到单调性。

若 $U \in \mathbb{R}$，则 $U \le u_n$ 对所有 n 成立；给定 $\varepsilon > 0$，因 $U + \varepsilon$ 不是 $\{u_n\}$ 的下界，有 N 使 $u_N < U + \varepsilon$。所以 $n \ge N$ 时 $U - \varepsilon < U \le u_n \le u_N < U + \varepsilon$，证明趋于 U。若 $U = +\infty$，因 $U \le u_n$，所有 u_n 都等于 $+\infty$，故趋于 $+\infty$。若 $U = -\infty$，任给 $M \in \mathbb{R}$，M 不是 $\{u_n\}$ 的下界，有 N 使 $u_N < M$，单调性给所有 $n \ge N$ 都有 $u_n < M$，所以趋于 $-\infty$。

对于 ℓ_n，若 $L \in \mathbb{R}$，则每个 $\ell_n \le L$，且 $L - \varepsilon$ 不是 $\{\ell_n\}$ 的上界；取 N 使 $\ell_N > L - \varepsilon$，递增性给 $L - \varepsilon < \ell_N \le \ell_n \le L < L + \varepsilon$。若 $L = -\infty$，所有 $\ell_n = -\infty$，直接满足定义；若 $L = +\infty$，每个实数 M 都不是上界，有 N 使 $\ell_N > M$，之后各项都大于 M。这证明下端点的全部收敛情形。

最后，任意 m, n 下选 $k \ge \max\{m, n\}$，则 $\ell_n \le x_k \le u_m$。因此固定 m 时，u_m 是所有 ℓ_n 的上界，故 $L = \sup_n \ell_n \le u_m$。于是 L 是所有 u_m 的下界，所以 $L \le \inf_m u_m = U$。这个证明不需要定义 $U - L$，因而也覆盖无限端点。 □

4.10 最终成立与无穷多次成立

“最终 $x_n < t$” 的量词是 $\exists N\, \forall n \ge N$；“无穷多次 $x_n > t$” 的量词是 $\forall N\, \exists n \ge N$。对自然数指标，后者等价于满足条件的指标集无限：有限集有最大元，不能穿过每个尾部；无限集不能被有限前缀容纳。这两个量词结构正是上下极限的实质。

定理 4.34 (有限上下极限的误差刻画)**.** 对任意 $a \in \mathbb{R}$，有：

$$\begin{aligned} U = a \quad \Longleftrightarrow \quad & \text{每个}\varepsilon > 0 \text{ 下，最终}x_n < a + \varepsilon, \\ & \text{且每个尾部都有某项}x_n > a - \varepsilon; \\ L = a \quad \Longleftrightarrow \quad & \text{每个}\varepsilon > 0 \text{ 下，最终}x_n > a - \varepsilon, \\ & \text{且每个尾部都有某项}x_n < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

每行中的两条要求必须同时满足。

证明. 先设 $U = a$。因 $u_n \to a$，存在 N 使 $u_N < a + \varepsilon$，故 $n \ge N$ 时 $x_n \le u_N < a + \varepsilon$。又对任何尾部起点 N，都有 $u_N \ge U = a > a - \varepsilon$。若该尾部的每项都不大于 $a - \varepsilon$，它将有上界 $a - \varepsilon$，迫使 $u_N \le a - \varepsilon$，矛盾。所以每个尾部有一项大于 $a - \varepsilon$。

反向，设上述两条量词要求成立。给定 $\varepsilon>0$，最终 $x_n<a+\varepsilon$ 使某个 $u_N\le a+\varepsilon$，所以 $U\le a+\varepsilon$。每个尾部中有某项大于 $a-\varepsilon$，使所有 $u_N>a-\varepsilon$，因而 $U\ge a-\varepsilon$。用 $\varepsilon=1$ 首先排除 $U=\pm\infty$，得到 $U\in\mathbb{R}$。若 $U>a$，取 $\varepsilon=(U-a)/2$，与 $U\le a+\varepsilon$ 矛盾；若 $U<a$，取 $\varepsilon=(a-U)/2$，与 $U\ge a-\varepsilon$ 矛盾。故 $U=a$。

再设 $L=a$。由 $\ell_n\to a$，某个 $\ell_N>a-\varepsilon$，所以 $n\ge N$ 时 $x_n\ge\ell_N>a-\varepsilon$。对任意 N，$\ell_N\le L=a<a+\varepsilon$；若这个尾部所有项都至少为 $a+\varepsilon$，则 $\ell_N\ge a+\varepsilon$，矛盾。因此每个尾部有项小于 $a+\varepsilon$。

反向，最终 $x_n>a-\varepsilon$ 使某个 $\ell_N\ge a-\varepsilon$，从而 $L\ge a-\varepsilon$。每个尾部有项小于 $a+\varepsilon$，使每个 $\ell_N<a+\varepsilon$，所以 $L\le a+\varepsilon$。取 $\varepsilon=1$ 排除无限值；若 $L>a$ 用 $\varepsilon=(L-a)/2$，若 $L<a$ 用 $\varepsilon=(a-L)/2$，分别与相应界矛盾，故 $L=a$。 □

定理 4.35 (无限上下极限的完整刻画)**.** *任意实数列满足*

$$\begin{aligned}
U=+\infty &\iff \forall M\in\mathbb{R}\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\ge N:\ x_n>M,\\
U=-\infty &\iff x_n\to-\infty,\\
L=-\infty &\iff \forall M\in\mathbb{R}\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\ge N:\ x_n<M,\\
L=+\infty &\iff x_n\to+\infty.
\end{aligned}$$

并且在扩充序中

$$\limsup(-x_n)=-L,\qquad \liminf(-x_n)=-U.$$

证明. 若 $U=+\infty$，所有 $u_N=+\infty$，所以每个尾部无上界，给出第一行量词。若该量词成立，每个尾部都无上界，所有 $u_N=+\infty$，它们的下确界就是 $+\infty$。

若 $U=-\infty$，任给 M，取 N 使 $u_N<M$，则所有 $n\ge N$ 满足 $x_n\le u_N<M$，故 $x_n\to-\infty$。若 $x_n\to-\infty$，任给实数 H，最终 $x_n<H-1$ 使某个 $u_N\le H-1<H$。所以 $\{u_n\}$ 没有任何有限下界，下确界为 $-\infty$。

取负后的尾部为 $-T_n$。命题 4.30 给出

$$\sup(-T_n)=-\ell_n,\qquad \inf(-T_n)=-u_n,$$

再次应用确界的取负公式，得到

$$\limsup(-x_n)=\inf_n(-\ell_n)=-\sup_n\ell_n=-L,\quad \liminf(-x_n)=\sup_n(-u_n)=-\inf_n u_n=-U.$$

现在 $L=-\infty$ 等价于 $\limsup(-x_n)=+\infty$，已证第一行把它转成 $\forall H\,\forall N\,\exists n\ge N:\ -x_n>H$。令 $M=-H$，这正是第三行。而 $L=+\infty$ 等价于 $\limsup(-x_n)=-\infty$，已证第二行使它等价于 $-x_n\to-\infty$。将“最终 $-x_n<H$”改写成“最终 $x_n>-H$”，恰好得到 $x_n\to+\infty$，证明第四行。 □

推论 4.36 (极限存在的统一判据)**.** 对 $a \in \overline{\mathbb{R}}$，实数列在扩充意义下满足

$$x_n \to a \quad \Longleftrightarrow \quad L = U = a.$$

其中 $a \in \mathbb{R}$ 才称为通常的实数收敛；趋于无穷不是收敛到某个实数。

证明. 若 a 有限且 $x_n \to a$，对每个 $\varepsilon > 0$，尾部都满足 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$。这个尾部也与任意给定尾部相交，所以两侧不等式各自在每个尾部至少发生一次。定理 4.34 给出 $L = U = a$。反向，$L = a$ 给最终 $x_n > a - \varepsilon$，$U = a$ 给最终 $x_n < a + \varepsilon$；取共同阈值得 $|x_n - a| < \varepsilon$。

若 $a = +\infty$，定理 4.35 给 $x_n \to +\infty$ 当且仅当 $L = +\infty$；结合 $L \le U$，这也等价于 $L = U = +\infty$。若 $a = -\infty$，同一定理给 $x_n \to -\infty$ 当且仅当 $U = -\infty$；结合 $L \le U$，这等价于 $L = U = -\infty$。 □

4.11 上下极限由哪些子列实现

上下极限不仅是尾部确界的形式组合，还分别由实际子列逼近。这个事实需要构造指标，不能把“每个尾部可逼近”直接写成“取一个收敛子列”。

定理 4.37 (上下极限的子列刻画)**.** 对于任意实数列：

1. 有严格递增指标列 n_k, m_k，分别使 $x_{n_k} \to U$、$x_{m_k} \to L$，允许扩充极限。
2. 任意扩充子列极限 c 都满足 $L \le c \le U$。

因此上极限是全部扩充子列极限的最大值，下极限是其最小值。对有界列，两者均为实数。

证明. 先构造趋于 U 的子列。若 $U \in \mathbb{R}$，对每个 k，由有限上极限刻画选最小阈值 N_k，使所有 $n \ge N_k$ 满足 $x_n < U + 1/k$。令 $n_0 = 0$。每个尾部有项大于 $U - 1/k$，所以可以选 n_k 为满足

$$n_k \ge \max\{N_k, n_{k-1} + 1\}, \qquad x_{n_k} > U - 1/k$$

的最小指标。于是 $|x_{n_k} - U| < 1/k$，而指标严格递增，故此子列趋于 U。若 $U = +\infty$，每个尾部向上无界，取 $n_k > n_{k-1}$ 且 $x_{n_k} > k$ 的最小指标。任给 $M \in \mathbb{R}$，Archimedes 性给整数 $K > M$，则 $k \ge K$ 时 $x_{n_k} > k \ge K > M$，故趋于 $+\infty$。若 $U = -\infty$，原列已趋于 $-\infty$，取 $n_k = k$ 即可。

对数列 $-x_n$，刚才的构造给子列 $-x_{m_k} \to \limsup(-x_n) = -L$。若 L 有限，绝对值误差 $|-x_{m_k} - (-L)| = |x_{m_k} - L|$ 说明 $x_{m_k} \to L$；若 $L = +\infty$ 或 $-\infty$，将扩充收敛定义中的不等式逐项取负，分别给出所需的趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$。因此下极限也被实现。

现设 $x_{n_k} \to c$。先证 $c \le U$。若 $U = +\infty$，序本身给此结论。若 $U = -\infty$，原列趋于 $-\infty$；由 $n_k \ge k$，任意尾部阈值也适用于子列，故 $c = -\infty$。这里扩充极限唯一：一个趋于 $-\infty$ 的列最终小于每个实数，不可能又趋于有限点或 $+\infty$。若 $U \in \mathbb{R}$，对每个 $\varepsilon > 0$，原列最终 $x_n < U + \varepsilon$，所以子列也最终如此。因此 $c \ne +\infty$。若 $c \in \mathbb{R}$ 且 $c > U$，取 $\varepsilon = (c - U)/3$，子列收敛给最终 $x_{n_k} > c - \varepsilon > U + \varepsilon$，矛盾；而 $c = -\infty$ 时已经有 $c \le U$。这覆盖全部情形。

将已证的上界结论用于 $-x_{n_k} \to -c$，得到 $-c \le \limsup(-x_n) = -L$，即 $L \le c$。若原列有界，某个 $M > 0$ 控制全部 $|x_n|$，则 $-M \le \ell_n \le u_n \le M$，从而 $-M \le L \le U \le M$，排除了无限值。 □

注 4.38 (极端子列极限之间不必处处都有子列极限)**.** 定理只说明所有子列极限落在 $[L,U]$，以及两个端点确实能取到。对于 $x_n=(-1)^n$，只有 $-1,1$ 是子列极限。若 $c\neq\pm1$ 为实数，取 $\varepsilon=\min\{|c-1|,|c+1|\}/2>0$，则没有一项落入 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$，不可能有子列趋于 c。原列有界也排除了无限子列极限。因此不能把子列极限集合自动填成整个区间。

例 4.39 (稀疏峰值与双向无界)**.** 令

$$p_n=\begin{cases}1, & n=2^j,\ \text{其中}j\geq0\ \text{为整数},\\ 0, & \text{其余指标}.\end{cases}$$

每个尾部都含有幂指标，所以有值 1；也含有非幂指标 2^j+1（取 $j\geq1$ 且 2^j 超过尾部起点），所以有值 0。因全部值在 $[0,1]$，每个尾部确界恰为 $u_n=1$，$\ell_n=0$，故 $\limsup p_n=1$，$\liminf p_n=0$。峰值的指标间距增大，并不妨碍峰值决定上极限。

对于 $x_n=(-1)^n n$，任意尾部的偶指标项向上无界，奇指标项向下无界。因此 $u_n=+\infty$，$\ell_n=-\infty$，给出 $U=+\infty$，$L=-\infty$。它既不趋于 $+\infty$，也不趋于 $-\infty$：趋于 $+\infty$ 会被每个尾部的负项打断，趋于 $-\infty$ 会被每个尾部的正项打断。

4.12 上下极限的运算与误差控制

下面的四则讨论明确限于有界实数列，使全部上下极限有限，避免未定义的无穷运算。

命题 4.40 (尾部比较与有限项不变性)**.** *删改有限项不会改变上下极限。若最终 $x_n\leq y_n$，则*

$$\limsup x_n\leq\limsup y_n,\qquad \liminf x_n\leq\liminf y_n,$$

此结论允许扩充值。

证明. 用子列刻画证明，以同时覆盖所有无限端点。有限项改动后，任一原子列删掉有限前缀就是新列的子列，反向也成立，且删除有限前缀不改变有限或无限极限的定义。所以两列的扩充子列极限集合相同，它们的最大、最小值相同。

对于尾部比较，设 $U_x=\limsup x_n$，$U_y=\limsup y_n$，反设 $U_x>U_y$。可以选有限实数 $a<b$ 使 $U_y<a<b<U_x$：两端有限时取三等分点；有一个无限端点时先在有限端旁取点；两端分别为 $-\infty,+\infty$ 时取 $a=0,b=1$。由上下极限刻画，$U_y<a$ 保证最终 $y_n<a$：有限 U_y 用误差 $a-U_y$，$U_y=-\infty$ 用趋于负无穷的定义。而 $b<U_x$ 保证每个尾部有项 $x_n>b$：有限 U_x 用误差 U_x-b，$U_x=+\infty$ 用尾部无上界刻画。在 $x_n\leq y_n<a$ 的共同尾部中取 $x_n>b$，矛盾。故 $U_x\leq U_y$。再对最终 $-y_n\leq-x_n$ 应用上极限比较，得 $-\liminf y_n\leq-\liminf x_n$，即下极限比较。 □

命题 4.41 (和的界与收敛扰动)**.** *若 x_n, y_n 有界，则*

$$\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n + y_n) \le \limsup(x_n + y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n.$$

若进一步 $y_n \to b \in \mathbb{R}$，则两侧均成为精确公式：

$$\limsup(x_n + y_n) = \limsup x_n + b, \qquad \liminf(x_n + y_n) = \liminf x_n + b.$$

证明. 记两列上下极限为 L_x, U_x, L_y, U_y。给定 $\varepsilon > 0$，在共同尾部中有

$$L_x - \varepsilon/2 < x_n < U_x + \varepsilon/2, \qquad L_y - \varepsilon/2 < y_n < U_y + \varepsilon/2.$$

相加得到最终

$$L_x + L_y - \varepsilon < x_n + y_n < U_x + U_y + \varepsilon.$$

尾部下确界至少为左端常数，尾部上确界至多为右端常数，故

$$\liminf(x_n + y_n) \ge L_x + L_y - \varepsilon, \qquad \limsup(x_n + y_n) \le U_x + U_y + \varepsilon.$$

两列的和有界，上下极限有限，若目标不等式失败，取失败间隙的一半为 ε 就与对应估计矛盾。中间不等式由命题 4.33 给出。

若 $y_n \to b$，已证部分给 $\limsup(x_n + y_n) \le U_x + b$。由定理 4.37 选 $x_{n_k} \to U_x$。同时 $y_{n_k} \to b$, 所以极限加法给 $x_{n_k} + y_{n_k} \to U_x + b$; 这个子列极限不超过和列的上极限, 给出反向不等式。对下端点, 已证部分给 $\liminf(x_n + y_n) \ge L_x + b$。选 $x_{m_k} \to L_x$, 则 $x_{m_k} + y_{m_k} \to L_x + b$; 和列的下极限不超过任一子列极限，故也有反向不等式。 □

例 4.42 (为什么和的上界未必取等号)**.** 取 $x_n = (-1)^n$, $y_n = -(-1)^n$。两列上极限都是 1, 下极限都是 -1, 但和列恒为零。因此和列的上极限为 $0 < 2 = U_x + U_y$, 下极限为 $0 > -2 = L_x + L_y$。两列各自接近上端点的指标完全错开，所以不能擅自把分别实现上极限的两条子列当作同一条。

命题 4.43 (有界列的绝对值与趋零判别)**.** *设 x_n 有界，上下极限为 L, U。则*

$$\limsup |x_n| = \max\{|L|, |U|\}.$$

特别地，

$$x_n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup |x_n| = 0.$$

证明. 令 $A = \max\{|L|, |U|\}$。每个 $\varepsilon > 0$ 下最终 $L - \varepsilon < x_n < U + \varepsilon$, 所以 $-A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, 即 $|x_n| < A + \varepsilon$。因此 $\limsup |x_n| \le A + \varepsilon$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 成立，用正间隙的一半反证便得 $\limsup |x_n| \le A$。另一方面，存在子列分别趋于 L, U，绝对值的极限法则（定理 4.5）给相应绝对值子列趋于 $|L|, |U|$。它们都不超过 $|x_n|$ 的上极限，故上极限至少为 A。

若 $x_n \to 0$，绝对值列也趋零，其上极限为零。反向若 $\limsup |x_n| = 0$，非负性给 $0 \le \liminf |x_n| \le \limsup |x_n| = 0$。于是绝对值列上下极限相等，趋于零，这正是每个误差下最终 $|x_n| < \varepsilon$，即 $x_n \to 0$。 □

命题 4.44 (尾部振幅与 Cauchy 条件)**.** *若实数列 x_n 有界，令 $\omega_n = u_n - \ell_n$，称为第 n 个尾部的振幅。这些差均为有限实数，且*

$$\omega_n \geq 0, \quad \omega_{n+1} \leq \omega_n, \quad \omega_n \to U - L.$$

进一步，x_n 是 Cauchy 列当且仅当 $\omega_n \to 0$。所以 $U - L$ 精确记录了尾部振幅不能消失的部分。

证明. 有界性使每个 u_n, ℓ_n 都有限。由 $\ell_n \leq u_n$ 得 $\omega_n \geq 0$；因 u_n 递减而 ℓ_n 递增，

$$u_{n+1} - \ell_{n+1} \leq u_n - \ell_{n+1} \leq u_n - \ell_n.$$

尾部端点分别趋于 U, L，差的极限法则给出 $\omega_n \to U - L$。

若 $\omega_n \to 0$，给定 $\varepsilon > 0$，取 N 使 $\omega_N < \varepsilon$。任意 $m, n \geq N$ 都满足 $x_m, x_n \in [\ell_N, u_N]$，故 $|x_m - x_n| \leq \omega_N < \varepsilon$，证明 Cauchy 条件。反向若 x_n 为 Cauchy 列，以误差 $\varepsilon/4$ 取 N，则每个 $n \geq N$ 有 $x_N - \varepsilon/4 < x_n < x_N + \varepsilon/4$。因此 $\ell_N \geq x_N - \varepsilon/4$，$u_N \leq x_N + \varepsilon/4$，从而 $\omega_N \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$。由递减性，对所有 $n \geq N$ 也有 $0 \leq \omega_n \leq \omega_N < \varepsilon$，故振幅趋零。这两个方向直接比较同一个尾部中的点，没有用“Cauchy 已收敛”来替代振幅估计。 □

4.13 从局部误差到整体平均

最后用一个完整应用区分“每项接近”与“平均接近”。它也为后续级数中处理有限头部和无穷尾部提供范例。

命题 4.45 (Cesàro 平均保持收敛)**.** *若实数列 $x_n \to a$，令 $s_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$，则 $s_n \to a$。反向一般不成立。*

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，先选 K 使 $j \geq K$ 时 $|x_j - a| < \varepsilon/2$，并令有限常数 $C = \sum_{j=1}^{K-1} |x_j - a|$；当 $K = 1$ 时这个空和定义为零。利用 Archimedes 性取整数 $N \geq K$ 且 $N > 2C/\varepsilon$。对每个 $n \geq N$，有限头部与受控尾部分开估计：

$$|s_n - a| = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a) \right| \leq \frac{C}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=K}^{n} |x_j - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - K + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

即使 $C = 0$，第一个严格界也成立，因为 $\varepsilon/2 > 0$；所选阈值对整个尾部有效，故平均收敛。

反向取 $x_n = (-1)^n$。其前 n 项之和在偶数 n 时为零，在奇数 n 时为 -1，所以 $|s_n| \leq 1/n \to 0$；但原列有两个不同子列极限，已经证明不收敛。 □

本章将完备性落实为几种可以互相转换的工具：确界提供候选值，单调性给出逼近方向，区间套控制位置，子列选择提取稳定行为，Cauchy 条件将这种稳定性传给整列。上下极限则在不收敛时仍保留可精确计算的尾部信息。下一章将定义开集、闭集与开覆盖，再补证 Heine–Borel 与本章完备性的等价联系；这里没有提前使用一般度量空间的紧性定理。

5 实直线的拓扑与紧性

5.1 从距离到邻域

第四章研究数列时，误差 $|x_n - a| < \varepsilon$ 已经反复出现。本章把这种“离一点足够近”的关系组织成集合语言。这里的对象仍然是 $\mathbb{R}$，但每一个定义都会说明它只依赖绝对值和实数的序结构，而不是依赖尚未证明的直觉图像。

定义 5.1 (距离与开球)**.** 对 $x, y \in \mathbb{R}$，定义

$$d(x, y) = |x - y|.$$

给定 $a \in \mathbb{R}$ 和 $r > 0$，以 a 为中心、r 为半径的开球为

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < r\} = (a - r, a + r).$$

闭球定义为

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) \le r\} = [a - r, a + r].$$

命题 5.2 (绝对值距离的四条基本性质)**.** 对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}$，有

$$d(x, y) \ge 0, \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$d(x, y) = d(y, x), \qquad d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z).$$

最后一个不等式称为三角不等式。

证明. 非负性由绝对值定义给出。若 $d(x, y) = 0$，则 $|x - y| = 0$，所以 $x - y = 0$，即 $x = y$；反向由 $x - y = 0$ 得到。交换 x, y 只把差改成相反数，故距离对称。最后，

$$x - z = (x - y) + (y - z),$$

由绝对值三角不等式得到

$$d(x, z) = |x - z| \le |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

每个结论都直接来自有序域中的绝对值性质。 □

引理 5.3 (球的包含与分离)**.** 设 $a, b \in \mathbb{R}$，$r, s > 0$。

1. 若 $d(a, b) + s < r$，则 $\overline{B}(b, s) \subseteq B(a, r)$。
2. 若 $d(a, b) \ge r + s$，则 $B(a, r) \cap B(b, s) = \varnothing$。
3. 对任意 $x \in B(a, r)$，存在 $\rho > 0$ 使 $B(x, \rho) \subseteq B(a, r)$。

证明. 若 $y \in \overline{B}(b, s)$，三角不等式给出

$$d(y, a) \le d(y, b) + d(b, a) \le s + d(a, b) < r,$$

所以 $y \in B(a,r)$，证明第一项。若 y 同时属于两个开球，则

$$d(a,b) \le d(a,y) + d(y,b) < r + s,$$

与假设矛盾，证明第二项。第三项中 $d(x,a) < r$，令 $\rho = (r - d(x,a))/2 > 0$。若 $y \in B(x,\rho)$，则

$$d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < \frac{r - d(x,a)}{2} + d(x,a) < r.$$

因此 $B(x,\rho) \subseteq B(a,r)$。 □

定义 5.4 (开集、闭集与邻域)**.** 集合 $G \subseteq \mathbb{R}$ 称为开集，若

$$\forall x \in G\ \exists r > 0, \qquad B(x,r) \subseteq G.$$

集合 $F \subseteq \mathbb{R}$ 称为闭集，若其补集 $\mathbb{R} \setminus F$ 是开集。集合 $N \subseteq \mathbb{R}$ 称为点 x 的一个邻域，若存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subseteq N$。邻域本身不要求是开集；它只要求含有一个以 x 为中心的开球。

由引理 5.3 的第三项，开球中的每一点都有更小开球仍留在其中，所以每个 $B(a,r)$ 确实是开集。这个名称在定义之后得到了验证。

命题 5.5 (开集运算)**.** $\varnothing$ 与 $\mathbb{R}$ 是开集；任意开集族的并是开集；有限个开集的交是开集。

证明. 空集的开集条件没有元素需要验证。对 $\mathbb{R}$，任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $B(x,1) \subseteq \mathbb{R}$。设 $(G_i)_{i\in I}$ 是开集族，$x \in \bigcup_{i\in I} G_i$。存在 i_0 使 $x \in G_{i_0}$，再由 G_{i_0} 开取 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_i G_i$。所以并开。设 $G_1, \dots, G_m$ 开且 $x \in \bigcap_{j=1}^m G_j$。分别取 $r_j > 0$ 使 $B(x,r_j) \subseteq G_j$，令 $r = \min\{r_1, \dots, r_m\} > 0$。则 $B(x,r) \subseteq \bigcap_{j=1}^m G_j$，所以有限交开。 □

命题 5.6 (闭集运算)**.** $\varnothing$ 与 $\mathbb{R}$ 是闭集；任意闭集族的交是闭集；有限个闭集的并是闭集。

证明. 这是命题 5.5 通过德摩根律得到的。例如若 F_i 全闭，则

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_i F_i = \bigcup_i (\mathbb{R} \setminus F_i)$$

是开集，故交集闭。若 $F_1, \dots, F_m$ 闭，则

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^m F_j = \bigcap_{j=1}^m (\mathbb{R} \setminus F_j)$$

是有限个开集的交，因而开。空集与全空间互为补集，且都开，所以都闭。 □

定义 5.7 (内点、外点、边界与闭包)**.** 给定 $A \subseteq \mathbb{R}$：

$$A^\circ = \{x : \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A\}$$

称为 A 的内部；

$$\operatorname{ext}(A) = \{x : \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq \mathbb{R} \setminus A\}$$

称为外部；若每个 $r > 0$ 都满足

$$B(x,r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{且} \quad B(x,r) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \varnothing,$$

则称 x 为 A 的边界点，所有边界点组成 ∂A。集合 A 的闭包定义为

$$\overline{A} = \{x : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}.$$

这里横线表示闭包。第四章的 $\overline{\mathbb{R}}$ 特指扩充实数，不是实轴的闭包；需要写出实轴的闭包时，改记 $\operatorname{cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$，避免两种含义占用同一公式。

命题 5.8 (内部、闭包和边界的关系)**.** *对任意 $A \subseteq \mathbb{R}$，有*

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}, \qquad \overline{A} = A \cup \partial A,$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ, \qquad \mathbb{R} \setminus \overline{A} = \operatorname{ext}(A).$$

此外 A° 是包含在 A 中的最大开集，$\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

证明. 若 $x \in A^\circ$，某个球 $B(x,r)$ 包含于 A，特别 $x \in A$；而 $x \in A$ 时每个球都含 x，故 $x \in \overline{A}$。若 $x \in \overline{A} \setminus A$，则每个球与 A 相交，同时球内的 x 本身属于补集，所以 $x \in \partial A$。反向，$A \subseteq \overline{A}$ 已证，边界点也因每个球与 A 相交而属于闭包。故 $\overline{A} = A \cup \partial A$。

若 $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$，每个球与 A 相交，且没有一个球完全包含于 A，所以每个球也与补集相交，故 $x \in \partial A$。反向若 $x \in \partial A$，它当然在闭包中且不在内部，故第二式成立。最后，$x \notin \overline{A}$ 的否定是存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \cap A = \varnothing$，等价于球包含在补集，得到外部关系。

若 $x \in A^\circ$，取 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subseteq A$。引理 5.3 保证每个 $y \in B(x,r)$ 都有更小开球包含于 $B(x,r)$，所以 $y \in A^\circ$。于是 $B(x,r) \subseteq A^\circ$，证明 A° 开。若 $G \subseteq A$ 且 G 开，任意 $x \in G$ 有球包含在 G，所以 $x \in A^\circ$，证明最大性。闭包本身闭的将在下一命题证明；若 F 是闭集且 $A \subseteq F$，则 $\overline{A} \subseteq F$，否则某个 $x \in \overline{A} \setminus F$ 会有球包含在 $\mathbb{R} \setminus F$，与该球必须和 A 相交矛盾。 □

命题 5.9 (闭包是闭集)**.** *对任意 $A \subseteq \mathbb{R}$，$\overline{A}$ 是闭集，并且*

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

对任意 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ 成立。

证明. 若 $x \notin \overline{A}$，存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \cap A = \varnothing$。取 $\rho = r/2$。若 $y \in B(x,\rho)$，则 $B(y,\rho) \subseteq B(x,r)$，由引理 5.3 得 $B(y,\rho) \cap A = \varnothing$，所以 $y \notin \overline{A}$。因此 $B(x,\rho) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{A}$，补集开，闭包闭。闭集的闭包等于自身，故幂等性成立。

若 $x \in \overline{A}$，每个球与 A 相交，从而也与 $A \cup B$ 相交，所以 $x \in \overline{A \cup B}$。将 A 换成 B 得另一个包含，故 $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$。反向若 $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$，分别取 $r, s > 0$ 使 $B(x,r) \cap A = \varnothing$、$B(x,s) \cap B = \varnothing$。于是 $B(x, \min\{r,s\})$ 与 $A \cup B$ 不交，故 $x \notin \overline{A \cup B}$。取补得到反向包含。 □

命题 5.10 (区间的开闭性)**.** *若 $a < b$，(a,b)、$(-\infty, b)$、$(a, +\infty)$ 都是开集，$[a,b]$、$(-\infty, b]$、$[a, +\infty)$ 都是闭集。单点集 $\{a\}$ 也是闭集。*

证明. 若 $a < x < b$，取 $r = \min\{x-a, b-x\}/2 > 0$，则 $B(x,r) \subseteq (a,b)$。若 $x < b$，取 $r = (b-x)/2$，则 $B(x,r) \subseteq (-\infty, b)$；若 $x > a$，取 $r = (x-a)/2$，则 $B(x,r) \subseteq (a, +\infty)$。这证明三种开区间的开性。由于

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty), \quad \mathbb{R} \setminus (-\infty, b] = (b, +\infty),$$

$$\mathbb{R} \setminus [a, +\infty) = (-\infty, a), \quad \mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty),$$

各补集开，得到所述闭性。 □

例 5.11 (常见集合的内部、闭包与边界)**.** 设 $a<b$。有

$$(a,b)^\circ=(a,b),\quad \overline{(a,b)}=[a,b],\quad \partial(a,b)=\{a,b\},$$

$$[a,b]^\circ=(a,b),\quad \overline{[a,b]}=[a,b],\quad \partial[a,b]=\{a,b\}.$$

内部点的邻域由前一命题构造。若 $x<a$，半径 $(a-x)/2$ 的球与 $[a,b]$ 不交；若 $x>b$，用半径 $(x-b)/2$。端点 a 的任意球都含有 $a+\min\{r/2,(b-a)/2\}\in(a,b)$，也含 $a-r/2\notin[a,b]$；端点 b 则用 $b-\min\{r/2,(b-a)/2\}$ 与 $b+r/2$。这些见证验证了全部端点关系。

另有

$$\mathbb{Q}^\circ=\varnothing,\qquad \overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R},\qquad \partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}.$$

有理数稠密性说明每个开球含有有理数。它也含无理数：先在 $B(x,r/2)$ 中取有理数 q，再取正整数 m 使 $0<\sqrt{2}/m<r/2$。数 $q+\sqrt{2}/m$ 不可能有理，否则 $\sqrt{2}=m((q+\sqrt{2}/m)-q)$ 有理；三角不等式又给它属于 $B(x,r)$。所以每个开球同时遇到 $\mathbb{Q}$ 和其补集，得到上述结论。

注 5.12 (无限交与无限并的限制)**.** 有限交开不能直接推广到可数交，因为 $\bigcap_{n\ge1}(-1/n,1/n)=\{0\}$，而单点集不是开集：每个 $B(0,r)$ 都含非零点 $r/2$。有限并闭也不能直接推广到可数并，因为 $\bigcup_{n\ge2}[1/n,1]=(0,1]$，其补集在 0 处不含任何开球，所以这个并不是闭集。

定义 5.13 (相对开集与相对闭集)**.** 对 $E\subseteq\mathbb{R}$，若 $U=E\cap G$，其中 G 是 $\mathbb{R}$ 中开集，称 U 在 E 中相对开。若 $F=E\cap H$，其中 H 是 $\mathbb{R}$ 中闭集，称 F 在 E 中相对闭。除非明确说“相对于 E”，开闭均指在 $\mathbb{R}$ 中。

命题 5.14 (相对拓扑的局部形式与补集)**.** *$U\subseteq E$ 相对开，当且仅当每个 $x\in U$ 都有 $r>0$，使 $E\cap B(x,r)\subseteq U$。$F\subseteq E$ 相对闭，当且仅当 $E\setminus F$ 相对开。*

证明. 若 $U=E\cap G$ 且 G 开，以 x 的开球包含于 G 即得局部条件。反向，令 G 为所有满足 $x\in U, r>0, E\cap B(x,r)\subseteq U$ 的开球 $B(x,r)$ 之并。此并开，包含 U，且与 E 的交包含于 U，故 $E\cap G=U$。若 $U=\varnothing$，取 $G=\varnothing$ 即可。若 $F=E\cap H$ 且 H 闭，则 $E\setminus F=E\cap(\mathbb{R}\setminus H)$ 相对开。反向若 $E\setminus F=E\cap G$ 且 G 开，则 $F=E\cap(\mathbb{R}\setminus G)$，因而相对闭。 □

例 5.15 (相对开不意味着在实轴上开)**.** 在 $E=[0,1]$ 中，$[0,1/2)=E\cap(-1,1/2)$ 相对开，但在 $\mathbb{R}$ 中不是开集，因为 0 的每个球含负数。在 $E=(0,1)$ 中，$(0,1/2]=E\cap(-\infty,1/2]$ 相对闭，但它在 $\mathbb{R}$ 中的闭包还含 0，因而不是实轴中的闭集。相对开闭改变的是允许比较的环境，不改变实数距离。

5.2 序列刻画与拓扑闭性

第四章用序列表达收敛。本节证明在实直线上，开闭性质、闭包和聚点都可以用序列重述。证明两方向时，尤其要区分“对每个半径有一个点”和“存在一条固定的递增指标列”。本节按 n 选取逼近点时，沿用第四章的可数选择背景。

定理 5.16 (闭集的序列判据)**.** 集合 $F \subseteq \mathbb{R}$ 闭，当且仅当每条取值于 F 且收敛于 $x \in \mathbb{R}$ 的数列都满足 $x \in F$。

证明. 先设 F 闭。若 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x$，假设 $x \notin F$。由于补集开，存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subseteq \mathbb{R} \setminus F$。收敛给出某个 N，使 $n \geq N$ 时 $x_n \in B(x,r)$，这与 $x_n \in F$ 矛盾。

反向设序列判据成立。若 F 不闭，则 $\mathbb{R} \setminus F$ 不开。所以存在 $x \notin F$，使每个 $r > 0$ 都有 $B(x,r) \cap F \neq \varnothing$。对每个 n 选择 $x_n \in F \cap B(x, 1/n)$。由第四章的 $1/n \to 0$，$x_n \to x$，但 $x \notin F$，违反假设。因此 F 闭。 □

推论 5.17 (闭包的序列刻画)**.** 对 $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad 存在(a_n) \subseteq A \text{ 使} a_n \to x.$$

证明. 若 $a_n \to x$，任意 $r > 0$ 下取 N 使 $|a_N - x| < r$，即 $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$。

反向若 $x \in \overline{A}$，对每个 n 选择 $a_n \in A \cap B(x, 1/n)$。若 $A = \varnothing$，闭包为空，命题没有反向对象需要构造；当 $A \neq \varnothing$ 时选择明确。于是 $|a_n - x| < 1/n \to 0$，所以 $a_n \to x$。 □

定义 5.18 (聚点与孤立点)**.** 若对每个 $r > 0$ 都存在 $a \in A$ 满足 $0 < |a - x| < r$，称 x 为 A 的聚点，记全体聚点为 A'。若 $x \in A$ 且存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \cap A = \{x\}$，称 x 为 A 的孤立点。

命题 5.19 (聚点的序列判据)**.** x 是 A 的聚点，当且仅当存在 $a_n \in A \setminus \{x\}$ 使 $a_n \to x$。

证明. 若有这样的数列，给定 $r > 0$，收敛保证某个 n 满足 $0 < |a_n - x| < r$，所以 x 为聚点。反向设 x 为聚点。对每个 n，选择 $a_n \in A$ 满足 $0 < |a_n - x| < 1/n$。则 $a_n \neq x$ 且 $a_n \to x$。 □

命题 5.20 (闭集与聚点)**.** 集合 $F \subseteq \mathbb{R}$ 闭，当且仅当 $F' \subseteq F$。

证明. 若 F 闭且 $x \in F'$，由命题 5.19 取 $x_n \in F \setminus \{x\}$ 且 $x_n \to x$。定理 5.16 给 $x \in F$。反向若 $F' \subseteq F$，设 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x$。若 $x \notin F$，则每个 $x_n \neq x$，于是这条数列本身位于 $F \setminus \{x\}$，命题 5.19 给 $x \in F' \subseteq F$，矛盾。所以 $x \in F$，序列判据给出 F 闭。 □

命题 5.21 (导集与闭包的分解)**.** 对任意 $A \subseteq \mathbb{R}$，有 $\overline{A} = A \cup A'$，且导集 A' 是闭集。

证明. 若 $x \in A'$，每个去心球都遇到 A，因而 $x \in \overline{A}$；$A \subseteq \overline{A}$ 已证。若 $x \in \overline{A} \setminus A$，每个球遇到 A 时取到的点必不等于 x，故 $x \in A'$，得到等式。

证明 A' 闭，取 $x \notin A'$。存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \cap A \subseteq \{x\}$。若 $y \in B(x, r/2) \setminus \{x\}$，令

$$\delta = \tfrac{1}{2} \min\{|y - x|,\ r - |y - x|\} > 0.$$

则 $B(y,\delta) \subseteq B(x,r)$，又不含 x，所以此球与 A 不交；特别 $y \notin A'$。对于 $y = x$，本来就有 $x \notin A'$。因此 $B(x, r/2) \subseteq \mathbb{R} \setminus A'$，证明补集开。 □

命题 5.22 (相对闭性的序列刻画)**.** 设 $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$。集合 A 在 E 中相对闭，当且仅当每条 A 中数列若在 $\mathbb{R}$ 中收敛到某个 $x \in E$，就有 $x \in A$。相对闭包等于 $E \cap \overline{A}$。

证明. 若 $A = E \cap H$，H 在 $\mathbb{R}$ 中闭，序列 $a_n \in A$ 收敛到 $x \in E$ 时，闭性给 $x \in H$，故 $x \in A$。反向若序列条件成立但 $E \setminus A$ 不相对开，有 $x \in E \setminus A$，每个 $E \cap B(x,r)$ 都遇到 A。选 $a_n \in A \cap B(x, 1/n)$，得 $a_n \to x \in E \setminus A$，矛盾。所以 $E \setminus A$ 相对开，A 相对闭。

在 E 中，x 的球是 $E \cap B(x,r)$；因 $A \subseteq E$，它与 A 相交等价于 $B(x,r)$ 与 A 相交。故所有相对闭包点正是 $E \cap \overline{A}$。 □

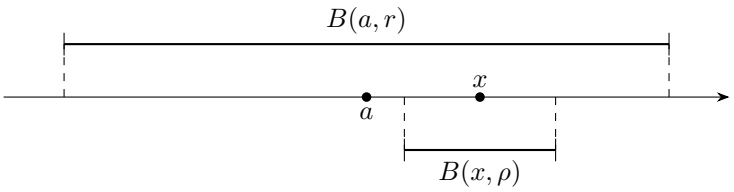


图 5.1: 邻域包含关系示意：取 $\rho=(r-|x-a|)/2$ 后，$B(x,\rho)\subseteq B(a,r)$。水平线段只示意位置，端点不属开球。

5.3 可数邻域基与开集的区间分解

定义 5.23 (稠密与可数基)**.** 集合 $D\subseteq\mathbb{R}$ 稠密，指 $\overline{D}=\mathbb{R}$，即每个非空开球都遇到 D。一族开集 $\mathcal{B}$ 称为实直线的一个基，若每个开集都是 $\mathcal{B}$ 中某些成员的并；若 $\mathcal{B}$ 可数，称为可数基。

命题 5.24 (有理端点区间构成可数基)**.** 令

$$\mathcal{B}=\{(p,q):p,q\in\mathbb{Q},\ p<q\}.$$

则 $\mathcal{B}$ 是可数基。每个开覆盖（覆盖对象可以只是一个子集）都含有至多可数的子覆盖。

证明. $\mathbb{Q}$ 可数，故 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 可数（将两个枚举按指标和逐层排列），$\mathcal{B}$ 是其像，因而可数。若 G 开且 $x\in G$，选 $r>0$ 使 $B(x,r)\subseteq G$，有理稠密性给出 $x-r<p<x<q<x+r$，其中 $p,q\in\mathbb{Q}$。于是 $x\in(p,q)\subseteq G$。取所有包含于 G 的基区间之并，便恰好得到 G。

现设 $\mathcal{U}$ 开覆盖 E。对每个满足“存在 $U\in\mathcal{U}$ 使 $B\subseteq U$”的 $B\in\mathcal{B}$，选取一个这样的成员 U_B。这里至多进行可数次选择，使用与第四章相同的通常选择原则。所得成员至多可数。任给 $x\in E$，先取覆盖成员 $U\ni x$，再由基性质取 $x\in B\subseteq U$，相应的 U_B 也含 x。所以 $\{U_B\}$ 是至多可数的子覆盖。此结论将任意覆盖缩到可数；只有进一步的紧性才把它缩到有限。 □

定理 5.25 (开集的不交区间分解)**.** 每个非空开集 $G\subseteq\mathbb{R}$ 都唯一地分解为至多可数个两两不交的非空开区间之并；允许区间是半无限区间或 $\mathbb{R}$。这里唯一性指将各区间取为 G 中极大的区间后，除排列外分解唯一。

证明. 对每个 $x\in G$，令 J_x 是所有满足 $x\in I\subseteq G$ 的开区间 I 的并。至少有一个这样的 I，因为 G 开。并集 J_x 开，并且是区间：若 $u<v$ 属于并集，取分别包含它们且都含 x 的两个开区间；这两个区间的并仍为区间，因为它们在 x 相交，故所有 $u<t<v$ 也在并集中。因此 J_x 是包含 x 且包含于 G 的最大开区间。

若 $J_x\cap J_y\neq\varnothing$，两者之并仍是开区间并包含于 G，且包含 x。最大性给 $J_y\subseteq J_x$；交换 x,y 得相等。所以不同的 J_x 两两不交，且它们的并恰为 G。

固定 $\mathbb{Q}$ 的一个枚举，在每个 J_x 内取枚举中的首个有理数。稠密性保证有候选；不同区间不交，因此所选有理数不同。区间族单射进入 $\mathbb{Q}$，故至多可数。这一步不必另对每个区间任意选点。

最后，若另一族两两不交开区间也分解 G，则其中任一区间 I 与某个 J_x 相交时，有 $I\subseteq J_x$。若它是极大区间，只能等于 J_x。这证明极大区间分解的唯一性。 □

注 5.26 (序列刻画所依赖的可数性)**.** 闭包的序列刻画依赖一列可数的正半径：$1,1/2,1/3,\dots$ 足以细化所有正半径。这来自 Archimedes 性。每次从非空交集中选点也使用可数选择；本册不声称任意拓扑空间中的闭包都能这样由序列刻画。

5.4 覆盖、紧性与有限化

定义 5.27 (覆盖与紧集)**.** 设 $K \subseteq \mathbb{R}$，$\mathcal{U}$ 是一族集合。若

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

称 $\mathcal{U}$ 覆盖 K。若每个 $U \in \mathcal{U}$ 都是开集，称为 K 的开覆盖。子族 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ 若仍覆盖 K，称为子覆盖；若 $\mathcal{V}$ 含有限个集合，则称有限子覆盖。若 K 的每个开覆盖都有有限子覆盖，称 K 为紧集。

覆盖若写成带指标的族 $(U_i)_{i \in I}$，允许不同指标代表同一集合；有限子覆盖只要求选出有限多个指标。紧性中的“有限”是结论，不是开覆盖一开始就有限。

命题 5.28 (空集与有限集的紧性)**.** *空集和每个有限子集 $K \subseteq \mathbb{R}$ 都紧。*

证明. 任意集合族都覆盖空集，其中空的子族是有限子覆盖。若 $K = \{x_1, \dots, x_m\}$，给定开覆盖，对每个 x_j 取一个含它的成员 U_j。至多 m 个成员就覆盖 K。这里只进行有限次选择。 □

例 5.29 (两个非紧性的直接见证)**.** $\mathbb{R}$ 的开覆盖

$$\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

没有有限子覆盖：有限多个区间的并等于其中最大的一个 $(-N, N)$，而 $N + 1 \notin (-N, N)$。

$(0, 1)$ 的开覆盖

$$\mathcal{V} = \{(1/n, 1) : n \geq 2\}$$

覆盖 $(0, 1)$：给定 $x > 0$，Archimedes 性取 $n > 1/x$，则 $1/n < x < 1$。任意有限子族的并仍为 $(1/N, 1)$（其中 N 是最大指标），它遗漏 $(0, 1/N] \cap (0, 1)$ 中的点，故没有有限子覆盖。

$[0, 1]$ 与 $(0, 1)$ 的差异不是“端点只有两个”这么简单；第五章的核心定理会说明闭性和有界性共同承担有限化的责任。

引理 5.30 (有限覆盖的二分保持性)**.** *设 $I = [a, b]$，$a < b$，$\mathcal{U}$ 是 I 的开覆盖。若 I 没有有限子覆盖，则至少有一个半区间*

$$I^- = [a, (a + b)/2], \qquad I^+ = [(a + b)/2, b]$$

没有有限子覆盖。

证明. 若两个半区间都有有限子覆盖，分别取有限子族 $\mathcal{V}^-$ 与 $\mathcal{V}^+$。它们的并仍是有限族，并且

$$I = I^- \cup I^+ \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{V}^- \cup \mathcal{V}^+} U,$$

这将给出 I 的有限子覆盖，与假设矛盾。因此至少一半不能有限覆盖。 □

定理 5.31 (闭区间的有限覆盖定理)**.** *设 $a \leq b$。闭区间 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 的每个开覆盖都有有限子覆盖。*

证明. 若 $a=b$，覆盖中有某个开集 U 含 a，单个 U 就是有限子覆盖。以下设 $a<b$，并反设开覆盖 $\mathcal{U}$ 没有有限子覆盖。

由引理 5.30 递归构造闭区间

$$I_n=[a_n,b_n]$$

使 $I_1=[a,b]$，每个 I_n 没有有限子覆盖，$I_{n+1}\subseteq I_n$，且

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

若左半区间没有有限子覆盖，就选左半；否则选右半。引理保证后一情形中右半仍没有有限子覆盖，所以递归始终可进行。

第四章的区间套性质给出唯一 $c\in\bigcap_n I_n$。由于 $\mathcal{U}$ 覆盖 $[a,b]$，存在 $U_0\in\mathcal{U}$ 使 $c\in U_0$。U_0 开，所以存在 $r>0$ 使 $B(c,r)\subseteq U_0$。

由 Archimedes 性取 n 使

$$\frac{b-a}{2^{n-1}}<r.$$

若 $x\in I_n$，又因 $c\in I_n$，则

$$|x-c|\le b_n-a_n<r,$$

故 $I_n\subseteq B(c,r)\subseteq U_0$。于是单个 U_0 覆盖 I_n，与 I_n 没有有限子覆盖矛盾。反设不成立，定理得证。 □

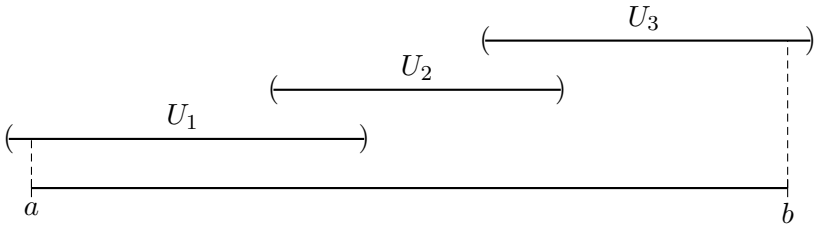


图 5.2: 有限子覆盖的位置示意。开区间可越过 a,b，因而能覆盖闭区间的端点；一般开覆盖的成员无需全是区间。

命题 5.32 (相对开覆盖与外部开覆盖等价). *对 $K\subseteq E\subseteq\mathbb{R}$，以下两个有限覆盖性质等价：每个由 $\mathbb{R}$ 中开集组成的 K 的覆盖有有限子覆盖；每个由 E 中相对开集组成的 K 的覆盖有有限子覆盖。*

证明. 若 $V_i=E\cap G_i$ 为相对开覆盖，G_i 开，则 (G_i) 也覆盖 K。取其有限子覆盖后，与 E 相交便得到原相对覆盖的有限子覆盖。反向，若 (G_i) 是外部开覆盖，令 $V_i=E\cap G_i$；相对有限子覆盖给出同样指标的 G_i 覆盖 K。因此有限覆盖性质不依赖于将 K 看作 $\mathbb{R}$ 或 E 中的子集。 □

定理 5.33 (有限覆盖推出区间套性质). *若每个闭区间的开覆盖都有有限子覆盖，则任意满足*

$$I_{n+1}\subseteq I_n,\qquad I_n=[a_n,b_n]\neq\varnothing,\qquad b_n-a_n\to 0$$

的闭区间列都有非空交集。

证明. 只需证明交集非空；若有两个不同公共点，它们的正距离不超过每个区间长度，与长度趋零矛盾，因此唯一性不依赖其他完备性性质。反设 $\bigcap_n I_n = \varnothing$。考虑相对首区间 $I_1 = [a_1, b_1]$ 中的集合

$$U_n = I_1 \setminus I_n.$$

I_n 是 $\mathbb{R}$ 中闭集，所以 U_n 是 I_1 的相对开集。对每个 $x \in I_1$，交集为空意味着存在 n 使 $x \notin I_n$，故 $x \in U_n$。因此 $(U_n)_{n\ge 1}$ 是 I_1 的相对开覆盖。

由假设取有限子覆盖 $U_{n_1}, \dots, U_{n_m}$。令 $N = \max\{n_1, \dots, n_m\}$。由于区间嵌套，$I_N \subseteq I_{n_j}$ 对每个 j，所以 $I_N \cap U_{n_j} = \varnothing$。有限并仍不能覆盖 I_N，但 $I_N \subseteq I_1$ 且 $I_N \neq \varnothing$，与 $I_1 = \bigcup_{j=1}^{m} U_{n_j}$ 矛盾。因此交集非空。 □

推论 5.34 (Heine–Borel 与区间套的等价). *在 $\mathbb{R}$ 中，闭区间有限覆盖性质与长度趋零的闭区间套性质等价。*

证明. 定理 5.31 给出区间套性质所需的有限覆盖性质，定理 5.33 给出反向蕴含。 □

定理 5.35 (第八种完备性表述). *在任意固定的 Archimedes 有序域 F 内，以 $B_F(x,r) = \{y \in F : |y - x| < r\}$ 定义开集。下列性质与第四章的七种性质等价：*

(H) *F 中每个闭有界区间的开覆盖都有有限子覆盖。*

证明. 从第四章的 (N) 出发，定理 5.31 的二分证明可以逐行在 F 中进行：两个半区间不能都能有限覆盖，二分长度 $(b-a)2^{-(n-1)}$ 在 Archimedes 性下趋零，(N) 给出 F 中的共同点 c，覆盖开集在 c 处提供半径 $r \in F$。最后整个小区间包含于该球，产生矛盾。此方向不另外假设 F 有上确界。

反向假定 (H)。闭区间在 F 中闭，因为其补集是两个开射线；证明只用域序和 $(a-x)/2$ 或 $(x-b)/2$ 这些正半径，与实数情形相同。对嵌套非空闭区间 I_n，若交空，开集 $G_n = F \setminus I_n$ 覆盖 I_1。(H) 给有限指标 $n_1, \dots, n_m$。取 N 为这些指标的最大值，$I_N \subseteq I_{n_j}$ 使 I_N 不遇到任何 G_{n_j}，但 I_N 非空且包含于 I_1，矛盾。所以交非空；当长度趋零时，任意两个公共点的距离不超过各长度，正距离的一半就会与趋零矛盾，所以公共点唯一，得到 (N)。第四章的等价闭环遂将 (H) 与其余七项连接。 □

以上证明补全了包含开覆盖性质的八种完备性表述。计数不同是因为上、下确界以及数列、集合两种聚点表述可以分别列项；实质是所有蕴含都在同一前提下成立。

5.5 紧集的基本性质

命题 5.36 (紧集的有限并与闭子集). *有限个紧集的并是紧集。若 K 紧且 $F \subseteq K$ 在 $\mathbb{R}$ 中闭，则 F 紧。*

证明. 设 $K_1, \dots, K_m$ 紧，$\mathcal{U}$ 是 $\bigcup_{j=1}^{m} K_j$ 的开覆盖。限制到每个 K_j，取有限子覆盖 $\mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{U}$。有限个有限族的并仍有限，并覆盖所有 K_j，所以覆盖并集。

设 $F \subseteq K$ 且 F 闭。给定 F 的开覆盖 $\mathcal{U}$，加入开集 $\mathbb{R} \setminus F$，得到 K 的开覆盖 $\mathcal{U} \cup \{\mathbb{R} \setminus F\}$。由 K 紧取有限子覆盖。删去可能出现的 $\mathbb{R} \setminus F$，剩下的 $\mathcal{U}$ 中有限个成员仍覆盖 F，故 F 紧。 □

定理 5.37 (紧集有界). *每个紧集 $K \subseteq \mathbb{R}$ 都有界。*

证明. 若 $K=\varnothing$，任取正界即可。以下设 $K\neq\varnothing$。开集族

$$\mathcal{U}=\{(-n,n):n\in\mathbb{N}\}$$

覆盖 K：任意 $x\in K$ 取整数 $n>|x|$，则 $x\in(-n,n)$。由紧性取有限子覆盖，其指标记为 $n_1,\dots,n_m$。令 $N=\max\{n_1,\dots,n_m\}$，有限并包含于 $(-N,N)$，所以 $K\subseteq(-N,N)$，即 K 有界。 □

定理 5.38 (紧集闭)**.** *每个紧集 $K\subseteq\mathbb{R}$ 都是闭集。*

证明. 若 $K=\varnothing$，它的补集为开集 $\mathbb{R}$，结论成立。以下设 $K\neq\varnothing$。取 $x\notin K$。对每个 $y\in K$，因为 $x\neq y$，令

$$r_y=\frac{|x-y|}{3}>0.$$

开球 $B(y,r_y)$ 覆盖 K。由紧性取有限个 $y_1,\dots,y_m\in K$，使

$$K\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}B(y_j,r_{y_j}).$$

令

$$\rho=\frac{1}{2}\min_{1\le j\le m}r_{y_j}>0.$$

我们证明 $B(x,\rho)\cap K=\varnothing$。若相反存在 $z\in B(x,\rho)\cap K$，则某个 j 满足

$$|z-y_j|<r_{y_j},\qquad |z-x|<\rho\le\frac{r_{y_j}}{2}.$$

三角不等式给出

$$|x-y_j|\le|x-z|+|z-y_j|<\frac{r_{y_j}}{2}+r_{y_j}=\frac{3}{2}r_{y_j}.$$

另一方面 $|x-y_j|=3r_{y_j}$，矛盾。因此每个 $x\notin K$ 都有邻域落在补集，补集开，K 闭。 □

定理 5.39 (Heine–Borel 定理)**.** *对 $K\subseteq\mathbb{R}$，以下三条等价：*

(1) *K 紧；*

(2) *K 闭且有界；*

(3) *K 的每个开覆盖都有有限子覆盖。*

证明. (1) 与 (3) 是紧性的定义。(1)⇒(2) 由定理 5.37 和 5.38。

现设 K 闭且有界。存在 $M>0$ 使 $K\subseteq[-M,M]$。由定理 5.31，闭区间 $[-M,M]$ 紧。给定 K 的开覆盖 $\mathcal{U}$，加入开集 $\mathbb{R}\setminus K$，得到 $[-M,M]$ 的开覆盖。取有限子覆盖后删去补集 $\mathbb{R}\setminus K$，剩余有限个 $\mathcal{U}$ 中的集合覆盖 K。所以 K 紧。 □

例 5.40 (闭性、有界性分别不可省略)**.** 集合 $(0,1]$ 有界但不闭。开覆盖

$$\{(1/n,\,2):n\ge2\}$$

覆盖 $(0,1]$，但任意有限子族遗漏足够靠近 0 的点，所以它不紧。

集合 $[0,+\infty)$ 闭但无界。开覆盖 $\{(-1,n):n\in\mathbb{N}\}$ 没有有限子覆盖，因为有限并只能到某个有限右端点。这两个例子分别说明闭性控制极限点是否被包含，有界性控制覆盖是否能逃向无穷远。

5.6 有限交性质与一致的局部尺度

定义 5.41 (有限交性质)**.** 集合族 $(F_i)_{i\in I}$ 具有有限交性质，指对每个有限指标子集 $J\subseteq I$，都有 $\bigcap_{i\in J}F_i\neq\varnothing$。在环境集合 K 中，空指标交约定为 K。

定理 5.42 (紧性的闭集有限交刻画)**.** 非空集合 $K\subseteq\mathbb{R}$ 紧，当且仅当 K 中任意具有有限交性质的相对闭集族 $(F_i)_{i\in I}$ 都满足 $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\varnothing$。

证明. 先设 K 紧。若一族相对闭集总交为空，则 $(K\setminus F_i)_{i\in I}$ 是 K 的相对开覆盖。相对覆盖与外部覆盖等价，所以有有限指标 $i_1,\dots,i_m$，使 $K=\bigcup_{j=1}^{m}(K\setminus F_{i_j})$。在 K 中取补得到 $\bigcap_{j=1}^{m}F_{i_j}=\varnothing$，与有限交性质矛盾。

反向，设有限交性质蕴含总交非空。若某个相对开覆盖 (U_i) 没有有限子覆盖，则对任意有限 J，$K\setminus\bigcup_{i\in J}U_i\neq\varnothing$。令 $F_i=K\setminus U_i$，这族相对闭集具有有限交性质，故总交非空。但 $\bigcap_i F_i=K\setminus\bigcup_i U_i=\varnothing$，矛盾。所以每个相对开覆盖都有有限子覆盖，$K$ 紧。 □

推论 5.43 (嵌套紧集的交)**.** 若 $K_1\supseteq K_2\supseteq\cdots$ 是非空紧集列，则交集非空。若进一步存在正数 $\delta_n\to 0$，使任意 $x,y\in K_n$ 满足 $|x-y|\le\delta_n$，则交集恰有一点。

证明. 每个 K_n 在实轴中闭，因而是 K_1 中的相对闭集。任取有限多个指标，它们的交就是最大指标对应的非空集合，所以具有有限交性质；由定理 5.42 得总交非空。若共同点 x,y 不同，则以误差 $|x-y|/2$ 取 n 使 $\delta_n<|x-y|/2$，与 $|x-y|\le\delta_n$ 矛盾，故唯一。 □

命题 5.44 (有限网)**.** 若 K 紧，则每个 $\varepsilon>0$ 下，存在有限多个 $x_1,\dots,x_m\in K$，使 $K\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}B(x_j,\varepsilon)$。这些点称为 K 的一个有限 ε-网。

证明. 以 K 的每一点为中心作半径 ε 的开球，得到开覆盖。紧性直接给出有限子覆盖。若 $K=\varnothing$，用空的有限网。 □

定理 5.45 (开覆盖的 Lebesgue 数)**.** 设 $K\subseteq\mathbb{R}$ 非空且紧，$\mathcal{U}$ 是 K 的开覆盖。存在统一的 $\lambda>0$，使对每个 $x\in K$，至少有一个 $U\in\mathcal{U}$ 满足

$$K\cap B(x,\lambda)\subseteq U.$$

因此只要 $A\subseteq K$ 非空，且任意 $a,b\in A$ 都有 $|a-b|<\lambda$，则 A 包含在某个覆盖成员中。

证明. 考虑所有满足

$$x\in K,\quad r>0,\quad \text{存在}U\in\mathcal{U}\ \text{使}B(x,2r)\subseteq U$$

的开球 $B(x,r)$。这族小球覆盖 K：对每个 x 先取含它的覆盖成员，再把开性给出的半径缩小四倍即可。紧性给有限子覆盖 $B(x_j,r_j)$，$1\le j\le m$；对这有限多个球各取一个 $U_j\in\mathcal{U}$，使 $B(x_j,2r_j)\subseteq U_j$。这个构造避免对任意多个 x 同时选择覆盖成员。令 $\lambda=\min_j r_j>0$。任意 $x\in K$ 属于某个 $B(x_j,r_j)$。若 $y\in K\cap B(x,\lambda)$，则

$$|y-x_j|\le|y-x|+|x-x_j|<\lambda+r_j\le 2r_j,$$

所以 $y\in U_j$。这证明统一半径。若 A 如陈述，固定 $a\in A$，其余所有点都在 $K\cap B(a,\lambda)$ 中，因而整个 A 被某个 U 包含。 □

有限网把整个集合用有限个小球逼近；Lebesgue 数则保证给定开覆盖存在一个对全体点有效的小尺度。两者的量词方向不同，这里均由具体有限子覆盖构造，而不是预先假设存在统一半径。

5.7 紧性与序列紧性

定义 5.46 (序列紧性)**.** 集合 $K \subseteq \mathbb{R}$ 称为序列紧，若 K 中每条数列都有一条收敛于 K 中某一点的子列。

引理 5.47 (没有收敛子列时的局部有限性)**.** *设 $(x_n) \subseteq K$。若它没有任何收敛到 K 中点的子列，则对每个 $x \in K$，存在 $r_x > 0$，使*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, r_x)\}$$

是有限集。

证明. 反设存在 $x \in K$，使任意 $r > 0$ 都有无穷多个指标满足 $x_n \in B(x, r)$。递归选取严格递增的指标：令 n_1 为满足 $|x_{n_1} - x| < 1$ 的一个指标；若已选 n_{j-1}，由于满足 $|x_n - x| < 1/j$ 的指标无限，选取 $n_j > n_{j-1}$ 的一个指标。于是

$$|x_{n_j} - x| < 1/j \to 0,$$

所以 $x_{n_j} \to x \in K$，与假设矛盾。因此存在所需半径。 □

定理 5.48 (紧集蕴含序列紧)**.** *紧集 $K \subseteq \mathbb{R}$ 是序列紧的。*

证明. 设 $(x_n) \subseteq K$。若没有收敛到 K 中点的子列，由引理 5.47，每个 $x \in K$ 至少有一个正半径使球内原指标集有限。可以令 $j(x)$ 为使 $B(x, 1/j(x))$ 内指标有限的最小正整数，再置 $r_x = 1/j(x)$；$1/j \to 0$ 保证候选存在，因此这里不要求对任意点族作任意选择。开球族

$$\{B(x, r_x) : x \in K\}$$

覆盖 K，并且每个球只包含数列的有限多个指标。紧性给出有限子覆盖

$$K \subseteq B(x_1, r_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_m, r_{x_m}).$$

所有自然数指标都必须落入这 m 个球中的至少一个；每个球对应的指标集有限，有限个有限集的并仍有限，不可能覆盖 $\mathbb{N}$。矛盾。所以存在收敛到 K 中一点的子列。 □

定理 5.49 (序列紧推出闭且有界)**.** *若 $K \subseteq \mathbb{R}$ 序列紧，则 K 闭且有界。*

证明. 若 K 无界，可递归选取 $x_n \in K$ 满足 $|x_n| > n$。任意子列仍满足 $|x_{n_j}| \geq n_j \geq j$，不可能收敛于实数，与序列紧性矛盾。因此 K 有界。

设 $x \in \overline{K}$。由闭包的序列刻画，存在 $x_n \in K$ 且 $x_n \to x$。序列紧性给出一条子列 $x_{n_j} \to y \in K$。另一方面，收敛列的子列仍收敛到原极限，所以 $x_{n_j} \to x$。极限唯一性给 $x = y \in K$。因此 $\overline{K} \subseteq K$，而 $K \subseteq \overline{K}$，故 K 闭。 □

命题 5.50 (闭性与子集内部的 Cauchy 完备性)**.** *对 $E \subseteq \mathbb{R}$，下列条件等价：E 在 $\mathbb{R}$ 中闭；每条取值于 E 的 Cauchy 列都收敛到 E 中一点。*

证明. 若 E 闭，任意 E 中 Cauchy 列因实数完备性先在 $\mathbb{R}$ 中收敛。闭集的序列判据使极限仍属于 E，得到子集内部的完备性。反向，若子集内部 Cauchy 完备，给定 $x_n \in E$ 在 $\mathbb{R}$ 中收敛到 x，收敛列是 Cauchy 列，因此存在 $y \in E$ 使同一列收敛于 y。极限唯一性给 $x = y \in E$，序列判据说明 E 闭。这项等价依赖环境 $\mathbb{R}$ 已经完备，不能只凭任意环境中的闭性下结论。 □

定理 5.51 (实直线上紧性与序列紧性等价)**.** 对 $K \subseteq \mathbb{R}$，以下等价：

$$K \text{ 紧} \iff K \text{ 序列紧} \iff K \text{ 闭且有界}.$$

证明. 紧推出序列紧由定理 5.48。序列紧推出闭且有界由定理 5.49。闭且有界推出紧由 Heine–Borel 定理 5.39。 □

5.8 连通性与实数区间

定义 5.52 (分离与连通)**.** 设 $E \subseteq \mathbb{R}$。若存在相对开集 $U, V \subseteq E$，满足

$$E = U \cup V, \qquad U \cap V = \varnothing, \qquad U \neq \varnothing,\ V \neq \varnothing,$$

则称 (U, V) 是 E 的一个分离。若不存在分离，称 E 连通。相对开采用定义 5.13 的约定。

引理 5.53 (相对开集的局部球形式)**.** 若 $U \subseteq E$ 相对开且 $x \in U$，则存在 $r > 0$ 使

$$E \cap B(x, r) \subseteq U.$$

证明. 由相对开定义，$U = E \cap G$ 且 G 开。取 $B(x, r) \subseteq G$，则 $E \cap B(x, r) \subseteq E \cap G = U$。 □

定义 5.54 (区间性质)**.** 集合 $J \subseteq \mathbb{R}$ 称为区间，若任取 $p, q \in J$ 且 $p < q$，所有满足 $p < t < q$ 的实数 t 都属于 J。空集和单点集也按此定义视为区间。

定理 5.55 (实数区间连通)**.** 若 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是区间，则 J 连通。

证明. 空集和单点集不可能拆成两个不交的非空部分，所以连通。反设区间 J 有分离 $J = U \cup V$。分别选 $u \in U, v \in V$。它们不同；令 $p = \min\{u, v\}$，$q = \max\{u, v\}$。必要时交换两个部分的名字，便有 $p < q$，$p \in U$，$q \in V$，且 $[p, q] \subseteq J$。

令

$$S = \{x \in [p, q] : [p, x] \subseteq U\}.$$

因为 $p \in U$，相对开性给出 $\delta > 0$ 使 $J \cap (p - \delta, p + \delta) \subseteq U$，令 $x = p + \min\{\delta/2, (q - p)/2\}$。则 $p < x < q$ 且 $[p, x] \subseteq J \cap (p - \delta, p + \delta) \subseteq U$，所以 $S \neq \varnothing$。又 $S \subseteq [p, q]$，故有上界。由实数上确界性质令 $s = \sup S$。

先证明 $s \in U$。若 $s \in V$，由相对开性存在 $\delta > 0$ 使 $J \cap (s - \delta, s + \delta) \subseteq V$。由 $s = \sup S$，可取 $x \in S$ 且 $s - \delta/2 < x \leq s$。若 $x = s$，则 $s \in U \cap V$，矛盾；若 $x < s$，则 $x \in U$ 且 $x \in J \cap (s - \delta, s + \delta) \subseteq V$，仍矛盾。所以 $s \notin V$，而 $s \in J = U \cup V$，故 $s \in U$。

再由 U 的相对开性，取 $\eta > 0$ 使 $J \cap (s - \eta, s + \eta) \subseteq U$。由于 $s \in U$，对任意 $t \in [p, s)$，上确界定义给出某个 $x \in S$ 满足 $t < x \leq s$，于是 $t \in [p, x] \subseteq U$。因此 $[p, s] \subseteq U$。若 $s < q$，取

$$y = s + \min\{\eta/2, (q - s)/2\} > s.$$

区间性质保证 $y \in J$，且 $[s, y] \subseteq U$，从而 $[p, y] \subseteq U$，即 $y \in S$，与 s 为上界矛盾。故 $s = q$，但 $q \in V$ 且 $q \in [p, s] \subseteq U$，矛盾。所以 J 连通。 □

定理 5.56 (连通子集的区间刻画)**.** 非空集合 $E \subseteq \mathbb{R}$ 连通，当且仅当 E 是区间。

证明. 区间连通已由定理 5.55 证明。反向设 E 连通。若 $p,q\in E$ 且 $p<q$，任取 $r\in(p,q)$。若 $r\notin E$，令

$$U=E\cap(-\infty,r),\qquad V=E\cap(r,\infty).$$

两者是 E 的相对开集，且不交；因为 $p\in U$, $q\in V$，两者非空。由于 $r\notin E$，有 $E=U\cup V$，构成分离，矛盾。所以每个 $r\in(p,q)$ 都属于 E，这正是区间性质。 □

命题 5.57 (连通集的端点形式). *非空连通子集 $E\subseteq\mathbb{R}$ 必为以下类型之一：*

$$(a,b),\ [a,b),\ (a,b],\ [a,b],\quad (-\infty,b),\ (-\infty,b],\ (a,+\infty),\ [a,+\infty),\ \mathbb{R},$$

以及单点集；端点是否属于集合由集合本身决定。

证明. 定理 5.56 已给出 E 是区间。若 E 有上、下界，令 $a=\inf E, b=\sup E$。若 $a=b$，非空性使 $E=\{a\}$。若 $a<b$，对每个 $x\in(a,b)$，$x>a$ 保证有 $u\in E$ 使 $u<x$，否则 x 将是大于 a 的下界；$x<b$ 保证有 $v\in E$ 使 $v>x$，否则 x 将是小于 b 的上界。由区间性质 $x\in E$，所以 $(a,b)\subseteq E\subseteq[a,b]$。端点分别可能属于或不属于 E。若仅有下界 $a=\inf E$，对每个 $x>a$，用下确界取 $u<x$，用无上界性取 $v>x$，得到 $x\in E$，所以 E 为 $(a,+\infty)$ 或 $[a,+\infty)$。若仅有上界 $b=\sup E$，对每个 $x<b$，用无下界性取 $u<x$，用上确界取 $v>x$，得到 $E=(-\infty,b)$ 或 $(-\infty,b]$。若两侧都无界，每个实数 x 都有 $u,v\in E$ 使 $u<x<v$，所以 $E=\mathbb{R}$。 □

5.9 Cantor 集：闭区间的递归删除

Cantor 集展示了紧性、没有孤立点、内部为空与不可数性可以同时出现。本节只使用闭集、有限几何和与区间套。无穷数字表达式先定义为部分和极限，不提前调用下一章的级数理论。

定义 5.58 (Cantor 集的有限阶段). 令 $C_0=[0,1]$。若 C_n 已写成有限个不交闭区间的并，把其中每个基本区间 $[u,v]$ 的开中三分之一

$$\left(u+\frac{v-u}{3},\,u+\frac{2(v-u)}{3}\right)$$

删除，保留左右两个闭区间，得到 C_{n+1}。定义

$$\mathcal{C}=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n$$

为 Cantor 集。

引理 5.59 (有限阶段的数量、位置与端点). *第 n 阶集合 C_n 是 2^n 个两两不交、彼此有正间隔的闭区间之并，每个基本区间长 3^{-n}。若按一条路径依次选择左右分支，以 $\omega_j=0$ 记左支、$\omega_j=1$ 记右支，则第 n 阶区间为*

$$I_{\omega_1\cdots\omega_n}=[s_n,s_n+3^{-n}],\qquad s_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{2\omega_j}{3^j}.$$

任何阶段基本区间的端点都属于 $\mathcal{C}$。

证明. $n=0$ 时一个区间 $[0,1]$，用空和 $s_0=0$ 表示。设结论对 n 成立。从长度 3^{-n}、左端点 s_n 的区间出发，左支的左端点仍为 s_n，右支的左端点为 $s_n+2\cdot 3^{-(n+1)}$；两支长度都为 $3^{-(n+1)}$，中间空隙也长 $3^{-(n+1)}>0$。因此区间数量加倍，且左端点公式在增加一位数字后仍成立。不同父区间已有正间隔，子区间不会填入该间隔，故所有新基本区间仍两两分离。归纳得数量、长度与位置公式。

一个端点在下一步仍是某个保留子区间的端点；归纳可知它在所有后续阶段都保留，也属于所有先前阶段。因此属于 $\bigcap_n C_n=\mathcal{C}$。 □

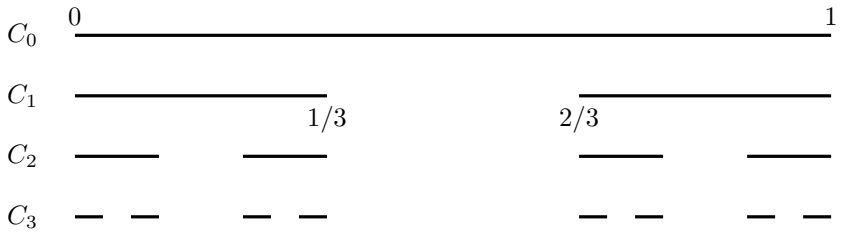


图 5.3: Cantor 集的前四个阶段。每次删除开中三分之一，端点始终保留。第 n 阶仍有 2^n 个长度为 3^{-n} 的基本区间。

引理 5.60 (Cantor 集非空且紧). *$\mathcal{C}$ 是非空闭有界集，因而紧。*

证明. 由端点结论，$0,1\in C_n$ 对每个 n 成立，所以 $0,1\in\mathcal{C}$，特别交集非空。每个 C_n 为有限个闭区间的并，因而闭；任意闭集族的交仍闭，所以 $\mathcal{C}$ 闭。又 $\mathcal{C}\subseteq[0,1]$ 有界，由 Heine–Borel 定理知其紧。 □

定义 5.61 (完美集与无处稠密集). 若集合 P 闭且没有孤立点，称 P 为完美集。若 $(\overline{A})^\circ=\varnothing$，称 A 无处稠密。后一个定义要求闭包没有内部，而不只是 $A^\circ=\varnothing$。

命题 5.62 (Cantor 集完美且无处稠密). *$\mathcal{C}$ 的每个点都是其聚点，而且 $\mathcal{C}^\circ=\varnothing$；因此 $\mathcal{C}$ 是完美的无处稠密紧集。*

证明. 给定 $x\in\mathcal{C},\varepsilon>0$，选 n 使 $3^{-n}<\varepsilon$。$x\in C_n$，所以它属于一个基本区间 $[u,v]$，长度 $3^{-n}>0$。两个端点都在 $\mathcal{C}$ 中；若 $x\neq u$，取 $y=u$，若 $x=u$，取 $y=v$。则 $y\neq x$，$|y-x|\le v-u=3^{-n}<\varepsilon$，故 x 是聚点。

反设内部非空，则存在 $\alpha<\beta$ 使 $(\alpha,\beta)\subseteq\mathcal{C}$。令 $x=(\alpha+\beta)/2$，取 n 使 $3^{-n}<\min\{x-\alpha,\beta-x\}$。包含 x 的第 n 阶区间 I 中任意点距 x 不超过 3^{-n}，因此 $I\subseteq(\alpha,\beta)$。然而 I 的中点在下一步被删除，不属于 $\mathcal{C}$，矛盾。故内部空。闭性使 $\overline{\mathcal{C}}=\mathcal{C}$，所以闭包内部也空；完美性则来自闭性与刚证的无孤立点。 □

5.10 三进制编码与不可数性

引理 5.63 (有限几何和与数字串的极限). *对 $d_j\in\{0,1,2\}$，令 $s_n=\sum_{j=1}^{n}d_j3^{-j}$。则 s_n 收敛，且其极限 s 满足*

$$0\le s-s_n\le 3^{-n}.$$

证明. 先验证有限恒等式

$$\sum_{j=n+1}^{m} \frac{2}{3^j} = 3^{-n} - 3^{-m} \quad (m > n).$$

因为 $2 \cdot 3^{-j} = 3^{-(j-1)} - 3^{-j}$，相加时中间项逐个消去，只留下右端。取 $n = 0$ 得 $0 \le s_m \le 1 - 3^{-m} < 1$。$s_m$ 非减且有界，单调收敛定理给 $s_m \to s \in \mathbb{R}$。固定 n，对 $m > n$ 有

$$0 \le s_m - s_n \le 3^{-n} - 3^{-m} \le 3^{-n}.$$

在 m 上取极限，保序性给 $0 \le s - s_n \le 3^{-n}$。以后符号 $\sum_{j\ge1} d_j 3^{-j}$ 仅指这个已经构造的部分和极限。 □

定理 5.64 (无数字一的三进制表示)**.** 映射

$$\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{C}, \qquad \Phi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{2\omega_j}{3^j}$$

是双射。因此一个 $x \in [0,1]$ 属于 $\mathcal{C}$，当且仅当它有至少一种只使用数字 $0,2$ 的三进制小数表示；在这类表示中它的数字串唯一。

证明. 令 s_n 为定义中的部分和。前一引理给极限 x 存在，且 $s_n \le x \le s_n + 3^{-n}$。有限阶段公式说明 $[s_n, s_n + 3^{-n}]$ 是相应路径的基本区间，所以 $x \in C_n$ 对每个 n 成立，即 $x \in \mathcal{C}$。

若 $\omega \ne \eta$，令 j 为首个不同指标，交换二者可设 $\omega_j = 1, \eta_j = 0$。对 $m \ge j$，部分和差满足

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2\omega_k - 2\eta_k}{3^k} \ge \frac{2}{3^j} - \sum_{k=j+1}^{m} \frac{2}{3^k} = 3^{-j} + 3^{-m} \ge 3^{-j}.$$

令 $m \to \infty$，得到 $\Phi(\omega) - \Phi(\eta) \ge 3^{-j} > 0$，所以映射单射。

反向，给定 $x \in \mathcal{C}$，第 n 阶基本区间彼此不交，所以 x 属于唯一一个基本区间 I_n。第 $n+1$ 阶的区间有唯一父区间，故 $I_{n+1} \subseteq I_n$。逐步记录左右选择为 ω_n；这些选择由 x 唯一确定。有限阶段公式给 $I_n = [s_n, s_n + 3^{-n}]$，故 $0 \le x - s_n \le 3^{-n} \to 0$。所以 $x = \Phi(\omega)$，证明满射。 □

命题 5.65 (端点的两种三进制表示)**.** 允许数字 $0,1,2$ 时，同一数可能有两种三进制小数表示；但不同的纯 $0,2$ 数字串绝不代表同一实数。若两个不同数字串代表同一数，它们在首个不同位置 j 的数字恰差一，较大数字后必须全为 0，较小数字后必须全为 2。

证明. 设两串 $d_k, e_k \in \{0,1,2\}$ 在 j 前相等，且 $d_j > e_j$。用有限和恒等式并取极限，有尾部的绝对差至多 3^{-j}。因此两数相等只能发生于 $d_j - e_j = 1$，且尾部差恰为 -3^{-j}，即

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=j+1}^{m} \frac{d_k - e_k + 2}{3^k} = 0.$$

每个加数非负。若存在 $k > j$ 使 $d_k - e_k + 2 > 0$，所有从该指标起的部分和都至少为这个固定正数，不可能趋零。所以每个 $k > j$ 都有 $d_k = 0, e_k = 2$。反向，这种尾部的有限和趋于 -3^{-j}，确实抵消首个差 3^{-j}，所以产生相同实数。两个纯 $0,2$ 串的首个不同数字差为 2，不能满足差一条件，因而它们永不重复。

例如

$$\frac{1}{3} = 0.1000\ldots_3 = 0.0222\ldots_3.$$

第二个表示只用 $0,2$，所以 $1/3 \in \mathcal{C}$。若只检查某一种表示是否出现数字 1，就会错误地删去这个保留端点。此外 $1 = 1.000\ldots_3 = 0.2222\ldots_3$，后者由有限恒等式 $1 - 3^{-n} \to 1$ 验证。 □

定理 5.66 (Cantor 集不可数)**.** *$\mathcal{C}$ 不可数。*

证明. 若 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 可数，由于它无限，可列成 $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots$。令 $\eta_n = 1 - \omega_n^{(n)}$。则 $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，但它在第 n 位不同于第 n 个被列出的串，故不在列表中，矛盾。因此 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 不可数。前一定理的双射 Φ 使 $\mathcal{C}$ 同样不可数。此论证比较的是无限数字串，有限阶段有 2^n 个区间本身并不足以证明不可数。 □

命题 5.67 (Cantor 集的连通子集只有单点)**.** *若 $E \subseteq \mathcal{C}$ 连通，则 E 至多有一个点。*

证明. 若 $p < q$ 都属于 E，实轴连通集的区间刻画给 $[p,q] \subseteq E \subseteq \mathcal{C}$。于是非空开区间 (p,q) 包含于 $\mathcal{C}$，违反其内部为空。因此不存在两个不同点。这表明没有孤立点并不强迫存在非平凡连通部分。 □

5.11 稠密开集的交与 Baire 定理

内部为空与无处稠密不能混用：$\mathbb{Q}$ 内部为空，但 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$，因而它不是无处稠密集。下面的结论把闭区间套用于另一个问题：可数多次剔除闭的稀疏集合后，是否还会留下点？

定理 5.68 (实直线的 Baire 定理)**.** *若 $G_1, G_2, \ldots$ 是 $\mathbb{R}$ 中稠密开集，则 $\bigcap_{n\ge 1} G_n$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。*

证明. 必须证明任意非空开集 O 都遇到这个交集。取 $x_0 \in O$，由开性取 $r_0 > 0$ 使 $B(x_0, 2r_0) \subseteq O$，并将 r_0 缩小使 $r_0 \le 1/2$。令 $I_0 = [x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subseteq O$，它的内部非空。

已构造 $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ 且 $a_{n-1} < b_{n-1}$ 时，稠密性使非空开区间 (a_{n-1}, b_{n-1}) 遇到 G_n。取其中一点 x_n。G_n 开，取 $t_n > 0$ 使 $B(x_n, t_n) \subseteq G_n$。定义

$$r_n = \min\left\{ \frac{x_n - a_{n-1}}{2},\ \frac{b_{n-1} - x_n}{2},\ \frac{t_n}{2},\ 2^{-n-2} \right\} > 0, \qquad I_n = [x_n - r_n, x_n + r_n].$$

这些显式半径给出

$$I_n \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1}) \cap G_n, \qquad |I_n| = 2r_n \le 2^{-n-1}.$$

每步选点使用本册既定的依赖选择背景。于是 I_n 非空、闭、嵌套且长度趋零，闭区间套给共同点 c。它属于 $I_0 \subseteq O$，并且对每个 $n \ge 1$ 都属于 $I_n \subseteq G_n$，所以 $c \in O \cap \bigcap_n G_n$。因为 O 任意，交集稠密。 □

推论 5.69 (可数个无处稠密集不能覆盖开区间)**.** *若 $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ 都无处稠密，则其并不包含任何非空开区间。*

证明. 令 $G_n = \mathbb{R} \setminus \overline{A_n}$。它开。若 G_n 不稠密，则存在非空开球不遇到 G_n，即整个球包含于 $\overline{A_n}$，违反闭包内部为空。因此每个 G_n 稠密。Baire 定理给出每个非空开区间都遇到 $\bigcap_n G_n = \mathbb{R} \setminus \bigcup_n \overline{A_n}$。该点也不属于 $\bigcup_n A_n$，证明结论。 □

例 5.70 (可数集与不可数的无处稠密集)**.** 每个单点集闭且内部为空，所以无处稠密。若 $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ 可数，上个推论表明任意非空开区间都有不属于 D 的点。这再次证明实轴不可数，但不表示可数集一定不稠密：$\mathbb{Q}$ 就稠密。

反过来，Cantor 集无处稠密却不可数。因此可数性与无处稠密是不同的概念。这里称可数个无处稠密集之并为第一纲集；Baire 定理说明任何非空开区间都不是实轴中的第一纲集，并没有使用测度或“长度为零”的结论。

5.12 反例、边界与本章接口

命题 5.71 (闭有界并不等于任意空间中的紧)**.** 令 $X = \mathbb{N}$，定义离散距离

$$d(m,n) = \begin{cases} 0, & m = n, \\ 1, & m \neq n. \end{cases}$$

则 X 中每个集合都是开集和闭集，X 本身有界（直径为 1），X 中每条 *Cauchy* 列收敛，但 X 不紧。

证明. 先核对这确为距离：非负、零距离只在同一点、对称，都由定义直接成立。若 $m = k$，三角不等式左边为零；若 $m \neq k$，对任意 n，$m = n$ 与 $n = k$ 不能同时成立，所以 $d(m,n)+d(n,k) \geq 1 = d(m,k)$。对任意 m，$B(m, 1/2) = \{m\}$，所以任意子集是单点开集的并，从而开；补集同样开，所以也闭。任意两个点距离不超过 1，故有界。开覆盖 $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ 覆盖 X，但有限多个单点集合只能覆盖有限个自然数，不能覆盖 X。因此 X 不紧。若 (x_n) 是 Cauchy 列，取误差 $1/2$，得某个尾部所有两项距离小于 $1/2$。距离只取 $0, 1$，所以该尾部所有项相同，是最终常值列，因而收敛。另一方面，半径 $1/2$ 的有限网只能覆盖有限多个点，不能覆盖 X。所以即便增加 Cauchy 完备性，闭且有界仍不足以恢复一般空间的紧性。 □

这个例子说明 Heine–Borel 的“闭且有界”是实直线的特殊结论，不能未经证明搬到任意度量空间。后续若进入一般度量空间，需要分别引入全有界、完备和有限网等概念。

命题 5.72 (紧集上的无限子集的聚点)**.** 若 $K \subseteq \mathbb{R}$ 紧，且 $A \subseteq K$ 为无限集，则 A 在 K 中有聚点；更精确地，存在 $x \in K$，使每个 $r > 0$ 都满足

$$B(x,r) \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

证明. 沿用第四章明确登记的依赖选择，从无限集 A 递归选取互不相同的 $a_n \in A$，得到有界列 $(a_n) \subseteq K$。紧集序列紧，存在子列 $a_{n_j} \to x \in K$。给定 $r > 0$，子列尾部都落在 $B(x,r)$，且尾部含无限多个互不相同的点；至多一个等于 x，所以可以取一个不等于 x 的点。故 x 为聚点。 □

注 5.73 (本章证明路线的闭环)**.** 本章的逻辑顺序是：

$$\text{区间套} \Longrightarrow \text{闭区间有限覆盖} \Longrightarrow \text{Heine–Borel},$$
$$\text{Heine–Borel} \Longrightarrow \text{序列紧性} \Longrightarrow \text{无限子集的聚点}.$$

其中区间套到有限覆盖使用二分反证；有限覆盖到区间套使用相对开覆盖和嵌套性；闭有界集到紧性使用首区间的有限覆盖；紧性到序列紧性使用“没有收敛子列便能构造局部有限覆盖”的反证。每一步都在实数域内明确调用了完备性或第四章已经证明的等价性质，没有调用一般度量空间中的紧性定理。

本章把“实数轴上的局部邻近”提升为开集、闭集、聚点和闭包的语言，再把完备性转化为开覆盖可以有限化的性质。Cantor 集说明紧性不等于含有区间，离散空间说明 Heine–Borel 不能脱离实直线照搬。下一章将在这些工具之上研究数项级数，并把有限部分和、尾部控制与 Cauchy 判别连接起来。

6 数项级数与求和次序

6.1 级数、部分和与余项

第四章把收敛定义为数列的极限；本章把这一语言应用于“逐项相加”。级数不是一个未经定义的无限加法，而是由有限和组成的数列。因此每一次交换次序、估计尾部或讨论求和，都必须回到部分和的极限。

定义 6.1 (级数与部分和)**.** 设 $(a_n)_{n\ge 1}$ 是实数列。定义第 N 个部分和

$$S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n.$$

若数列 (S_N) 收敛于 $S\in\mathbb{R}$，则称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛，并规定其和为 S；若 (S_N) 不收敛，则称级数发散。对收敛级数，从第 $N+1$ 项开始的余项定义为

$$R_N=S-S_N.$$

命题 6.2 (有限项改动)**.** *若两个数列只在有限多个指标处不同，则它们的级数或者同时收敛或者同时发散；在都收敛时，两和之差等于有限多个改动量之和。*

证明. 取 N_0 大于所有发生改动的指标。对 $N\ge N_0$，两个部分和之差恒等于同一个有限和 C。因此一个部分和列收敛当且仅当另一个部分和列收敛；若极限分别为 S,T，则 $T-S=C$。 □

定理 6.3 (级数的 Cauchy 判别)**.** *实数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当且仅当*

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall q>p\ge N,\qquad \left|\sum_{n=p+1}^{q} a_n\right|<\varepsilon.$$

证明. 由定义，S_N 收敛当且仅当 (S_N) 是 Cauchy 列，这是第四章的实数 Cauchy 收敛准则。对 $q>p$，有限和的消项给出

$$S_q-S_p=\sum_{n=p+1}^{q} a_n.$$

将此等式代入数列的 Cauchy 条件，正好得到所写的量词；反向同样使用这个等式。 □

推论 6.4 (收敛级数的项趋于零)**.** *若 $\sum a_n$ 收敛，则 $a_n\to 0$。*

证明. 给定 $\varepsilon>0$，由定理 6.3 取 N，令 $p=n-1, q=n$ $(n\ge N+1)$，得到 $|a_n|<\varepsilon$。 □

注 6.5 (项趋零不是充分条件)**.** $a_n=1/n$ 满足 $a_n\to 0$，但其级数发散。对每个 $k\ge 0$，

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n}\ge 2^k\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

所以 $S_{2^m}\ge 1+m/2\to+\infty$。

6.2 几何级数与正项级数

引理 6.6 (有限几何和)**.** 若 $r \neq 1$，则

$$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

证明. 将左边乘以 $1 - r$，逐项相减得

$$(1 - r)\sum_{n=0}^{N} r^n = 1 + r + \cdots + r^N - (r + r^2 + \cdots + r^{N+1}) = 1 - r^{N+1}.$$

□

定理 6.7 (几何级数)**.** 当 $|r| < 1$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

当 $|r| \geq 1$ 时该级数发散。

证明. 若 $|r| < 1$，由 $|r|^N \to 0$ 和引理得 $S_N = (1 - r^{N+1})/(1 - r) \to (1 - r)^{-1}$。若 $|r| > 1$，项不趋于零；$r = 1$ 时项不趋于零；$r = -1$ 时部分和在 $0, 1$ 间交替。 □

定理 6.8 (正项级数的单调有界判别)**.** 若 $a_n \geq 0$，则 $\sum a_n$ 收敛，当且仅当其部分和列有上界。收敛时

$$S = \sup\{S_N : N \geq 1\}, \qquad R_N = S - S_N \geq 0,$$

且 S_N 单调递增。

证明. $S_{N+1} - S_N = a_{N+1} \geq 0$，故部分和递增。若收敛于 S，则 $S_N \leq S$。反之设 S_N 有上界，令 $S = \sup\{S_N\}$. 给定 $\varepsilon > 0$，存在 N 使 $S_N > S - \varepsilon$；对 $M \geq N$，$S - \varepsilon < S_N \leq S_M \leq S$，故 $S_M \to S$。 □

定理 6.9 (直接比较判别法)**.** 设 $0 \leq a_n \leq b_n$。若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛；若 $\sum a_n$ 发散，则 $\sum b_n$ 发散。

证明. $0 \leq A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \leq B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$。若 $B_N \to B$，则 A_N 递增且有上界 B，由定理 6.8 收敛。第二句是逆否命题。 □

定理 6.10 (极限比较判别法)**.** 设 $a_n, b_n > 0$，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \qquad 0 < L < +\infty.$$

则 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 同时收敛或同时发散。

证明. 取 $\varepsilon = L/2$，存在 N 使 $|a_n/b_n - L| < L/2$，从而

$$\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n \qquad (n \geq N).$$

去掉有限项后分别用直接比较判别法，得到两个方向。 □

定理 6.11 (Cauchy 凝聚判别法)**.** *若 (a_n) 非负且单调递减，则*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{收敛} \iff \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad \text{收敛}.$$

证明. 区间 $2^k \le n < 2^{k+1}$ 含 2^k 项，故

$$2^k a_{2^{k+1}} \le \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \le 2^k a_{2^k}.$$

对 $k = 0, \dots, m$ 相加，得到

$$\sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2^{k+1}} \le \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} a_n \le \sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k}.$$

若右侧凝聚级数收敛，中间部分和有界，原级数收敛。反之，原级数部分和有界；而 $2^k a_{2^k} = 2(2^{k-1}a_{2^k})$ $(k \ge 1)$，故凝聚级数去掉首项后的部分和也有界。 □

推论 6.12 (整数参数的幂级数)**.** *对整数 $p \ge 1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ 在 $p = 1$ 时发散，在 $p \ge 2$ 时收敛。*

证明. $p = 1$ 时这是调和级数，前面的分组估计已经证明其发散。若 $p \ge 2$，则 $0 < n^{-p} \le n^{-2}$。数列 n^{-2} 非负递减，凝聚级数为

$$2^k (2^k)^{-2} = 2^{-k},$$

它是收敛的几何级数。因此比较判别给出 $\sum n^{-p}$ 收敛。 □

注 6.13 (实参数版本的依赖)**.** 通常所称的 p-级数定理允许任意实数 p，并断言当且仅当 $p > 1$ 时收敛；其中 n^{-p} 的定义和指数律需要先建立正实数的对数与实指数。本册在尚未定义 exp、log 之前只使用上面的整数参数版本，以免把未建立的运算当作前提。

6.3 比值、根值与边界现象

定理 6.14 (比值判别法)**.** *设 $a_n \ne 0$。若存在 $q < 1$ 及 N 使 $|a_{n+1}| \le q|a_n|$ $(n \ge N)$，则 $\sum a_n$ 绝对收敛。若存在 $q > 1$ 及 N 使 $|a_{n+1}| \ge q|a_n|$ $(n \ge N)$，则级数发散。若 $|a_{n+1}/a_n| \to L < 1$，则绝对收敛；趋于 $L > 1$ 则发散；$L = 1$ 不作结论。*

证明. 第一种情形归纳给出 $|a_{N+k}| \le q^k |a_N|$，故尾部绝对值部分和不超过 $|a_N|/(1-q)$。第二种情形给出 $|a_{N+k}| \ge q^k |a_N|$，项不趋零。极限情形由定义取适当的 q。 □

定理 6.15 (根值判别法)**.** *令 $L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$。若 $L < 1$，则 $\sum a_n$ 绝对收敛；若 $\liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$，则级数发散；边界值 1 不作结论。*

证明. 若 $L < 1$，取 $L < q < 1$。上极限的尾部刻画给出某个 N 使 $|a_n|^{1/n} \le q$，即 $|a_n| \le q^n$，再用几何级数比较。若下极限大于 1，取 $1 < q < \liminf$，则最终 $|a_n| \ge q^n$，项不趋于零。 □

例 6.16 (判别法的边界)**.** $a_n = 1/n$ 与 $a_n = 1/n^2$ 的比值极限和根值极限都为 1，但前者发散、后者收敛。

6.4 绝对收敛与交错级数

定义 6.17 (绝对收敛与条件收敛)**.** 若 $\sum |a_n|$ 收敛，则称 $\sum a_n$ 绝对收敛；若 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum |a_n|$ 发散，则称其条件收敛。

定理 6.18 (绝对收敛判别)**.** *绝对收敛级数必收敛，并且*

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n \right| \le \sum_{n=p+1}^{q} |a_n|.$$

证明. 有限和三角不等式给出显示的不等式。右侧由 $\sum |a_n|$ 的 Cauchy 判别趋于零，故左侧满足级数的 Cauchy 判别。 □

定理 6.19 (Leibniz 交错判别与误差)**.** *若 $b_n \ge 0$、$b_{n+1} \le b_n$ 且 $b_n \to 0$，则*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

收敛。若和为 S，则 $|S - S_N| \le b_{N+1}$。

证明. $S_{2m+2} - S_{2m} = b_{2m+1} - b_{2m+2} \ge 0$，故偶数部分和递增；$S_{2m+3} - S_{2m+1} = -b_{2m+2} + b_{2m+3} \le 0$，故奇数部分和递减。并且 $S_{2m} \le S_{2m+1}$，两列之差为 $b_{2m+1} \to 0$，所以二者收敛到同一极限。后续项成对相消，S 位于 S_N 与 $S_N + (-1)^N b_{N+1}$ 之间，得到误差估计。 □

例 6.20 (交错调和级数)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

收敛但不绝对收敛，因为调和级数发散。

6.5 分部求和与两个判别法

引理 6.21 (Abel 变换)**.** *令 $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$、$A_0 = 0$。对 $1 \le p \le q$，*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

证明. 代入 $a_k = A_k - A_{k-1}$，再将第二个和改指标：

$$\sum_{k=p}^{q} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=p}^{q} A_k b_k - \sum_{j=p-1}^{q-1} A_j b_{j+1}.$$

提取首尾项并逐项相减即得公式。 □

定理 6.22 (Dirichlet 判别法)**.** *若 $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ 有界，且 $b_n \ge 0$ 单调递减并趋于 0，则 $\sum a_n b_n$ 收敛。*

证明. 取 M 使 $|A_N| \le M$。对 $q \ge p$，令 $C_k = A_k - A_{p-1} = \sum_{j=p}^{k} a_j$，则 $|C_k| \le 2M$。对尾部应用 Abel 变换：

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = C_q b_q + \sum_{k=p}^{q-1} C_k (b_k - b_{k+1}).$$

于是

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k b_k \right| \le 2M b_q + 2M \sum_{k=p}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) = 2M b_p.$$

令 p 足够大即可满足 Cauchy 条件。 □

定理 6.23 (Abel 判别法). *若 $\sum a_n$ 收敛，且 b_n 单调并有界，则 $\sum a_n b_n$ 收敛。*

证明. b_n 有极限 b。写 $b_n = b + c_n$，则 c_n 单调且趋于零；常数倍 $b\sum a_n$ 收敛。必要时乘以 -1，可设 $c_n \ge 0$。原级数部分和有界，故由 Dirichlet 判别 $\sum a_n c_n$ 收敛，合并即得结论。 □

6.6 重排与条件收敛的刚性

引理 6.24 (条件收敛的正负部分). *若 $\sum a_n$ 条件收敛，令*

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \qquad a_n^- = \max\{-a_n, 0\},$$

则 $\sum a_n^+ = +\infty$ 且 $\sum a_n^- = +\infty$。

证明. $S_N = P_N - Q_N$，其中 $P_N = \sum a_n^+$、$Q_N = \sum a_n^-$。若 P_N 有界，则 $Q_N = P_N - S_N$ 有界，因而 $P_N + Q_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n|$ 有界，与条件收敛矛盾；若 Q_N 有界同理。两列均递增，故均趋于 $+\infty$。 □

定理 6.25 (Riemann 重排定理). *设 $\sum a_n$ 条件收敛。对任意 $L \in \mathbb{R}$，存在排列 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = L.$$

还存在排列使重排级数趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$。

证明. 把正指标按原次序列为 $p_1, p_2, \ldots$，把负指标按原次序列为 $n_1, n_2, \ldots$；零项指标另列为 $z_1, z_2, \ldots$，若零项只有有限个，就在这列末尾停止。正、负指标列都无限，这是引理 6.24 的结论。

先构造只使用非零项的排列。第一阶段从下一个正指标开始，逐项加入直到部分和第一次超过 L；第二阶段逐项加入负项直到第一次低于 L；此后两类阶段交替。每个阶段有限结束：若某个正阶段永远不能超过 L，则从该阶段开始的正项部分和单调递增且有上界，从而正部级数尾部有界，这与 $\sum a_n^+ = +\infty$ 矛盾；负阶段完全相反。阶段结束时越过 L 的量不超过最后加入项的绝对值。阶段编号趋于无穷时，所用原指标也趋于无穷，而 $a_n \to 0$，所以阶段末部分和趋于 L。一个阶段内部的部分和单调地夹在该阶段开始值和结束值之间；这两个端点都趋于 L，故所有非零项的重排部分和趋于 L。

现在把零项插入。第 j 个非零阶段结束后，先插入至多一个尚未使用的零指标；若零指标有限，插完即止；若零指标无限，则这样递归插入会最终使用每一个 z_j。插入零项不改变部分和，所以仍收敛于 L。于是得到 $\mathbb{N}$ 的排列：非零指标各出现一次，零指标也各出现一次。

构造趋于 $+\infty$ 的排列时，先按正指标依次把部分和推过 $1,2,3,\dots$。在达到第 j 个整数之后，加入下一个尚未使用的负项；若该项使部分和降低，再继续加入正项直到重新越过目标 j，然后进入目标 $j+1$。更直接地，可在第 j 个目标阶段中先加入足够多的正项使和超过 j，再插入有限个负项，直到已经取用第 j 个负指标；随后用正项把和重新推过 j。每个正阶段有限结束，因为正部和发散。由于负项趋于零，第 j 阶段中插入的有限负块的总绝对值可在阶段开始前通过延后插入到小于 $1/j$；因此阶段内最低值至少为 $j-1/j$，随 $j\to\infty$ 趋于 $+\infty$。零项仍逐阶段插入，不改变部分和。交换正负号得到趋于 $-\infty$ 的排列。 □

定理 6.26 (绝对收敛的重排不变性)**.** *若 $\sum|a_n|$ 收敛，且 σ 是 $\mathbb{N}$ 的任一排列，则*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

证明. 令原和为 S。给定 $\varepsilon>0$，取 N_0 使 $\sum_{n>N_0}|a_n|<\varepsilon$。有限集 $\{1,\dots,N_0\}$ 在排列中必包含于某个初段。对足够长的初段，重排部分和与 S 的差只含 $n>N_0$ 的项，绝对值小于 ε。 □

6.7 二重级数与有限和的极限

定义 6.27 (非负二重级数)**.** 对 $u_{mn}\ge 0$，定义

$$T_{M,N}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}u_{mn},\qquad \sum_{m,n\ge1}u_{mn}=\sup_{M,N}T_{M,N}\in[0,+\infty].$$

定理 6.28 (非负二重级数的换序)**.** *对任意 $u_{mn}\ge0$，在扩充实数意义下*

$$\sum_{m,n\ge1}u_{mn}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}\right).$$

证明. 记行和为 r_m。固定 M，有限和换序及单调极限给出

$$\sum_{m=1}^{M} r_m=\sup_{N}T_{M,N}\le\sup_{P,Q}T_{P,Q}.$$

对 M 取上确界得到行和不超过矩形上确界。反向地，$T_{M,N}\le\sum_{m=1}^{M}r_m\le\sum_{m}r_m$，所以矩形上确界不超过行和。两边相等；列和完全相同。 □

定理 6.29 (绝对可和的 Fubini 与任意枚举)**.** *若 $\sum_{m,n\ge1}|u_{mn}|<+\infty$，则每行、每列都绝对收敛，且*

$$\sum_{m}\sum_{n}u_{mn}=\sum_{n}\sum_{m}u_{mn}=\sum_{m,n\ge1}u_{mn}.$$

对 $\mathbb{N}^2$ 的任意排列逐项相加也绝对收敛并有同一和。

证明. 对 $|u_{mn}|$ 应用非负换序，得每行、每列绝对和均有限。写 $u_{mn}=u_{mn}^{+}-u_{mn}^{-}$；正负部分的总和都有限，分别应用非负换序后相减即可。任意排列的结论由绝对尾部估计得到：取有限矩形使其外部绝对值总和小于 ε，排列的足够长初段包含此矩形，余项绝对值小于 ε。 □

注 6.30 (换序的边界)**.** 条件收敛级数可由 Riemann 重排改变和。把这样一列放在 $\mathbb{N}^2$ 的一条枚举轨道上、其他位置置零，再按不同枚举读取，就得到二重求和不能无条件换序的模型。因此非负性或绝对可和性是换序定理的实质假设。

6.8 Cauchy 乘积与级数运算

定义 6.31 (Cauchy 乘积)**.** 本节把指标从 0 开始。给定 $(a_n)_{n\ge 0}$、$(b_n)_{n\ge 0}$，定义

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

称 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 为两级数的 Cauchy 乘积。

定理 6.32 (Cauchy 乘积定理)**.** *若 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$ 都收敛，则 Cauchy 乘积绝对收敛且*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

证明. 由三角不等式和非负换序，

$$\sum_{n\ge 0}|c_n|\le \sum_{n\ge 0}\sum_{k=0}^{n}|a_k||b_{n-k}|=\left(\sum_{k}|a_k|\right)\left(\sum_{j}|b_j|\right)<\infty.$$

所以乘积绝对收敛。令 $A_N=\sum_{k=0}^{N}a_k$、$B_N=\sum_{j=0}^{N}b_j$。A_NB_N 是矩形 $0\le k,j\le N$ 的有限和，而 $\sum_{n=0}^{2N}c_n$ 多出的项满足 $k+j>N$。绝对可和性保证这些矩形外项的总绝对值趋于零：先取 K 使 $k>K$ 或 $j>K$ 的总绝对值小于 ε，再令 $N>K$。因此

$$\sum_{n=0}^{2N} c_n - A_NB_N\to 0.$$

两边分别取极限即得公式。 □

6.9 本章接口与反例清单

本章的无限运算都归结为三类有限控制：部分和的 Cauchy 尾估计、正项部分和的单调上界、绝对值级数给出的统一尾界。

命题 6.33 (判别法的逻辑边界)**.** *项趋于零不能单独推出级数收敛、绝对收敛、任意换序或 Cauchy 乘积收敛。*

证明. 调和级数否定第一项；交错调和级数否定第二项。

Riemann 重排定理否定第三项。Cauchy 乘积定理的绝对收敛假设说明第四项需要额外条件。 □

例 6.34 (条件收敛时 Cauchy 乘积可能发散)**.** 令 $a_n=b_n=(-1)^n/\sqrt{n+1}$ $(n\ge 0)$。交错判别说明两个因子级数都收敛，但其 Cauchy 乘积系数满足

$$c_n=(-1)^n d_n, qquad d_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

取 $\lceil n/4\rceil\le k\le\lfloor 3n/4\rfloor$ 的指标。当 $n\ge 8$ 时，这一段至少含 $n/2-1$ 个指标，且每一项都不小于 $1/(3n/4+1)$，故 $d_n\ge (n/2-1)/(3n/4+1)\ge 1/3$。因此 c_n 不趋于零，Cauchy 乘积发散。这个反例说明两个级数各自收敛并不足以保证乘积级数收敛。

注 6.35. 下一章将区分逐点收敛与具有同一个尾界的一致收敛，建立函数列与函数级数的 Cauchy 判别及 Weierstrass 控制。

7 连续函数与一致连续性

7.1 函数的极限与连续性

第五章把开集、闭集、紧集和连通集作为实直线的集合结构；第六章把 Cauchy 尾部估计用于数项级数。本章把同样的思想用于函数。首先要区分“在每一个固定点附近成立”的局部条件与“在整个集合上由同一个尺度控制”的一致条件。

定义 7.1 (函数在点处的极限)**.** 设 $D \subseteq \mathbb{R}$，$f : D \to \mathbb{R}$，a 是 D 的聚点。称

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

若

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, \qquad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

这里不要求 $a \in D$，并且条件中排除了 $x = a$；因此极限只记录去心邻域中的行为。

定义 7.2 (连续性)**.** 设 $a \in D$。称 f 在 a 连续，若

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

若在 D 的每一点都连续，则称 f 在 D 上连续。

命题 7.3 (极限唯一性)**.** *若 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \to a} f(x) = M$，则 $L = M$。*

证明. 若 $L \neq M$，令 $\varepsilon = |L - M|/3$。分别取 δ_L, δ_M 满足极限定义，再令 $\delta = \min\{\delta_L, \delta_M\}$。由于 a 是聚点，存在 $x \in D$ 满足 $0 < |x - a| < \delta$。于是

$$|L - M| \le |L - f(x)| + |f(x) - M| < 2|L - M|/3,$$

矛盾。因此 $L = M$。 □

定理 7.4 (连续性的极限刻画)**.** *设 $a \in D$ 是 D 的聚点。则 f 在 a 连续，当且仅当*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

若 a 是 D 的孤立点，则 f 自动在 a 连续。

证明. 若 f 连续，给定 $\varepsilon > 0$，取连续性中的 δ。把条件 $0 < |x - a| < \delta$ 加上后正是极限定义。反向地，极限定义给出同一个 δ；当 $x = a$ 时不等式为 $0 < \varepsilon$，所以也得到连续性。若 a 是孤立点，存在 $\delta > 0$ 使 $D \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$。于是 $|x - a| < \delta$ 且 $x \in D$ 时必有 $x = a$，故 $|f(x) - f(a)| = 0$。 □

定理 7.5 (函数极限的序列判据)**.** *设 a 是 D 的聚点。则 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 当且仅当对每个 $x_n \in D \setminus \{a\}$ 且 $x_n \to a$ 的数列，都有 $f(x_n) \to L$。*

证明. 先设极限的 ε-δ 条件成立。给定 $\varepsilon>0$，取对应的 δ。由 $x_n\to a$，存在 N 使 $n\ge N$ 时 $|x_n-a|<\delta$；因 $x_n\neq a$，故 $|f(x_n)-L|<\varepsilon$，即函数值列收敛。

反向地，若函数极限不等于 L，则存在 $\varepsilon_0>0$，对每个 n 都能找到 $x_n\in D$ 满足

$$0<|x_n-a|<1/n,\qquad |f(x_n)-L|\ge\varepsilon_0.$$

于是 $x_n\to a$，但 $f(x_n)$ 不趋于 L，与假设矛盾。 □

推论 7.6 (连续性的序列判据)**.** *f 在 a 连续，当且仅当对每个 $x_n\in D$ 且 $x_n\to a$，都有 $f(x_n)\to f(a)$。*

证明. 若 a 是聚点，取 $x_n=a$ 的常值列或使用定理 7.5；反向若连续性失败，按定理反向构造 $x_n\to a$ 而函数值不趋于 $f(a)$。若 a 孤立，连续性已由前一定理成立。 □

7.2 极限与连续性的代数运算

定理 7.7 (函数极限的四则运算)**.** *设 $\lim_{x\to a}f(x)=L$、$\lim_{x\to a}g(x)=M$。则*

$$\lim_{x\to a}(f+g)=L+M,\qquad \lim_{x\to a}(f-g)=L-M,\qquad \lim_{x\to a}(fg)=LM.$$

若 $M\neq0$ 且在某个去心邻域内 $g(x)\neq0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}.$$

证明. 先证明和。给定 $\varepsilon>0$，分别取 δ_f,δ_g 使 $|f(x)-L|<\varepsilon/2$、$|g(x)-M|<\varepsilon/2$。在两者的最小邻域内，

$$|f(x)+g(x)-(L+M)|\le|f(x)-L|+|g(x)-M|<\varepsilon.$$

差的证明把 g 换成 $-g$。乘积中取

$$\alpha=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3(|M|+1)}\right\},\qquad \beta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3(|L|+1)}\right\}.$$

由极限定义取邻域使 $|f(x)-L|<\alpha$ 且 $|g(x)-M|<\beta$。使用恒等式

$$f(x)g(x)-LM=(f(x)-L)(g(x)-M)+M(f(x)-L)+L(g(x)-M)$$

并注意 $\alpha,\beta\le1$，得到

$$|fg-LM|<\alpha\beta+|M|\alpha+|L|\beta<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

这一步同时覆盖 $L=0$ 或 $M=0$ 的情形。

对商，先取邻域使 $|g(x)-M|<|M|/2$，于是 $|g(x)|\ge|M|/2$。恒等式

$$\frac{f}{g}-\frac{L}{M}=\frac{M(f-L)-L(g-M)}{Mg}$$

的分子由和的估计趋于零，而 $|Mg|\ge|M|^2/2$，故商趋于 L/M。 □

推论 7.8 (连续函数的代数封闭性)**.** *若 f,g 在 a 连续，则 $f+g, f-g, fg$ 在 a 连续；若 $g(a)\neq 0$，则 f/g 在 a 连续。常值函数与恒等函数连续，多项式在 $\mathbb{R}$ 上连续。*

证明. 把定理 7.7 应用于极限 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$。常值函数直接满足定义；恒等函数有 $|x-a|<\delta\Rightarrow|x-a|<\varepsilon$。多项式由有限次加法与乘法归纳。 □

定理 7.9 (复合函数的极限与连续性)**.** *设 $\lim_{x\to a} g(x)=b$，且 f 在 b 连续。若 $g(x)\neq b$ 时 $g(x)$ 落在 f 的定义域中，则*

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b).$$

特别地，连续函数的复合连续。

证明. 给定 $\varepsilon>0$，由 f 在 b 连续取 $\eta>0$，使 $|y-b|<\eta$ 时 $|f(y)-f(b)|<\varepsilon$。由 $g(x)\to b$ 取 $\delta>0$，使 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|g(x)-b|<\eta$；代入即可。若在点处讨论连续性，允许 $x=a$，同样的估计成立。 □

7.3 开集、闭集与连续性的拓扑判据

定理 7.10 (开集原像判据)**.** *设 $f:D\to\mathbb{R}$，其中 $D\subseteq\mathbb{R}$ 取相对拓扑。则以下条件等价：*

1. *f 在 D 上连续；*
2. *对每个开集 $G\subseteq\mathbb{R}$，$f^{-1}(G)$ 在 D 中相对开；*
3. *对每个闭集 $F\subseteq\mathbb{R}$，$f^{-1}(F)$ 在 D 中相对闭。*

证明. 先设 f 连续。对 $x\in f^{-1}(G)$，G 开，存在 $r>0$ 使 $B(f(x),r)\subseteq G$。连续性取 $\delta>0$ 使 $|y-x|<\delta$ 且 $y\in D$ 时 $|f(y)-f(x)|<r$。于是 $D\cap B(x,\delta)\subseteq f^{-1}(G)$，原像相对开。若 F 闭，则 $\mathbb{R}\setminus F$ 开，且

$$D\setminus f^{-1}(F)=f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F)$$

相对开，故原像相对闭。

反向设开集原像相对开。给定 $x\in D$、$\varepsilon>0$，开球 $G=B(f(x),\varepsilon)$ 的原像含 x，故存在 $\delta>0$ 使 $D\cap B(x,\delta)\subseteq f^{-1}(G)$，这正是连续性。闭集版本由补集关系得到。 □

推论 7.11 (水平集与符号集)**.** *若 f 连续，则*

$$\{x\in D: f(x)>c\},\quad \{x\in D: f(x)<c\}$$

相对开，而 $\{f\geq c\}$、$\{f\leq c\}$ 和 $\{f=c\}$ 相对闭。

证明. 把 $(-\infty,c)$、$(c,+\infty)$、$[c,+\infty)$、$(-\infty,c]$ 和 $\{c\}$ 分别作为开集或闭集应用定理。 □

命题 7.12 (连续性的局部性质)**.** *f 在 D 上连续，当且仅当对每个 $x\in D$，存在相对开邻域 $U_x\subseteq D$ 使 $f|_{U_x}$ 连续。*

证明. 全局连续限制到任意子集仍连续：开集原像为全局原像与子集的交。反向，对固定 x 取相对开邻域 U_x。给定开集 G 且 $x\in f^{-1}(G)$，局部连续性说明 $x\in (f|_{U_x})^{-1}(G)$，并且这个集

合在 U_x 中相对开。因此存在 D 中相对开集 H_x，使 $x \in H_x$ 且 $H_x \cap U_x \subseteq f^{-1}(G)$。对每个 $x \in f^{-1}(G)$ 取这样的 H_x，于是

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} (H_x \cap U_x).$$

每个 $H_x \cap U_x$ 都是相对开且包含 x，并且包含于 $f^{-1}(G)$；故上式成立，开集任意并仍开，原像相对开。 □

7.4 连续函数的局部定量性质

命题 7.13 (连续函数的局部有界性)**.** *若 f 在 a 连续，则存在 $\delta > 0$ 和 $C > 0$，使*

$$x \in D,\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \le C.$$

证明. 取 $\varepsilon = 1$。连续性给出 $\delta > 0$ 使 $|f(x) - f(a)| < 1$；令 $C = |f(a)| + 1$，三角不等式即得。 □

命题 7.14 (非零值的符号稳定性)**.** *若 f 在 a 连续且 $f(a) > 0$，则存在 $\delta > 0$ 使 $f(x) > 0$ 对所有 $x \in D$ 且 $|x - a| < \delta$ 成立。若 $f(a) < 0$，结论相应改为 $f(x) < 0$。*

证明. 设 $f(a) > 0$，取 $\varepsilon = f(a)/2$。则 $f(x) > f(a) - f(a)/2 = f(a)/2 > 0$。负值情形对 $-f$ 应用同一论证。 □

定理 7.15 (连续函数的零点闭性)**.** *若 $f : D \to \mathbb{R}$ 连续，则零点集*

$$Z(f) = \{x \in D : f(x) = 0\}$$

在 D 中相对闭。

证明. 这是定理 7.10 对闭集 $\{0\}$ 的直接应用。也可由序列判据验证：若 $x_n \in Z(f)$ 且 $x_n \to x \in D$，则 $f(x_n) = 0 \to f(x)$，故 $f(x) = 0$。 □

7.5 紧集上的连续函数

定理 7.16 (连续像保持紧性)**.** *若 $K \subseteq \mathbb{R}$ 紧，且 $f : K \to \mathbb{R}$ 连续，则 $f(K)$ 紧。*

证明. 设 $\{V_i\}_{i \in I}$ 是 $f(K)$ 的开覆盖。对每个 i，由开集原像判据 $f^{-1}(V_i)$ 在 K 中相对开，且

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i),$$

因为每个 $x \in K$ 的函数值属于 $f(K)$。紧性给出有限指标 $i_1, \dots, i_m$ 覆盖 K。若 $y \in f(K)$，则 $y = f(x)$，某个有限原像包含 x，故 $y \in V_{i_j}$。所以有限的 V_{i_j} 覆盖 $f(K)$。 □

推论 7.17 (紧集上的有界性与取极值)**.** *若 K 非空且紧，$f : K \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 有界，并存在 $x_{\min}, x_{\max} \in K$ 使*

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in K} f(x), \qquad f(x_{\max}) = \max_{x \in K} f(x).$$

证明. 由定理 7.16，$f(K)$ 紧。第五章的 Heine–Borel 说明紧子集有界且闭。令 $\alpha=\inf f(K)$、$\beta=\sup f(K)$。若 $\alpha\notin f(K)$，则 $f(K)\subset(\alpha,+\infty)$；对每个 $y\in f(K)$，取半径 $(y-\alpha)/2$ 的球，得到一族覆盖 $f(K)$ 的开集。有限子覆盖的最小左端点给出一个统一的下界严格大于 α，矛盾。故 $\alpha\in f(K)$；β 同理。按 $f(K)$ 的定义选取相应的 $x_{\min},x_{\max}$。 □

推论 7.18 (闭区间上的极值定理)**.** *若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且 $a\le b$，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值。*

证明. 闭区间紧，应用前一推论。 □

定理 7.19 (Heine–Cantor 一致连续定理)**.** *若 $K\subseteq\mathbb{R}$ 紧，且 $f:K\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 在 K 上一致连续，即*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in K,\quad |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

证明. 固定 $\varepsilon>0$。对每个 $z\in K$，连续性给出 $\rho_z>0$，使 $|u-z|<\rho_z$ 且 $u\in K$ 时 $|f(u)-f(z)|<\varepsilon/2$。集合

$$U_z=K\cap B(z,\rho_z/2)$$

构成 K 的开覆盖。由第五章 Lebesgue 数定理，存在 $\lambda>0$，使 $E\subseteq K$ 且 $\operatorname{diam}E<\lambda$ 时，E 落在某个 U_z 中。令 $\delta=\lambda$。若 $|x-y|<\delta$，集合 $\{x,y\}$ 的直径小于 λ，故它包含在某个 U_z 中，于是

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|<\varepsilon.$$

□

命题 7.20 (一致连续性的序列判据)**.** *$f:D\to\mathbb{R}$ 一致连续，当且仅当对任意 $x_n,y_n\in D$，*

$$|x_n-y_n|\to0\Longrightarrow|f(x_n)-f(y_n)|\to0.$$

证明. 若一致连续，给定 ε 取统一 δ，再用 $|x_n-y_n|\to0$。反向若不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，对每个 n 可取 $x_n,y_n\in D$ 满足 $|x_n-y_n|<1/n$ 而 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$，矛盾。 □

命题 7.21 (Lipschitz 条件)**.** *若存在 $L\ge0$ 使*

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|\qquad(x,y\in D),$$

则 f 一致连续。若 $L=0$，则 f 为常值函数。

证明. 给定 $\varepsilon>0$。若 $L>0$，取 $\delta=\varepsilon/L$；若 $|x-y|<\delta$，则 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。$L=0$ 时任意两点函数值相等。 □

例 7.22 (连续但不一致连续)**.** $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，但不一致连续。取

$$x_n=n,\qquad y_n=n+\frac{1}{n}.$$

则 $|x_n-y_n|=1/n\to0$，而

$$|x_n^2-y_n^2|=2+\frac{1}{n^2}\to2\neq0.$$

由命题 7.20，它不一致连续。

7.6 介值定理与连通性的函数形式

定理 7.23 (介值定理)**.** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且 $f(a)\le f(b)$。若 $f(a)\le y\le f(b)$，则存在 $c\in[a,b]$ 使 $f(c)=y$。

证明. 令

$$A=\{x\in[a,b]:f(x)\le y\}.$$

集合非空（含 a），且有上界 b，故 $c=\sup A$ 存在。显然 $a\le c\le b$。若 $f(c)<y$，取 $\varepsilon=(y-f(c))/2$。连续性给出 $\delta>0$，使 $|x-c|<\delta$ 时 $f(x)<y$。若 $c<b$，取 $x\in(c,\min\{b,c+\delta\})$，则 $x\in A$ 且 $x>c$，矛盾；若 $c=b$，则 $f(b)<y$ 与 $y\le f(b)$ 矛盾。故 $f(c)\ge y$。若 $f(c)>y$，取 $\varepsilon=(f(c)-y)/2$，连续性给出 $|x-c|<\delta$ 时 $f(x)>y$。若 $c>a$，取 $x\in(\max\{a,c-\delta\},c)$；此时 $x\notin A$，但由 $c=\sup A$，存在 $z\in A$ 且 $x<z\le c$，矛盾，因为 z 落在上述邻域且应满足 $f(z)>y$。若 $c=a$，则 $f(a)>y$ 与 $f(a)\le y$ 矛盾。故 $f(c)\le y$。两边合并得 $f(c)=y$。 □

推论 7.24 (零点定理)**.** 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且 $f(a)f(b)\le 0$，则存在 $c\in[a,b]$ 使 $f(c)=0$。

证明. 若 $f(a)\le f(b)$，对 $y=0$ 应用介值定理；若 $f(b)<f(a)$，交换端点。 □

推论 7.25 (连续像保持区间性)**.** 若 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间且 $f:I\to\mathbb{R}$ 连续，则 $f(I)$ 是区间。

证明. 若 $u,v\in f(I)$ 且 $u<v$，取 $x_1,x_2\in I$ 使 $f(x_1)=u,f(x_2)=v$。区间性保证两点之间的闭区间仍在 I 中；必要时交换 x_1,x_2。介值定理说明每个 $y\in[u,v]$ 都属于 $f(I)$。 □

定理 7.26 (Darboux 型符号结论)**.** 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 连续。集合

$$I_+=\{x\in I:f(x)>0\},\qquad I_-=\{x\in I:f(x)<0\}$$

在 I 中相对开；若 $x_1,x_2\in I_+$ 且 $[x_1,x_2]\subseteq I$，则不能存在 $z\in[x_1,x_2]$ 使 $f(z)<0$ 而两端均为正，除非中间有零点。

证明. 前一结论由连续性开集原像判据得到。若存在 z 使 $f(z)<0$，则在 x_1 与 z 之间应用零点定理得到零点，或在 z 与 x_2 之间应用零点定理；这说明连续函数改变符号时必须经过零点。 □

7.7 单调连续函数与逆函数

定义 7.27 (严格单调)**.** 函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 称严格递增，若 $x<y$ 蕴含 $f(x)<f(y)$；严格递减的定义相应。

命题 7.28 (严格单调函数的可逆性)**.** 严格单调函数是单射，因而存在逆函数

$$f^{-1}:f(I)\to I.$$

证明. 若 $x<y$，严格递增时 $f(x)<f(y)$，严格递减时 $f(x)>f(y)$，两种情形都给 $f(x)\ne f(y)$。所以每个 $y\in f(I)$ 有唯一原像，逆函数定义良好。 □

定理 7.29 (严格单调连续函数的逆函数连续性)**.** 设 I 为区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 连续且严格单调，则 $f^{-1}:f(I)\to I$ 连续。

证明. 只证严格递增情形。取 $y_0 = f(x_0)$，给定 $\varepsilon > 0$。若 x_0 是 I 的内部点，取 $u, v \in I$ 使

$$x_0 - \varepsilon < u < x_0 < v < x_0 + \varepsilon.$$

严格递增性给出 $f(u) < y_0 < f(v)$。令

$$\eta = \min\{y_0 - f(u), f(v) - y_0\} > 0.$$

若 $y \in f(I)$ 且 $|y - y_0| < \eta$，则 $f(u) < y < f(v)$，从而严格单调性迫使 $u < f^{-1}(y) < v$，故 $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$。若 x_0 是端点，只取存在于 I 内的一侧点，所得结论使用相对邻域。严格递减情形对 $-f$ 应用同一证明。 □

推论 7.30 (根函数的连续性). *对整数 $m \geq 1$，函数 $x \mapsto x^m$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且严格递增；其逆函数 $x \mapsto x^{1/m}$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续。*

证明. 多项式连续。若 $0 \leq x < y$，则 $y^m - x^m = (y - x)(y^{m-1} + y^{m-2}x + \cdots + x^{m-1}) > 0$，故严格递增；应用定理 7.29。 □

7.8 一致连续性的进一步后果

定理 7.31 (一致连续映射 Cauchy 列). *若 $f : D \to \mathbb{R}$ 一致连续，且 (x_n) 是 D 中的 Cauchy 列，则 $(f(x_n))$ 也是 Cauchy 列。*

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，由一致连续性取 $\delta > 0$。因 (x_n) Cauchy，存在 N 使 $m, n \geq N$ 时 $|x_m - x_n| < \delta$。于是 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$，这正是函数值列的 Cauchy 条件。 □

定理 7.32 (一致连续函数保持极限). *若 $f : D \to \mathbb{R}$ 一致连续，$x_n \to x \in D$，则 $f(x_n) \to f(x)$。*

证明. 收敛列是 Cauchy 列，上一命题给出 $f(x_n)$ Cauchy；但还需识别其极限。连续性由一致连续性立即推出，故由连续性的序列判据 $f(x_n) \to f(x)$。 □

命题 7.33 (闭区间上的多项式一致连续). *每个多项式在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续。*

证明. 多项式在 $[a, b]$ 上连续，闭区间紧，应用 Heine–Cantor 定理。 □

例 7.34 (局部截断与全局差异). x^2 在每个闭区间 $[-R, R]$ 上一致连续，但在整条实轴上不一致连续。这说明“一致连续”是函数与定义域共同决定的性质，不能只由局部连续性推出。

7.9 不连续性的模型与本章边界

例 7.35 (可去间断与跳跃间断). 在 $D = \mathbb{R}$ 上定义

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

函数 f 在 0 不连续，因为 $\sin x / x \to 1 \neq f(0)$；若把 $f(0)$ 改为 1，则可去间断被填补。函数 g 在 0 不连续：从左侧取 $x_n = -1/n$ 得 $g(x_n) = 0$，从右侧取 $y_n = 1/n$ 得 $g(y_n) = 1$，同一极限点产生不同函数值极限。

例 7.36 (处处不连续的 Dirichlet 函数)**.** 令

$$h(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

有理数与无理数在 $\mathbb{R}$ 中都稠密。任意 a 都存在有理数列 $r_n\to a$ 和无理数列 $s_n\to a$，但 $h(r_n)=1$、$h(s_n)=0$。由序列判据，h 在每一点都不连续。

命题 7.37 (连续性的统一逻辑边界)**.** 下列蕴含需要分别证明，不能互相替代：

$$\text{逐点连续}\not\Rightarrow\text{一致连续}\quad(\text{例}7.22),$$

$$\text{连续}\not\Rightarrow\text{有界}\quad(f(x)=x),$$

$$\text{存在一列}x_n\to a\ \text{且}f(x_n)\to f(a)\not\Rightarrow\text{在}a\ \text{连续}.$$

证明. 第一项由例 7.22。第二项中恒等函数在 $\mathbb{R}$ 上连续，但对任意 C 取 $x=C+1$ 即有 $|f(x)|>C$。第三项取

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}\qquad x_n=0.$$

则 $x_n\to 0$ 且 $f(x_n)=f(0)$，但取 $y_n=1/n$ 时 $y_n\to 0$ 而 $f(y_n)=1\not\to 0$，由序列判据 f 在 0 不连续。 □

注 7.38. 下一章将进入函数列与函数级数的一致收敛。这里的开集原像、紧集有限化、一致 Cauchy 控制和逐项极限判别将分别成为后续定理的基础；不把逐点收敛误写成一致收敛。

8 函数列与函数级数的一致收敛

8.1 逐点收敛与一致收敛

第六章中，数项级数的收敛由部分和的尾部统一控制；第七章中，连续性只在每一个固定点附近选择半径。本章研究函数列

$$f_n : D \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

的极限。关键区别在于：逐点收敛允许阈值依赖于点 x，一致收敛要求同一个阈值同时适用于整个定义域 D。

定义 8.1 (逐点收敛)**.** 设 $f_n : D \to \mathbb{R}$，$f : D \to \mathbb{R}$。称 f_n 在 D 上逐点收敛于 f，若

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(x, \varepsilon)\ \forall n \geq N, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

定义 8.2 (一致收敛)**.** 称 f_n 在 D 上一致收敛于 f，若

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall x \in D\ \forall n \geq N, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

唯一改变的是量词顺序：一致收敛的 N 不得依赖于 x。

命题 8.3 (一致收敛的否定形式)**.** *f_n 不一致收敛于 f，当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对每个 N 都存在 $n \geq N$ 和 $x \in D$，满足*

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

证明. 把定义中的量词逐层否定：

$$\neg(\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in D\ P)$$

等价于

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N\ \exists n \geq N\ \exists x \in D\ \neg P.$$

其中 P 是严格不等式 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，故 $\neg P$ 正是 $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$。 □

命题 8.4 (一致收敛蕴含逐点收敛与极限唯一)**.** *一致收敛必逐点收敛；若 f_n 一致收敛于 f 和 g，则 $f = g$。*

证明. 固定 x，一致定义中的同一 $N(\varepsilon)$ 当然适用于该点，故逐点收敛。若两个极限不同，取 x_0 使 $f(x_0) \neq g(x_0)$，令 $\varepsilon = |f(x_0) - g(x_0)|/3$。分别取 N_f, N_g，在 $n \geq \max\{N_f, N_g\}$ 时三角不等式给出

$$|f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| < 2\varepsilon,$$

矛盾。 □

定义 8.5 (上确界距离)**.** 若 $u : D \to \mathbb{R}$ 有界，定义

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in D} |u(x)|.$$

若 $f - g$ 有界，则记

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty.$$

定理 8.6 (一致收敛的上确界刻画)**.** *假设每个 $f_n - f$ 有界。则 f_n 一致收敛于 f，当且仅当*

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

证明. 若一致收敛，给定 $\varepsilon > 0$，存在 N 使所有 $x \in D$ 满足 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(n \geq N)$。因此 $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$。严格地，为得到小于任意给定阈值 η，先用 $\varepsilon = \eta/2$，即 $\|f_n - f\|_\infty \leq \eta/2 < \eta$。反向地，若上确界小于 ε，则每一点的差小于 ε，正是一致收敛定义。 □

例 8.7 (逐点但不一致：x^n)**.** 在 $D = [0, 1]$ 上令 $f_n(x) = x^n$。逐点极限为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

若 $0 \leq x < 1$，第四章的几何数列结论给出 $x^n \to 0$；在 $x = 1$ 时恒为 1。但每个 n 都有

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 1,$$

因为 $x^n \to 1$ 当 $x \uparrow 1$，所以不存在一致收敛。

例 8.8 (改变定义域后的一致性)**.** 对同一列 x^n，若 $D = [0, r]$ 且 $0 \leq r < 1$，则

$$\sup_{x\in D} |x^n| = r^n \to 0,$$

所以在该较小闭区间上一致收敛于零。定义域的有界性和是否远离问题端点会改变一致性。

8.2 一致 Cauchy 判别与函数空间

定义 8.9 (一致 Cauchy 列)**.** 函数列 $f_n : D \to \mathbb{R}$ 称为一致 Cauchy，若

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N\ \forall x \in D, \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

定理 8.10 (一致收敛的 Cauchy 判别)**.** *实值函数列在 D 上一致收敛，当且仅当它是一致 Cauchy 列。*

证明. 若 $f_n \to f$ 一致，给定 $\varepsilon > 0$，取 N 使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ 对所有 x 和 $n \geq N$ 成立。于是

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

反向地，固定 $x \in D$。一致 Cauchy 条件使数列 $(f_n(x))$ Cauchy；实数完备性给出唯一极限 $f(x)$，从而定义函数 $f : D \to \mathbb{R}$。给定 $\varepsilon > 0$，取 N 使 $m, n \geq N$ 时

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$$

对所有 x 成立。固定 $n \geq N$，令 $m \to \infty$。由实数中不等式的极限保留，

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

对所有 x 成立，因此一致收敛。 □

推论 8.11 (有界函数的完备性)**.** 令 $\mathcal{B}(D)$ 为所有有界实值函数组成的集合，定义

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

若 (f_n) 在 d_∞ 下是一致 *Cauchy* 列，则存在有界函数 $f \in \mathcal{B}(D)$ 使 $f_n \to f$ 一致。

证明. 由一致 Cauchy 判别得到逐点极限 f。取 N_0 使 $\|f_n - f_{N_0}\|_\infty < 1$ $(n \ge N_0)$。令 $n \to \infty$ 得 $|f(x) - f_{N_0}(x)| \le 1$，故

$$|f(x)| \le |f_{N_0}(x)| + 1.$$

右侧有界，所以 f 有界；一致收敛已由判别得到。 □

命题 8.12 (有限尾部与有限改动)**.** 若两函数列在所有充分大的指标处完全相同，则它们有相同的一致收敛性和相同的一致极限。

证明. 取 N_0 使 $f_n = g_n$ 对 $n \ge N_0$ 成立。对 $n \ge N_0$，两列的所有一致误差完全相同；有限个初始函数不影响极限的量词条件。 □

8.3 一致极限的连续性与代数运算

定理 8.13 (一致极限保持连续性)**.** 设 $f_n : D \to \mathbb{R}$ 在 D 上连续，且一致收敛于 f。则 f 在 D 上连续。

证明. 固定 $a \in D$ 和 $\varepsilon > 0$。由一致收敛取 N，使

$$|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon/3 \qquad (x \in D).$$

由于 f_N 在 a 连续，取 $\delta > 0$，使

$$|x - a| < \delta,\ x \in D \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3.$$

于是

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

三项分别受统一误差、单个连续函数的局部误差和统一误差控制。 □

定理 8.14 (一致极限的四则运算)**.** 若 $f_n \to f$、$g_n \to g$ 一致，则 $f_n \pm g_n \to f \pm g$ 一致。若此外 f_n, g_n, f, g 在 D 上有界，则 $f_n g_n \to fg$ 一致。若存在 $c > 0$ 使 $|g_n(x)|, |g(x)| \ge c$ 对所有充分大的 n 和所有 x，则 $f_n/g_n \to f/g$ 一致。

证明. 和式由

$$|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| \le |f_n - f| + |g_n - g|$$

给出。乘积中先使用一致收敛取得统一界：取 N_0 使 $|f_n - f| < 1$、$|g_n - g| < 1$ 对所有 $n \ge N_0$ 和 $x \in D$ 成立。若 $|f|, |g| \le B_0$，则 $|f_n| \le B_0 + 1$、$|g_n| \le B_0 + 1$ $(n \ge N_0)$。于是令 $B = B_0 + 1$，有

$$|f_n g_n - fg| \le |f_n - f||g_n| + |f||g_n - g| \le B|f_n - f| + B|g_n - g|.$$

右端一致趋于零。商使用

$$\frac{f_n}{g_n} - \frac{f}{g} = \frac{g(f_n - f) + f(g - g_n)}{g_n g}.$$

分母绝对值至少 c^2；分子中的 f, g 有界，两个误差一致趋于零，故商一致收敛。 □

命题 8.15 (一致界向极限的传递)**.** *若 $f_n \to f$ 一致，并且存在 N_0, C 使 $|f_n(x)| \le C$ 对所有 $n \ge N_0$ 和 $x \in D$ 成立，则 $|f(x)| \le C$ 对所有 $x \in D$。特别地，若所有充分大的近似函数具有同一个统一界，则极限函数有界。*

证明. 固定 x。由一致收敛，$f_n(x) \to f(x)$；对所有 $n \ge N_0$ 有 $-C \le f_n(x) \le C$。实数序列极限保持不等式，故 $-C \le f(x) \le C$。x 任意，得到结论。注意仅仅“每个 f_n 各自有界”并不提供同一个 C，因此不能替代统一界假设。 □

定义 8.16 (函数级数)**.** 给定函数列 $u_n : D \to \mathbb{R}$，定义部分和函数

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x).$$

若 S_N 逐点（或一致）收敛于 S，则称函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

逐点（或一致）收敛于 $S(x)$。

定理 8.17 (函数级数的一致 Cauchy 判别)**.** *函数级数 $\sum u_n$ 在 D 上一致收敛，当且仅当*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall q > p \ge N \ \forall x \in D, \qquad \left| \sum_{n=p+1}^{q} u_n(x) \right| < \varepsilon.$$

证明. 这是定理 8.10 应用于部分和函数 $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ 的直接结果，因为 $S_q(x) - S_p(x) = \sum_{n=p+1}^{q} u_n(x)$。 □

定理 8.18 (Weierstrass M 判别法)**.** *若存在非负数列 M_n 使*

$$|u_n(x)| \le M_n \qquad (x \in D)$$

且数项级数 $\sum M_n$ 收敛，则函数级数 $\sum u_n$ 在 D 上绝对且一致收敛。

证明. 对任意 $q > p \ge N$ 和 $x \in D$，

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} u_n(x) \right| \le \sum_{n=p+1}^{q} |u_n(x)| \le \sum_{n=p+1}^{q} M_n.$$

右侧与 x 无关，并由数项级数的 Cauchy 判别趋于零，所以函数级数一致收敛。又

$$\sum_{n=1}^{N} |u_n(x)| \le \sum_{n=1}^{N} M_n$$

对每个 x 成立，正项单调有界判别给出每个点的绝对收敛。 □

推论 8.19 (一致绝对收敛的尾部估计)**.** *在 M 判别的条件下，若 $S = \sum u_n$，则*

$$\sup_{x \in D} \left| S(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.$$

证明. 对固定 x，令 $q \to \infty$ 于有限尾部估计

$$\left| \sum_{n=N+1}^{q} u_n(x) \right| \le \sum_{n=N+1}^{q} M_n.$$

取极限后得到点态不等式；右侧与 x 无关，再取上确界。 □

定理 8.20 (连续函数级数的连续和)**.** *若每个 u_n 在 D 上连续，且 $\sum u_n$ 一致收敛，则其和函数*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 D 上连续。

证明. 部分和函数 S_N 是有限个连续函数之和，因而连续。由一致极限保持连续性定理 8.13，S 连续。 □

例 8.21 (逐点收敛但和不连续)**.** 在 $D = [0,1]$ 上令

$$u_n(x) = x^n - x^{n+1}.$$

每个 u_n 连续，且部分和望远镜相消：

$$S_N(x) = x - x^{N+1}.$$

逐点极限为 $S(x) = x$（包括 $x = 1$ 时 $S_N(1) = 0$，故此处更准确地是 $S(1) = 0$，而 $S(x) = x$ 对 $x < 1$）。因此

$$S(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

不连续。由连续和定理，它不可能一致收敛。

8.4 一致收敛的进一步性质

定理 8.22 (积分前的有限化接口)**.** *设 L 是定义在有界函数空间上的线性泛函，并存在 $C \ge 0$ 使*

$$|L(h)| \le C\|h\|_\infty.$$

若 $f_n \to f$ 一致，则

$$L(f_n) \to L(f).$$

证明. 线性给出

$$|L(f_n) - L(f)| = |L(f_n - f)| \le C\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

□

注 8.23 (与积分的关系)**.** 定积分将在后续章节中构造。届时积分算子若满足上述有界性估计，一致收敛即可与积分交换；本定理先把所需的逻辑压缩成一个范数连续性的命题，不提前使用尚未定义的积分。

定理 8.24 (单调连续函数列的 Dini 型结论)**.** 设 K 为紧集，$f_n : K \to \mathbb{R}$ 连续，且对每个 $x \in K$

$$f_{n+1}(x) \le f_n(x), \qquad f_n(x) \downarrow f(x),$$

其中 f 连续。则 $f_n \to f$ 在 K 上一致。

证明. 给定 $\varepsilon > 0$。对每个 n，定义

$$F_n = \{x \in K : f_n(x) - f(x) \ge \varepsilon\}.$$

因为 $f_n - f$ 连续，F_n 是 K 的闭集。又 $F_{n+1} \subseteq F_n$，并且逐点收敛给出 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$。若每个 F_n 非空，紧集的有限交性质将推出交集非空，矛盾。故存在 N 使 $F_N = \varnothing$。由于 F_n 递减，所有 $n \ge N$ 都满足 $F_n = \varnothing$，即 $0 \le f_n(x) - f(x) < \varepsilon$ 对所有 $x \in K$ 成立。 □

例 8.25 (移动尖峰：逐点趋零而不一致)**.** 在 $D = [0, 1]$ 上令

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - n|x - 1/n|\}.$$

每个 f_n 连续，且 $0 \le f_n \le 1$。固定 $x > 0$ 时，当 $n > 2/x$ 有 $1/n < x/2$，故 $n|x - 1/n| > nx/2 > 1$，从而 $f_n(x) = 0$；在 $x = 0$ 时 $f_n(0) = 0$。因此 $f_n \to 0$ 逐点。但 $f_n(1/n) = 1$，故 $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = 1$，不一致收敛。

命题 8.26 (一致收敛的逻辑边界)**.** 逐点收敛不保证一致收敛；即使每个函数连续，逐点极限也可能不连续；一致收敛则把连续性传递给极限。上述 x^n、望远镜函数级数和移动尖峰分别给出这些边界。

证明. x^n 与移动尖峰直接给出不一致性。望远镜级数的和函数不连续，而每项连续；若其一致收敛，则连续和定理会迫使和函数连续，矛盾。因此它只能逐点收敛。 □

注 8.27. 下一章将在此基础上进入微分：先讨论导数的定义与局部线性化，再说明逐点极限与导数交换需要比一致收敛更强的控制条件。

9 一元微分学基础

9.1 导数与线性近似

第七章研究连续性时，只要求函数值的变化在输入变化足够小时趋于零。微分学进一步询问：函数值的变化是否在一阶近似下等于某个常数乘以输入变化？这个常数就是导数。导数的定义首先是一个极限，因此必须明确极限所取的变量、定义域以及端点方向。

定义 9.1 (导数)**.** 设 $D \subseteq \mathbb{R}$，$f : D \to \mathbb{R}$，且 $a \in D$ 是 D 的聚点。若极限

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

存在且为有限实数，则称 f 在 a 可导，$f'(a)$ 称为导数。令 $h = x - a$，等价地

$$f'(a) = \lim_{h \to 0,\ a+h \in D} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

若 D 含有 a 的右侧邻域，只取 $h > 0$ 的极限称右导数 $f'_+(a)$；左导数 $f'_-(a)$ 相应只取 $h < 0$ 的极限。

注 9.2 (端点的导数约定)**.** 若 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$，在内部点 $a < x < b$ 使用双侧导数；在左端点通常讨论右导数，在右端点讨论左导数。端点的单侧导数不能替代内部点的双侧导数：函数 $f(x) = |x|$ 在 0 的左、右导数分别为 $-1, 1$，所以双侧导数不存在。

命题 9.3 (导数的唯一性)**.** *若两个有限实数 A, B 都满足*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = B,$$

则 $A = B$。

证明. 这是第七章函数极限唯一性的直接应用；若 $A \neq B$，取 $\varepsilon = |A - B|/3$，在同一个足够小的去心邻域内三角不等式产生 $|A - B| < 2|A - B|/3$，矛盾。 □

定理 9.4 (可导蕴含连续)**.** *若 f 在 a 可导，则 f 在 a 连续。*

证明. 令

$$q(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (h \neq 0).$$

可导意味着 $q(h) \to f'(a)$。于是

$$f(a+h) - f(a) = h\, q(h).$$

给定 $\varepsilon > 0$，由 $q(h) \to f'(a)$ 可取 $\delta_1 > 0$，使 $|q(h)| \le |f'(a)| + 1 =: M$ $(0 < |h| < \delta_1)$。再取 $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon/(M+1)\}$。则

$$|f(a+h) - f(a)| = |h|\,|q(h)| < \varepsilon.$$

当 $h = 0$ 时差为零，故连续性成立。 □

定义 9.5 (可微的线性主部)**.** 若 f 在 a 可导，则写

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+r(h),\qquad \frac{r(h)}{h}\longrightarrow 0\quad (h\to 0).$$

称 $f'(a)h$ 为一阶线性主部，$r(h)=o(h)$ 为余项。

命题 9.6 (导数的序列判据)**.** $f'(a)=L$ 当且仅当对任意 $h_n\to 0$、$h_n\neq 0$ 且 $a+h_n\in D$，都有

$$\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}\longrightarrow L.$$

证明. 把第七章函数极限的序列判据应用于差商函数 $h\mapsto [f(a+h)-f(a)]/h$。 □

例 9.7 (幂函数的导数)**.** 对整数 $m\geq 1$，

$$(x^m)'=mx^{m-1}.$$

事实上有限因式分解给出

$$\frac{(a+h)^m-a^m}{h}=\sum_{j=0}^{m-1}(a+h)^{m-1-j}a^j.$$

当 $h\to 0$ 时右侧每一项趋于 a^{m-1}，共有 m 项，故极限为 ma^{m-1}。常数函数导数为零，恒等函数导数为一。

9.2 导数的代数运算与链式法则

定理 9.8 (导数四则法则)**.** 若 f,g 在 a 可导，则

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a),\qquad (f-g)'(a)=f'(a)-g'(a),$$

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

若 $g(a)\neq 0$，则

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

证明. 和与差直接把差商拆开。乘积的差商为

$$\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,g(a+h)+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

可导蕴含连续，故 $g(a+h)\to g(a)$，两个差商分别趋于导数。对倒数，先写

$$\frac{1/g(a+h)-1/g(a)}{h}=-\frac{[g(a+h)-g(a)]/h}{g(a+h)g(a)}.$$

连续性和 $g(a)\neq 0$ 给出某个邻域使 $|g(a+h)|\geq |g(a)|/2$，故右侧趋于 $-g'(a)/g(a)^2$。商等于 $f\cdot(1/g)$，再用乘积法则得到公式。 □

定理 9.9 (链式法则)**.** 设 g 在 a 可导，f 在 $g(a)$ 可导。则复合函数 $f\circ g$ 在 a 可导，且

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a).$$

证明. 写

$$f(g(a+h))-f(g(a))=f'(g(a))[g(a+h)-g(a)]+\rho(g(a+h)-g(a)),$$

其中 $\rho(k)/k\to 0$（$k\to 0$）。若 $g(a+h)=g(a)$，余项为零；否则除以 h 得

$$\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}=\left[f'(g(a))+\frac{\rho(k)}{k}\right]\frac{g(a+h)-g(a)}{h},\qquad k=g(a+h)-g(a).$$

因为 g 连续，$k\to 0$；第一括号趋于 $f'(g(a))$，第二括号趋于 $g'(a)$，结论成立。 □

推论 9.10 (多项式与有理函数). 多项式在 $\mathbb{R}$ 上可导，其导数按形式求导规则得到；若多项式 $q(a)\neq 0$，则 p/q 在 a 可导，商法则给出导数。

证明. 常数与恒等函数可导，有限次加法与乘法归纳得到多项式结论；商结论由定理 9.8 得到。 □

定理 9.11 (反函数的导数). 设 I 为区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 连续且严格单调，并在 $a\in I$ 可导，$f'(a)\neq 0$。令 $b=f(a)$，且令 $g=f^{-1}:f(I)\to I$，则 g 在 b 可导，且

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}.$$

证明. 由第七章严格单调连续函数的逆函数连续性，g 在 b 连续，所以 $x=g(y)\to a$ 当 $y\to b$。当 $y\neq b$ 时 $x\neq a$，并且

$$\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^{-1}.$$

括号内趋于 $f'(a)\neq 0$，倒数函数在该非零极限处连续，故极限为 $1/f'(a)$。 □

9.3 局部极值与中值定理

定义 9.12 (局部极值). 若存在 $\delta>0$，使 $f(x)\le f(a)$ 对所有 $x\in D\cap(a-\delta,a+\delta)$，则称 a 是局部极大点；局部极小点相应把不等号反向。若只要求 $x\neq a$，称为严格局部极值。

定理 9.13 (Fermat 极值定理). 若 a 是定义域内部点，f 在 a 可导，且 a 是局部极大点或局部极小点，则 $f'(a)=0$。

证明. 设为局部极大点。对 $h>0$ 足够小，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0;$$

对 $h<0$ 足够小，分子仍非正而分母为负，故差商非负。若双侧极限存在，它既不大于零又不小于零，只能等于零。局部极小点对 $-f$ 应用同一论证。 □

定理 9.14 (Rolle 定理). 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 连续、在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$，除非 $a=b$；当 $a=b$ 时结论退化为空区间情形。

证明. 设 $a<b$。闭区间极值定理给出最大值和最小值。若二者相等，f 为常值，任取 $c\in(a,b)$ 即有 $f'(c)=0$。若二者不等，至少一个极值不在端点：因为端点函数值相同，不可能同时取得严格较大的最大值或严格较小的最小值只在端点。该内部极值点由 Fermat 定理给出导数为零。 □

定理 9.15 (拉格朗日中值定理)**.** *若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 连续、在 (a,b) 可导，且 $a<b$，则存在 $c\in(a,b)$ 使*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明. 令

$$\phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

ϕ 在闭区间连续、内部可导，并且

$$\phi(b)-\phi(a)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0.$$

Rolle 定理给出 $\phi'(c)=0$，即所需等式。 □

推论 9.16 (导数为零的常值判别)**.** *若 f 在区间 I 上连续，在其内部可导，且 $f'(x)=0$ 对所有内部点成立，则 f 在 I 上为常值。*

证明. 任取 $x<y$ 属于 I。若端点属于 I，函数在闭区间 $[x,y]$ 上连续，内部可导；中值定理给出 $c\in(x,y)$，使

$$0=f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

故 $f(x)=f(y)$。区间中任两点如此，函数为常值。 □

定理 9.17 (导数符号与单调性)**.** *设 f 在区间 I 上连续并在内部可导。*

1. *若 $f'(x)\geq 0$ 对所有内部点，则 f 单调不减；*
2. *若 $f'(x)\leq 0$ 对所有内部点，则 f 单调不增；*
3. *若 $f'(x)>0$ 对所有内部点，且任意两点间中值定理适用，则 f 严格递增；*
4. *若 $f'(x)<0$ 对所有内部点，则 f 严格递减。*

证明. 任取 $x<y$ 属于 I，中值定理给出

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)$$

某个 $c\in(x,y)$。由于 $y-x>0$，导数的符号就是 $f(y)-f(x)$ 的符号，四项分别得到。 □

推论 9.18 (导数有界导致 Lipschitz 估计)**.** *若 $|f'(x)|\leq M$ 对区间 I 的所有内部点成立，且中值定理适用，则*

$$|f(y)-f(x)|\leq M|y-x|\qquad(x,y\in I).$$

证明. 对 $x<y$ 应用中值定理，得到 $|f(y)-f(x)|=|f'(c)|(y-x)\leq M(y-x)$；交换 x,y 得一般情形。 □

9.4 导数的介值性质与反例

定理 9.19 (Darboux 定理)**.** 若 f 在区间 I 的内部可导，且 $x_1 < x_2$ 是内部点并满足 $[x_1, x_2] \subseteq I$，则对任意严格介于 $f\prime(x_1)$ 与 $f\prime(x_2)$ 之间的数 v，存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使 $f\prime(c) = v$。若允许 v 等于端点导数，则相应结论是存在 $c \in [x_1, x_2]$。因此导数虽不必连续，却不能跳跃。

证明. 只证 $f'(x_1) < v < f'(x_2)$。令

$$g(x) = f(x) - vx.$$

则 $g'(x_1) < 0$、$g'(x_2) > 0$。由导数定义，存在 $u > x_1$ 使 $g(u) < g(x_1)$，也存在 $w < x_2$ 使 $g(w) < g(x_2)$。闭区间 $[x_1, x_2]$ 上 g 连续，故取到最小值。该最小值不可能只在 x_1，因为向右存在 u 使函数值更小；也不可能只在 x_2，因为向左存在 w 使函数值更小。故存在内部最小点 c，Fermat 定理给出 $g'(c) = 0$，即 $f'(c) = v$。若端点导数是相反次序，交换两端。严格中间值的结论已经证明；当 $v = f\prime(x_1)$ 或 $v = f\prime(x_2)$ 时直接取相应端点，得到闭区间版本。 □

例 9.20 (导数不连续的函数)**.** 定义

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 f 在 0 可导且 $f'(0) = 0$，而对 $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x),$$

沿 $x_n = 1/(2\pi n)$ 与 $y_n = 1/((2n+1)\pi)$ 取值，导数分别趋于 -1 与 1，所以 f' 在 0 不连续。

9.5 高阶导数与 Taylor 公式

定义 9.21 (高阶导数)**.** 定义 $f^{(0)} = f$。若 $f^{(k-1)}$ 在某点可导，定义

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

若在区间内每阶导数都存在，则称 f 为相应阶可导；若 $f^{(k)}$ 连续，写作 $f \in C^k$。C^0 表示连续函数。

定理 9.22 (Taylor 公式（Lagrange 余项）)**.** 设 $f \in C^n([a,b])$，并且在 (a,b) 上存在 $f^{(n+1)}$。则存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

证明. 令 Taylor 多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad R = f(b) - P_n(b).$$

若 $R = 0$，结论可取任意 ξ。若 $R \neq 0$，令

$$\lambda = \frac{R}{(b-a)^{n+1}}, \qquad H(x) = f(x) - P_n(x) - \lambda(x-a)^{n+1}.$$

则 $H(a)=H(b)=0$，且因 P_n 与 f 在 a 的前 n 阶导数相同，

$$H(a)=H'(a)=\cdots=H^{(n)}(a)=0.$$

先对 H 应用 Rolle 定理得到 $c_1\in(a,b)$ 使 $H'(c_1)=0$；再对 H' 在适当的区间使用 Rolle，反复 n 次，得到 c_n 使 $H^{(n)}(c_n)=0$。更精确地，采用逐步区间：若 $H^{(j)}(c_j)=0$，则在 $[a,c_j]$ 上 $H^{(j)}(a)=H^{(j)}(c_j)=0$，Rolle 给出 $c_{j+1}\in(a,c_j)$ 使 $H^{(j+1)}(c_{j+1})=0$。最后 $H^{(n)}(a)=0$ 与 $H^{(n)}(c_n)=0$ 再应用 Rolle 得 ξ 使 $H^{(n+1)}(\xi)=0$。计算

$$H^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-\lambda(n+1)!,$$

故 $\lambda=f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$，代回即得公式。 □

推论 9.23 (Taylor 余项估计)**.** *若在 $[a,b]$ 的内部有 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$，则*

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}.$$

证明. 将 Taylor 公式中的 ξ 代入绝对值，并使用导数界。 □

例 9.24 (二次函数的 Taylor 公式)**.** 对 $f(x)=x^2$，在 a 处 $f(a)=a^2$、$f'(a)=2a$、$f''(x)=2$，二阶 Taylor 公式给出

$$x^2=a^2+2a(x-a)+(x-a)^2,$$

余项在这里精确等于二次项，且不需要第三阶导数。

9.6 假设边界与本章接口

例 9.25 (可导但导数无界)**.** 函数 $f(x)=x^2\sin(1/x^2)$（$x\neq0$，$f(0)=0$）在 0 可导，且

$$f'(0)=\lim_{h\to0}h\sin(1/h^2)=0.$$

但对 $x\neq0$，

$$f'(x)=2x\sin(1/x^2)-\frac{2}{x}\cos(1/x^2).$$

沿 $x_n=(2\pi n)^{-1/2}$ 取值时 $\cos(1/x_n^2)=1$，故 $f'(x_n)=-2/x_n\to-\infty$，导数在任意含 0 的邻域内无界。这说明可导并不保证导数局部有界，更不保证导数连续。

命题 9.26 (导数结论的逻辑边界)**.**

$$f'\equiv0\Rightarrow f\text{ 常值},\qquad f'\ge0\Rightarrow f\text{ 单调不减},$$

但“导数在一点存在”不能推出导数在邻域存在，“连续”不能推出可导，“导数存在”也不能推出导数连续。

证明. 前两项分别由推论 9.16 与定理 9.17。绝对值函数在零点连续但不可导；例 9.20 给出可导但导数不连续。局部结论不能替代区间上的全局假设。 □

注 9.27. 下一章将在本章的 Taylor 和中值工具上建立凸性、L'Hôpital 型极限、反常增长与更精细的渐近估计；随后进入 Riemann/Darboux 积分。微分与一致收敛之间的交换需要额外的导数控制，不能由一致收敛本身推出。

10　凸性、L'Hôpital 型极限与渐近估计

10.1　凸性与割线斜率

第九章的中值定理把有限增量
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
与某个点的导数联系起来。本章把不同区间上的割线斜率相互比较。这种比较产生凸性，并把二阶导数、切线位置、极值和不等式统一到同一结构中。

定义 10.1 (凸函数与严格凸函数)**.** 设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为区间。函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 称为凸函数，若对任意 $x,y\in I$ 和 $t\in[0,1]$，有
$$f((1-t)x+ty)\le(1-t)f(x)+tf(y).$$
若 $x\neq y$ 且 $0<t<1$ 时不等式严格，则称 f 严格凸。若不等号方向反向，则称函数凹或严格凹。

引理 10.2 (三点割线斜率比较)**.** *设 $x<y<z$ 属于区间 I。若 f 凸，则*
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

证明. 写
$$y=\frac{z-y}{z-x}x+\frac{y-x}{z-x}z.$$
凸性给出
$$f(y)\le\frac{z-y}{z-x}f(x)+\frac{y-x}{z-x}f(z).$$
移项并除以正数 $y-x$，得到
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$
把同一不等式改写为
$$f(z)-f(y)\ge\frac{z-y}{z-x}\bigl(f(z)-f(x)\bigr),$$
再除以 $z-y>0$，得到第二个不等式。 □

定理 10.3 (凸性的等价斜率判据)**.** *函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 凸，当且仅当对任意 $x<y<z$ 有*
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

证明. 正向由引理得到。反向，给定 $x<z$ 和 $t\in(0,1)$，令 $y=(1-t)x+tz$。于是
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

乘以 $(y-x)(z-y)>0$，整理为

$$(z-x)f(y)\le (z-y)f(x)+(y-x)f(z).$$

由于 $y-x=t(z-x)$、$z-y=(1-t)(z-x)$，除以 $z-x$ 得凸性定义。端点 $t=0,1$ 为等式。 □

定理 10.4 (一阶导数的凸性判据)**.** *若 f 在区间 I 的内部可导，则以下条件等价：*

1. *f 凸；*
2. *f' 在内部单调不减；*
3. *对任意内部 $x<y<z$，有*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y)\le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

证明. 若 f 凸，先证明割线斜率夹在两端导数之间。固定内部点 $x<y$。取 $0<h<y-x$，将三点斜率比较应用于 $x<x+h<y$，得到

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

令 $h\to 0^+$，左侧趋于 $f'(x)$，所以

$$f'(x)\le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

另一方面，取 $0<h<y-x$，对 $x<y-h<y$ 应用三点斜率比较的第二个不等式，得

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le \frac{f(y)-f(y-h)}{h}.$$

令 $h\to 0^+$，右侧趋于 $f'(y)$，故

$$f'(x)\le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y).$$

这对任意内部 $x<y$ 成立，因此 f' 单调不减；同时前面两步也直接给出第三项。

若 f' 单调不减，任取 $x<y<z$，中值定理分别给出

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(u),\qquad \frac{f(z)-f(y)}{z-y}=f'(v)$$

其中 $u\in(x,y)$、$v\in(y,z)$，故 $u<v$，从而第一式不大于第二式。由定理 10.3，f 凸。最后说明第二项与第三项确实等价。若第三项成立，固定内部 $x<y$，选取内部点 $w<x<y<z$。把第三项分别应用于 $w<x<y$ 和 $x<y<z$，得到

$$f'(x)\le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y).$$

因此 f' 单调不减；而从第一部分的两端导数夹逼，已知 f' 单调不减时，对任意 $x<y<z$ 也有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y)\le \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

所以第三项与第二项等价。 □

定理 10.5 (二阶导数判据)**.** *若 f 在区间内部二阶可导，则*

$$f'' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ 凸}, \qquad f'' \leq 0 \Longrightarrow f \text{ 凹}.$$

若 $f'' > 0$ 处处成立，则 f 严格凸。

证明. $f'' \geq 0$ 意味着 f' 单调不减：对任意 $x < y$，对 f' 应用中值定理，存在 $c \in (x, y)$ 使

$$f'(y) - f'(x) = f''(c)(y - x) \geq 0.$$

再由定理 10.4 得凸性。凹性对 $-f$ 应用。若 $f'' > 0$，则 f' 严格递增；对任意三点，两个相邻割线斜率严格有序，定理 10.3 的反向证明给出严格凸性。 □

推论 10.6 (切线支撑性质)**.** *若 f 凸且在内部点 a 可导，则对所有 $x \in I$*

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

证明. 若 $x > a$，凸性的一阶斜率判据给出

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

乘以正数 $x - a$ 即得。若 $x < a$，则

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(a);$$

此时乘以负数 $x - a$ 反转不等号，仍得到结论。 □

定理 10.7 (Jensen 不等式的有限形式)**.** *若 f 凸，$x_1, \dots, x_m \in I$，$\lambda_i \geq 0$，且 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$，则*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i).$$

严格凸时，若至少两个 $\lambda_i > 0$ 对应的 x_i 不同，不等式严格。

证明. 对 m 归纳。$m = 2$ 正是凸性定义。设结论对 $m - 1$ 成立。若 $\lambda_m = 1$，等式成立；否则令

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_m} \quad (1 \leq i < m), \qquad y = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i x_i.$$

则

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_m) y + \lambda_m x_m.$$

先用二点凸性，再用归纳假设：

$$f\left(\sum_{i} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_m) f(y) + \lambda_m f(x_m) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i).$$

严格情形由两次严格性逐步判断。 □

10.2 凸函数的连续性与极值结构

定理 10.8 (开区间上的凸函数连续)**.** *若 $f : I \to \mathbb{R}$ 凸，且 a 是 I 的内部点，则 f 在 a 连续。*

证明. 取 $u < a < v$ 且 $[u, v] \subseteq I$。对 $x \in (a, v)$，三点斜率比较给出

$$\frac{f(a) - f(u)}{a - u} \le \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(v) - f(a)}{v - a}.$$

令

$$M = \max\left\{ \left| \frac{f(a) - f(u)}{a - u} \right|, \left| \frac{f(v) - f(a)}{v - a} \right| \right\}.$$

于是 $|f(x) - f(a)| \le M|x - a|$ 对 $x > a$ 成立；对 $x < a$ 同理。因此给定 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\{a - u, v - a, \varepsilon/(M + 1)\}$，得到连续性。 □

注 10.9 (端点行为)**.** 凸函数在开区间内部必连续，但端点连续性需要额外假设。函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, 1]$ 凸，却不能在 0 连续延拓到有限值；凸性只控制内部割线斜率，不自动控制开区间端点。

定理 10.10 (凸函数的一侧导数)**.** *若 f 在开区间 I 上凸，则对每个 $a \in I$，右导数与左导数*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \qquad f'_-(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a) - f(a - h)}{h}$$

都存在于扩充实数 $[-\infty, +\infty]$，且

$$f'_-(a) \le f'_+(a).$$

证明. 记右差商 $q_+(h) = [f(a + h) - f(a)]/h$。若 $0 < h < k$，三点 $a < a + h < a + k$ 的斜率比较给出

$$q_+(h) \le q_+(k).$$

因此 q_+ 在参数 h 上单调不减；当 $h \downarrow 0$ 时，它单调地趋向其下确界，该下确界允许取 $-\infty$，所以右导数 $f'_+(a)$ 在扩充实数中存在。同样记左差商 $q_-(h) = [f(a) - f(a - h)]/h$。对 $0 < h < k$，三点 $a - k < a - h < a$ 的斜率比较给出

$$q_-(h) \le q_-(k),$$

故 $q_-(h)$ 在 $h \downarrow 0$ 时也单调趋向扩充实数极限 $f'_-(a)$。最后，对任意 $h, k > 0$，三点 $a - h < a < a + k$ 给出

$$q_-(h) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} \le \frac{f(a + k) - f(a)}{k} = q_+(k).$$

先令 $h \downarrow 0$，再令 $k \downarrow 0$，得到 $f'_-(a) \le f'_+(a)$。 □

10.3 Cauchy 中值定理

定理 10.11 (Cauchy 中值定理)**.** *设 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 连续、在 (a, b) 可导，且 $a < b$。则存在 $c \in (a, b)$ 使*

$$\big(f(b) - f(a)\big) g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big) f'(c).$$

证明. 令

$$H(x) = \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x).$$

函数 H 连续且内部可导，并且

$$H(b)-H(a) = \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(b)-f(a)\big) = 0.$$

Rolle 定理给出 c 使 $H'(c)=0$，展开即得结论。 □

10.4 L'Hôpital 型极限

定理 10.12 (L'Hôpital 的 0/0 型)**.** 设 f,g 在去心右邻域 $(a,a+\delta)$ 上可导，并在 a 连续延拓为 $f(a)=g(a)=0$。若 $g'(x)\neq 0$，且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}},$$

则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

其中商在充分靠近 a 的地方有定义。

证明. 先说明商在充分靠近 a 的地方确实有定义。导数具有介值性质，而 g' 在连通区间上处处不为零，所以 g' 不可能从正值变为负值，也不可能从负值变为正值；它在该区间上符号固定。中值定理于是说明 g 严格单调。由于连续延拓满足 $g(a)=0$，对所有充分靠近 a 且 $x>a$ 的点都有 $g(x)\neq 0$。

先设 $L\in\mathbb{R}$。给定 $\varepsilon>0$，取 $\eta>0$，使

$$|f'(t)/g'(t) - L| < \varepsilon \qquad (a<t<a+\eta).$$

对任意 $x\in(a,a+\eta)$，Cauchy 中值定理应用于 $[a,x]$ 给出

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

某个 $c\in(a,x)$。由于端点值均为零，左侧就是 $f(x)/g(x)$，右侧与 L 的距离小于 ε。这正是右极限等于 L。

若 $L=+\infty$，给定 $A>0$，取 η 使 $f'(t)/g'(t)>A$。同一中值公式给出 $f(x)/g(x)>A$；$L=-\infty$ 同理。 □

定理 10.13 (L'Hôpital 的 ∞/∞ 型)**.** 设 f,g 在 $(A,+\infty)$ 上可导，且 $|g(x)|\to\infty$。若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L\in\mathbb{R}, \qquad g'(x)\neq 0,$$

并且 $f(x_0),g(x_0)$ 有限，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

只要 $g(x)$ 的符号最终固定且 $|g(x)|\to\infty$。

证明. 给定 $\varepsilon>0$，取 X 使 $x\ge X$ 时

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon.$$

由导数的介值性质和 $g'(x)\neq 0$，g' 在 $[X,+\infty)$ 上符号固定；中值定理说明 g 在该区间严格单调。因此 $g(x)-g(X)\neq 0$，可以对任意 $x>X$ 应用 Cauchy 中值定理，得到某个 $c_x\in(X,x)$ 使

$$\frac{f(x)-f(X)}{g(x)-g(X)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=L+\theta_x,\qquad |\theta_x|<\varepsilon.$$

于是

$$\frac{f(x)}{g(x)}-L=\theta_x\left(1-\frac{g(X)}{g(x)}\right)-L\frac{g(X)}{g(x)}+\frac{f(X)}{g(x)}.$$

由于 $|g(x)|\to\infty$，右侧第二、三项趋于 0，而第一项的绝对值的上极限不超过 ε。故

$$\limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|\le\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$ 即得结论。 □

注 10.14 (假设边界)**.** L'Hôpital 法则的导数比极限不存在时不能使用；即使原商极限存在，导数比也可能振荡。法则也不允许在 g' 具有零点而未检查商定义时直接约分。

10.5 渐近符号与 Taylor 估计

定义 10.15 (大 O、小 o 与渐近等价)**.** 设 g 在 a 的去心邻域不为零。

$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to a)$$

表示 $f(x)/g(x)\to 0$；

$$f(x)=O(g(x))\quad(x\to a)$$

表示存在 $C,\delta>0$，使 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|f(x)|\le C|g(x)|$。若 $f/g\to 1$，写 $f\sim g$。

命题 10.16 (渐近记号的代数规则)**.** *在 $x\to a$ 下：*

$$o(g)+o(g)=o(g),\qquad c\,o(g)=o(g),$$

$$O(g)+O(g)=O(g),\qquad o(g)=O(g).$$

若 $f=o(g)$、$u=O(v)$，且商有定义，则 $fu=o(gv)$。若 $f\sim g$、$u\sim v$，且 $g,v\neq 0$，则 $fu\sim gv$。

证明. 例如 $f_1=o(g)$、$f_2=o(g)$ 时

$$\frac{f_1+f_2}{g}=\frac{f_1}{g}+\frac{f_2}{g}\to 0.$$

O 的结论由三角不等式和常数相加得到。若 $f/g\to 0$、$|u/v|\le C$，则

$$\left|\frac{fu}{gv}\right|\le C\left|\frac{f}{g}\right|\to 0.$$

渐近等价的乘法规则由

$$\frac{fu}{gv}=\frac{f}{g}\frac{u}{v}\to 1.$$

□

引理 10.17 (重复 Cauchy 中值定理的余项形式)**.** 设 F 在 a 的一侧邻域上具有直到 n 阶导数，并满足 $F^{(j)}(a)=0$ $(0\le j<n)$。若 $h\neq 0$ 足够小，则存在 ξ_h 严格位于 a 与 $a+h$ 之间，使

$$\frac{F(a+h)}{h^n}=\frac{F^{(n)}(\xi_h)}{n!}.$$

证明. 对 $n=1$，这是中值定理。设结论对 $n-1$ 成立。对函数 $F(x)$ 与 $G(x)=(x-a)^n$ 在 a 与 $a+h$ 之间应用 Cauchy 中值定理。由于 $F(a)=G(a)=0$，存在 u_h 严格位于两端，使

$$\frac{F(a+h)}{h^n}=\frac{F'(u_h)}{n(u_h-a)^{n-1}}.$$

由 $F'(a)=F''(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0$，可对 F' 和 $(x-a)^{n-1}$ 在 a,u_h 之间使用归纳假设。于是存在 ξ_h 严格位于 a 与 u_h 之间，从而也严格位于 a 与 $a+h$ 之间，并且

$$\frac{F'(u_h)}{(u_h-a)^{n-1}}=\frac{F^{(n)}(\xi_h)}{(n-1)!}.$$

合并两式即得结论。 □

定理 10.18 (Taylor 公式的渐近形式)**.** 若 f 在 a 的邻域内有 n 阶导数，且 $f^{(n)}$ 在 a 连续，则

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+o(h^n).$$

证明. 令

$$F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

对 $0\le j\le n$，有 $F^{(j)}(a)=0$：多项式的第 j 阶导数在 a 恰好抵消 $f^{(j)}(a)$，而次数大于 j 的项在 a 的值为零。由引理 10.17，对每个充分小的 $h\neq 0$ 存在 $\xi_h\to a$，使

$$\frac{F(a+h)}{h^n}=\frac{F^{(n)}(\xi_h)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\xi_h)-f^{(n)}(a)}{n!}.$$

$f^{(n)}$ 在 a 连续，所以右侧趋于 0。因此 $F(a+h)=o(h^n)$，即得所述展开式。 □

例 10.19 (代数型基本极限)**.** 由 Taylor 公式或直接因式分解，对整数 $m>n\ge 0$ 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1-mx}{x^2}=\frac{m(m-1)}{2},$$

以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-(1+x)^n}{x}=m-n.$$

第二式也可先提取 $(1+x)^n$，再使用 $(1+x)^k\to 1$。

定理 10.20 (导数比极限的一个充分条件)**.** 设 $f(a)=g(a)=0$，$g'(a)\neq 0$，且 f,g 在 a 可导。则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

证明. 由可导性，

$$f(x) = f'(a)(x-a) + o(x-a), \qquad g(x) = g'(a)(x-a) + o(x-a).$$

两式相除：

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a) + o(1)}{g'(a) + o(1)} \longrightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

$g'(a) \neq 0$ 保证分母在充分小邻域不为零。 □

10.6 本章的边界与后续接口

例 10.21 (凸性不等于严格凸性)**.** 常值函数和仿射函数同时满足凸性与凹性，但不严格凸。函数 $f(x) = |x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格凸性失败，例如取 $x = -1, y = 1, t = 1/2$ 时 $f(0) = 0 < 1$ 其实给出严格不等式；但在同一条射线上取 $x = 0, y = 1, t = 1/2$ 时等式成立，因此它不是严格凸。

命题 10.22 (本章结论的依赖边界)**.**

$$f'' \geq 0 \Rightarrow f \text{ 凸}, \qquad f \text{ 凸且可导} \Rightarrow f' \text{ 单调不减},$$

但没有二阶导数时不能使用二阶判据；*L'Hôpital* 定理必须检查导数比、分母导数和商的定义域；*Taylor* 余项必须满足相应阶导数存在条件。

证明. 前两项分别由定理 10.5 和定理 10.4。其余是各定理证明中使用的必要条件：去掉任何一项，证明中的中值点、除法或余项构造可能失效。 □

注 10.23. 下一章将从区间划分、上和下和与振幅控制开始构造 Riemann/Darboux 积分，并证明可积函数空间的基本代数性质、连续函数可积性及微积分基本定理的第一部分。

11 Riemann–Darboux 积分

第六章把“无限求和”定义为部分和列的极限。本章对区间上的函数采用同样的有限逼近思想：先把区间分割成有限个小区间，在每个小区间上记录函数值的下界与上界，再研究这些有限和在网格变细时是否被迫趋于同一个数。这样定义出的积分不依赖某一组取样点，而由上下和之间的间隙控制。

11.1 分割与上下和

定义 11.1 (分割、网格与细化)**.** 设 $a<b$，闭区间记为 $I=[a,b]$。分割是有限点列

$$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}.$$

第 i 个小区间为 $I_i=[x_{i-1},x_i]$，长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$。分割的网格定义为

$$\|P\|=\max_{1\le i\le n}\Delta x_i.$$

若 $P\subseteq Q$，称 Q 是 P 的细化。

定义 11.2 (Darboux 上和与下和)**.** 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 有界。对每个小区间 I_i 定义

$$m_i(f,P)=\inf_{x\in I_i}f(x),\qquad M_i(f,P)=\sup_{x\in I_i}f(x).$$

下和与上和分别为

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(f,P)\Delta x_i,\qquad U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(f,P)\Delta x_i.$$

有界性保证每个 m_i,M_i 都是有限实数；不要求函数在小区间上取得极小值或极大值。若函数连续，极值定理才会进一步把 $\inf,\sup$ 改写为最小值、最大值。

引理 11.3 (上下和的基本不等式)**.** *对任意分割 P，有*

$$L(f,P)\le U(f,P).$$

若 $P\subseteq Q$，则

$$L(f,P)\le L(f,Q)\le U(f,Q)\le U(f,P).$$

证明. 在每个小区间上 $m_i\le M_i$，且 $\Delta x_i>0$，逐项乘法并求和即得 $L(f,P)\le U(f,P)$。

只需证明加入一个分点不会降低下和。设 Q 从 P 在某个 $[u,v]$ 内加入 c，其中 $u<c<v$。记

$$m=\inf_{[u,v]}f,\quad m_1=\inf_{[u,c]}f,\quad m_2=\inf_{[c,v]}f.$$

因为 $[u,c],[c,v]\subseteq[u,v]$，有 $m\le m_1, m\le m_2$。因此

$$m(v-u)\le m_1(c-u)+m_2(v-c).$$

其他小区间的项不变，故 $L(f,P)\le L(f,Q)$。对上和令 $M=\sup_{[u,v]} f$、M_1,M_2 为两子区间上确界，则 $M_1,M_2\le M$，从而

$$M_1(c-u)+M_2(v-c)\le M(v-u),$$

故 $U(f,Q)\le U(f,P)$。有限次加入分点后得到细化的结论。 □

定义 11.4 (上积分、下积分与 Darboux 可积)**.** 定义

$$\underline{\int_a^b} f=\sup_P L(f,P),\qquad \overline{\int_a^b} f=\inf_P U(f,P),$$

其中 P 遍历 $[a,b]$ 的所有分割。称 f Darboux 可积，若

$$\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f.$$

共同值记为 $\int_a^b f(x)\,dx$。

命题 11.5 (下积分不超过上积分)**.** *对有界 f，有*

$$\underline{\int_a^b} f\le\overline{\int_a^b} f.$$

证明. 任意两分割 P,Q 的并集 $R=P\cup Q$ 是二者的共同细化。由引理，

$$L(f,P)\le L(f,R)\le U(f,R)\le U(f,Q).$$

所以对任意 P,Q，$L(f,P)\le U(f,Q)$。固定 Q，对所有 P 取上确界，得到 $\underline{\int} f\le U(f,Q)$；再对所有 Q 取下确界，得到所需不等式。 □

11.2 可积性的振幅判据

定义 11.6 (小区间振幅)**.** 对有界 f 和闭区间 $J\subseteq[a,b]$，定义

$$\omega(f;J)=\sup_J f-\inf_J f.$$

若 P 是分割，则

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i}\omega(f;I_i)\Delta x_i.$$

定理 11.7 (Darboux 振幅判据)**.** *有界函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可积，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在分割 P 使*

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

证明. 若 f 可积，令共同积分值为 A。由上确界定义，存在分割 P_1 使

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<L(f,P_1)\le A,$$

由下确界定义，存在分割 P_2 使

$$A\le U(f,P_2)<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $P = P_1 \cup P_2$。细化不等式给出

$$U(f,P) - L(f,P) \le U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon.$$

反过来，假设对每个 $\varepsilon > 0$ 都有这样的 P。记 $\underline{I}, \overline{I}$ 为下、上积分。由定义

$$L(f,P) \le \underline{I} \le \overline{I} \le U(f,P),$$

故 $0 \le \overline{I} - \underline{I} \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$。若 $\overline{I} - \underline{I} > 0$，取 $\varepsilon = (\overline{I} - \underline{I})/2$ 矛盾。因此二者相等。 □

定理 11.8 (等价的取样判据)**.** *有界函数 f 可积，当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使任意网格满足 $\|P\| < \delta$ 的分割 $P = \{x_i\}$ 以及任意取样点 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$，都有*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

证明. 先设 f 可积，记积分为 A，并令 $|f| \le B$ 且 $B \ge 1$。给定 $\varepsilon > 0$，由振幅判据选取分割

$$P_0 = \{y_0 = a < y_1 < \cdots < y_r = b\}$$

使

$$U(f,P_0) - L(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $d = \min_{1 \le j \le r}(y_j - y_{j-1}) > 0$。若 $r = 1$，取样区间全部落在唯一的 P_0-块内，下面的坏区间集合为空；若 $r \ge 2$，取

$$0 < \delta < \min\left\{ d, \frac{\varepsilon}{8B(r-1)} \right\}.$$

固定任意 $\|P\| < \delta$ 的分割和任意取样点。称 P 的一个小区间 $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ 为坏区间，如果它包含某个内部点 y_j $(1 \le j \le r-1)$；否则称为好区间。由于 $\Delta x_i < d$，一个 J_i 不可能包含两个不同的内部点 y_j，所以坏区间至多有 $r-1$ 个，且坏区间总长度满足

$$\ell_{\text{bad}} = \sum_{J_i \text{ bad}} \Delta x_i < (r-1)\delta.$$

把所有好区间按其所在的 P_0-块归类。若好区间 $J_i \subseteq [y_{j-1}, y_j]$，则

$$m_j := \inf_{[y_{j-1}, y_j]} f \le f(t_i) \le M_j := \sup_{[y_{j-1}, y_j]} f.$$

设 G_j 是第 j 个块中所有好区间长度之和，设 $H_j = (y_j - y_{j-1}) - G_j$。显然 $\sum_j H_j = \ell_{\text{bad}}$。好区间取样和 S_{good} 因而满足

$$\sum_j m_j G_j \le S_{\text{good}} \le \sum_j M_j G_j.$$

坏区间取样和 S_{bad} 满足

$$|S_{\text{bad}}| \le B\ell_{\text{bad}}.$$

又因为 $|m_j|, |M_j| \le B$，有

$$\left| \sum_j m_j G_j - \sum_j m_j (y_j - y_{j-1}) \right| \le B\ell_{\text{bad}},$$

以及同样的 M_j 估计。于是

$$L(f,P_0)-2B\ell_{\mathrm{bad}}\le S(P)\le U(f,P_0)+2B\ell_{\mathrm{bad}},$$

其中 $S(P)=\sum_i f(t_i)\Delta x_i$。由于 $L(f,P_0)\le A\le U(f,P_0)$，得到

$$|S(P)-A|\le \big(U(f,P_0)-L(f,P_0)\big)+2B\ell_{\mathrm{bad}}<\frac{\varepsilon}{2}+2B(r-1)\delta<\varepsilon.$$

$r=1$ 时第二项为零，结论同样成立。

反过来，假设取样和性质成立。固定 $\varepsilon>0$，取对应的 δ。选取等距分割 P_n，使 $\|P_n\|<\delta$，并在每个小区间分别取一点 u_i,v_i 使

$$f(u_i)<m_i+\frac{\varepsilon}{4(b-a)},\qquad f(v_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

这种点存在是下确界、上确界定义的直接展开。于是相应取样和 S_u,S_v 满足

$$L(f,P_n)\le S_u\le L(f,P_n)+\frac{\varepsilon}{4},$$

$$U(f,P_n)-\frac{\varepsilon}{4}\le S_v\le U(f,P_n).$$

取样和性质给出 $|S_u-A|<\varepsilon/4$、$|S_v-A|<\varepsilon/4$，从而

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)\le (U-S_v)+|S_v-A|+|A-S_u|+(S_u-L)<\varepsilon.$$

振幅判据说明 f 可积。 □

定理 11.9 (细分取样和的充分条件)**.** *若对每个 $\varepsilon>0$，存在分割 P_0，使*

$$U(f,P_0)-L(f,P_0)<\varepsilon,$$

则所有足够细的取样和都落在长度趋于零的区间内；特别地，取样和极限唯一，且等于 Darboux 积分。

证明. 设 P 细化 P_0，并在每个小区间取 t_i。因为

$$m_i\le f(t_i)\le M_i,$$

逐项乘以 Δx_i 并求和，得到

$$L(f,P)\le\sum_i f(t_i)\Delta x_i\le U(f,P).$$

细化不等式再给出

$$L(f,P_0)\le\sum_i f(t_i)\Delta x_i\le U(f,P_0).$$

故取样和总落在 $[L(f,P_0),U(f,P_0)]$ 内；其长度可任意小。 □

11.3 积分的代数与序性质

定理 11.10 (线性与保序)**.** *若 f, g 在 $[a,b]$ 可积，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则*

$$\alpha f + \beta g$$

可积且

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

若 $f \le g$，则

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

证明. 先处理常数倍。若 $\alpha \ge 0$，每个小区间的上下确界分别为 $\alpha m_i, \alpha M_i$，所以 $L(\alpha f, P) = \alpha L(f,P)$、$U(\alpha f, P) = \alpha U(f,P)$。若 $\alpha < 0$，上、下确界交换，得到

$$L(\alpha f, P) = \alpha U(f,P), \qquad U(\alpha f, P) = \alpha L(f,P).$$

两种情形都给出上下积分相等且积分按常数倍变换。

对和，任意 $x \in I_i$ 有

$$m_i(f) + m_i(g) \le f(x) + g(x) \le M_i(f) + M_i(g),$$

所以

$$L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P) \le U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P).$$

给定 $\varepsilon > 0$，分别选取使 $U - L < \varepsilon/2$ 的分割并取共同细化，便得到 $f+g$ 的上下和间隙小于 ε，由振幅判据可积。再令上下积分逼近各自积分值，得到和的积分公式。线性组合由两步得到。

若 $f \le g$，每个小区间的下确界满足 $m_i(f) \le m_i(g)$，上确界也满足 $M_i(f) \le M_i(g)$。因此 $L(f,P) \le L(g,P)$；取上确界即得下积分不等式。对上积分同样有 $U(f,P) \le U(g,P)$，结合可积性得到结论。 □

推论 11.11 (绝对值与积分估计)**.** *若 f 可积，则 $|f|$ 可积，且*

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|.$$

若 $|f| \le M$，则

$$\left| \int_a^b f \right| \le M(b-a).$$

证明. 函数 $|\cdot|$ 满足

$$\big||u| - |v|\big| \le |u - v|.$$

因此每个小区间上 $\omega(|f|; I_i) \le \omega(f; I_i)$，振幅判据说明 $|f|$ 可积。由于 $-|f| \le f \le |f|$，保序与线性给出

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

最后由 $|f| \le M$ 与保序得 $\int |f| \le M(b-a)$。 □

11.4 连续函数与单调函数的可积性

定理 11.12 (一致连续函数可积)**.** *若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则 f Darboux 可积。*

证明. 由第七章 Heine–Cantor 定理，给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/(b-a)$。取分割 P 使 $\|P\|<\delta$。若 $x,y\in I_i$，则 $|x-y|\le\Delta x_i<\delta$，故

$$M_i-m_i\le\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

求和得到

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_i(M_i-m_i)\Delta x_i\le\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

由振幅判据可积。 □

定理 11.13 (单调函数可积)**.** *若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调，则 f Darboux 可积。*

证明. 先设 f 单调不减。取等距分割 $x_i=a+i(b-a)/n$。小区间上 $m_i=f(x_{i-1})$、$M_i=f(x_i)$，因此

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl(f(x_i)-f(x_{i-1})\bigr).$$

和望远镜消去为

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\bigl(f(b)-f(a)\bigr)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

若 f 单调不增，应用于 $-f$，再用线性性质。振幅判据给出可积性。 □

11.5 例子与后续接口

例 11.14 (有界但不可积的 Dirichlet 函数)**.** 定义

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

任意非退化小区间同时含有有理数和无理数，所以每个小区间的下确界为 0、上确界为 1。于是对所有分割 P，

$$L(f,P)=0,\qquad U(f,P)=b-a.$$

上下积分不同，故 f 不可积。

例 11.15 (单点改值不改变积分)**.** 若有界函数 f,g 只在有限个点不同，且 f 可积，则 g 可积且积分相同。

证明. 设差异点为 $z_1,\dots,z_m$，给定 $\varepsilon>0$。取总长度小于 $\varepsilon/(4B)$ 的有限个小邻域覆盖这些点，其中 B 同时界住 f,g。把这些邻域的端点加入一个分割 P。在不含差异点的小区间上两函数相等；含差异点的小区间总长度可控制在所取邻域总长度的两倍以内，故上下和之差至多 $4B$ 乘以该总长度。结合 f 的可积性，振幅判据给出 g 可积。对共同细化的上下和，积分差的绝对值被同一长度估计压到任意小，故积分相同。 □

注 11.16. 下一章将在此积分定义上证明积分函数的连续性、微积分基本定理第一部分，并在导数连续或更弱条件下建立 Newton–Leibniz 公式。当前章节没有把积分写成原函数差值，也没有使用尚未证明的积分与极限交换。

12　微积分基本定理与 Newton–Leibniz 公式

上一章把 $\int_a^b f$ 定义为上下积分的共同值。本章证明积分与微分之间的两个方向：

1. 对连续函数 f，变上限积分
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
在内部可导，并且 $F'(x) = f(x)$；

2. 对具有连续导数的函数 G，
$$\int_a^b G'(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

第一条把连续函数变成它的一个原函数，第二条把定积分还原为端点差。证明中每次使用积分，都先回到上下和、保序性和误差估计，不把“积分等于原函数差”当作定义。

12.1　有向积分与区间拼接

定义 12.1 (有向积分)**.** 设 f 在每个相关闭区间上 Darboux 可积。定义
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$
若 $a < b$，则沿用上一章的积分；若 $a > b$，定义
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

引理 12.2 (积分的区间限制)**.** *若 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $a < c < b$，则 f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积。*

证明. 给定 $\varepsilon > 0$。由振幅判据，存在 $[a,b]$ 的分割 P，使
$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$
把 c 加入 P，得到细化分割 Q。由于细化只会减小上下和间隙，仍有
$$U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon.$$
写
$$Q = \{a = x_0 < \cdots < x_k = c = x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}.$$
把 Q 左半部分视为 $[a,c]$ 的分割 Q_1，右半部分视为 $[c,b]$ 的分割 Q_2。上下和逐项拆开：
$$U(f,Q) - L(f,Q) = \big(U(f,Q_1) - L(f,Q_1)\big) + \big(U(f,Q_2) - L(f,Q_2)\big).$$
两项都非负，因此各自都小于 ε。振幅判据分别说明 $f|_{[a,c]}$ 与 $f|_{[c,b]}$ 可积。 □

定理 12.3 (积分的区间可加性)**.** *若 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $a<c<b$，则*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

证明. 记三个积分分别为 A,A_1,A_2。先证明 $A\ge A_1+A_2$。任取 $[a,c]$ 的分割 P_1 和 $[c,b]$ 的分割 P_2，令 $P=P_1\cup P_2$。这里两个分割都包含 c，所以 P 是 $[a,b]$ 的分割，并且

$$L(f,P)=L(f,P_1)+L(f,P_2).$$

由下积分是所有下和的上确界，

$$A\ge L(f,P)=L(f,P_1)+L(f,P_2).$$

分别让 P_1,P_2 的下和逼近 A_1,A_2，得到

$$A\ge A_1+A_2.$$

再证明 $A\le A_1+A_2$。同样任取 P_1,P_2，有

$$U(f,P)=U(f,P_1)+U(f,P_2),$$

而 $A\le U(f,P)$。分别让两个上和逼近相应上积分，得到

$$A\le A_1+A_2.$$

两侧不等式合并即得等式。 □

推论 12.4 (有限区间拼接)**.** *若*

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$$

且 f 在 $[a,b]$ 可积，则

$$\int_a^b f=\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f.$$

证明. 对 m 归纳。$m=1$ 时是定义。若结论对 $m-1$ 成立，由区间可加性

$$\int_a^b f=\int_a^{x_{m-1}} f+\int_{x_{m-1}}^b f,$$

再对第一项使用归纳假设即可。 □

命题 12.5 (有向区间的可加性)**.** *若 f 在包含 a,b,c 的闭区间上可积，则*

$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f.$$

证明. 先设 $a\le b\le c$。若端点有相等，等式中对应积分为零；否则由定理 12.3 得结论。

若 $c\le b\le a$，把所有积分方向反转：

$$\int_a^b f+\int_b^c f=-\int_b^a f-\int_c^b f=-\int_c^a f=\int_a^c f.$$

剩下的排列例如 $a\le c\le b$。由前一种情形，

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f,$$

而 $\int_c^b f=-\int_b^c f$，移项即得 $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$。其余排列完全按同一有向符号逐项化为已经证明的情形。 □

12.2 积分的估计与变上限函数

引理 12.6 (积分的保序估计)**.** *若 f, g 在 $[a,b]$ 上可积且 $f \le g$，则*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

若 $|f| \le M$，则

$$\left| \int_a^b f \right| \le M(b-a).$$

证明. 第一式是上一章的保序性。由

$$-M \le f \le M$$

和保序性，

$$-M(b-a) = \int_a^b (-M) \le \int_a^b f \le \int_a^b M = M(b-a).$$

一个实数位于 $[-C, C]$ 中，当且仅当其绝对值不超过 C，故得到第二式。 □

定理 12.7 (变上限积分的 Lipschitz 估计)**.** *设 f 在 $[a,b]$ 上可积且 $|f(x)| \le M$。定义*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \le x \le b).$$

则对任意 $x, y \in [a,b]$，

$$|F(y) - F(x)| \le M|y - x|.$$

特别地，F 一致连续。

证明. 由有向区间可加性，

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f.$$

若 $x < y$，由引理

$$\left| \int_x^y f \right| \le M(y-x).$$

若 $x > y$，则

$$\int_x^y f = -\int_y^x f,$$

所以

$$\left| \int_x^y f \right| \le M(x-y).$$

两种情况合并得到所述估计。给定 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon/(M+1)$。当 $|x-y| < \delta$ 时，

$$|F(x) - F(y)| \le M|x-y| < \varepsilon.$$

□

推论 12.8 (变上限积分的连续性)**.** *在定理 12.7 的条件下，F 在 $[a,b]$ 上连续。*

证明. Lipschitz 估计直接给出一致连续性，而一致连续蕴含连续性。 □

12.3 微积分基本定理第一部分

定理 12.9 (局部平均值的误差控制)**.** 设 f 在 $x_0 \in (a,b)$ 连续。则

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(x_0).$$

这里 h 取值使 $x_0+h \in [a,b]$，且 $h \neq 0$。

证明. 由积分的保序估计，

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right| \le |h| \sup_{t \text{ 在} x_0 \text{ 与} x_0+h \text{ 之间}} |f(t)-f(x_0)|.$$

更直接地给出任意 $\varepsilon>0$ 的证明。连续性说明存在 $\delta>0$，使

$$|t-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

若 $0<|h|<\delta$，则从 x_0 到 x_0+h 的所有点都满足 $|t-x_0|<\delta$。因此

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\right| \le \varepsilon.$$

注意 $h<0$ 时积分方向和 h 同时变号，绝对值估计仍然成立。 □

定理 12.10 (微积分基本定理第一部分)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，并令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

则 F 在 (a,b) 可导，且

$$F'(x)=f(x) \qquad (a<x<b).$$

若 a,b 是定义域端点，则相应的单侧导数满足

$$F'_+(a)=f(a), \qquad F'_-(b)=f(b).$$

证明. 固定 $x\in(a,b)$。由有向区间可加性，

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

因此

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

局部平均值误差控制定理说明右侧当 $h\to 0$ 趋于 $f(x)$，故 $F'(x)=f(x)$。

在 a 处只能取 $h>0$，上面相同的计算给出

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt \to f(a).$$

在 b 处只能取 $h<0$，同样得到左导数等于 $f(b)$。 □

推论 12.11 (连续函数原函数的存在)**.** 每个闭区间上的连续函数都有原函数。更准确地，若 $f\in C([a,b])$，则

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

满足 $F'=f$。

证明. 这是微积分基本定理第一部分的直接应用。 □

12.4 原函数的唯一性与 Newton–Leibniz 公式

引理 12.12 (导数为零的函数为常值)**.** *设 H 在区间 I 上连续, 在内部可导, 并满足 $H'(x) = 0$。则 H 在 I 上为常值。*

证明. 任取 $u < v$ 属于 I。闭区间 $[u, v] \subseteq I$，所以 H 在其上连续、在 (u, v) 可导。由拉格朗日中值定理，存在 $c \in (u, v)$，使

$$H(v) - H(u) = H'(c)(v - u) = 0.$$

因此 $H(u) = H(v)$。任意两点函数值相等，故 H 为常值。 □

定理 12.13 (原函数的唯一性)**.** *若 F, G 在区间 I 上可导且*

$$F'(x) = G'(x) \qquad (x \in I^\circ),$$

则 $F - G$ 在 I 上为常值。

证明. 令 $H = F - G$。导数四则法则给出 $H' = F' - G' = 0$。应用引理 12.12 即得。 □

定理 12.14 (Newton–Leibniz 公式)**.** *设 G 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 可导，且 G' 在 $[a, b]$ 上连续。则*

$$\int_a^b G'(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

更一般地，对任意 $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x G'(t)\,dt = G(x) - G(a).$$

证明. 函数 G' 连续，因此由微积分基本定理第一部分,

$$H(x) = \int_a^x G'(t)\,dt$$

在 (a, b) 可导且 $H'(x) = G'(x)$。于是

$$(H - G)' = 0.$$

由零导数常值引理, 存在常数 C 使 $H(x) - G(x) = C$。在 $x = a$ 处, $H(a) = 0$, 故 $C = -G(a)$。于是

$$H(x) = G(x) - G(a).$$

令 $x = b$ 得第一式。 □

推论 12.15 (两个原函数的积分相同)**.** *若 $F' = f = G'$，且 F, G 在 $[a, b]$ 上连续、在内部可导，则*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

证明. 分别对 F 与 G 应用 Newton–Leibniz 公式即可。 □

12.5 积分中值定理与基本运算

引理 12.16 (Darboux 可积函数有界)**.** *若 h 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积，则 h 在 $[a,b]$ 上有界。*

证明. 由可积性的振幅判据，取一个分割 $P=\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}$，使

$$U(h,P)-L(h,P)<1.$$

上下和能够写出有限实数，意味着每个小区间 $I_j=[x_{j-1},x_j]$ 上的上确界与下确界都是有限的；特别地，任取 $x\in I_j$，都有

$$\inf_{I_j} h \le h(x) \le \sup_{I_j} h.$$

令

$$B=\max_{1\le j\le n}\max\{|\inf_{I_j}h|,|\sup_{I_j}h|\}.$$

这是有限个有限实数的最大值，且对所有 $x\in[a,b]$ 都有 $|h(x)|\le B$。 □

引理 12.17 (两个可积函数的乘积)**.** *若 f,g 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积，则 fg 也在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积。*

证明. 由上一个引理，存在 $B_f,B_g>0$，使 $|f(x)|\le B_f$、$|g(x)|\le B_g$。给定 $\varepsilon>0$，由振幅判据分别取分割 P_f,P_g，满足

$$\sum_{J\in P_f}\operatorname{osc}(f;J)|J|<\frac{\varepsilon}{2(B_g+1)},\qquad \sum_{J\in P_g}\operatorname{osc}(g;J)|J|<\frac{\varepsilon}{2(B_f+1)}.$$

取 $P=P_f\cup P_g$。细化不会增加振幅总和，因此对 P 仍有这两个估计。对 P 的任意小区间 J，任取 $x,y\in J$，有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\le |g(x)||f(x)-f(y)|+|f(y)||g(x)-g(y)|\\ &\le B_g\operatorname{osc}(f;J)+B_f\operatorname{osc}(g;J).\end{aligned}$$

对 x,y 取上确界，得到 $\operatorname{osc}(fg;J)\le B_g\operatorname{osc}(f;J)+B_f\operatorname{osc}(g;J)$。乘以 $|J|$ 后对全部小区间求和，得

$$U(fg,P)-L(fg,P)=\sum_{J\in P}\operatorname{osc}(fg;J)|J|<\frac{B_g\varepsilon}{2(B_g+1)}+\frac{B_f\varepsilon}{2(B_f+1)}<\varepsilon.$$

振幅判据遂给出 fg 可积。 □

定理 12.18 (积分中值定理)**.** *设 $f\in C([a,b])$。则存在 $c\in[a,b]$，使*

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a).$$

证明. 由极值定理，存在 m,M 使

$$m\le f(x)\le M\qquad (a\le x\le b),$$

其中 $m=\min f$、$M=\max f$。积分保序性给出

$$m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a).$$

若 $a=b$ 结论平凡；此处 $a<b$，除以 $b-a>0$ 得

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f\le M.$$

连续函数在区间上取得介于 m,M 之间的每个值，所以存在 c 使

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

乘以 $b-a$ 即得。 □

定理 12.19 (带权积分中值定理)**.** *设 $f\in C([a,b])$，g 在 $[a,b]$ 上可积且 $g\ge 0$。则存在 $c\in[a,b]$，使*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

证明. 连续函数 f 在紧区间上取得最小值和最大值。记

$$m=\min_{[a,b]}f,\qquad M=\max_{[a,b]}f.$$

于是对每个 $x\in[a,b]$，有 $m\le f(x)\le M$。又因 $g(x)\ge 0$，逐点相乘保持不等号：

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x).$$

由上一个乘积引理，fg 可积；常数倍 mg,Mg 可积，并且积分保序，故

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{12.1}$$

若 $\int_a^b g=0$，则 (12.1) 变为 $0\le\int_a^b fg\le 0$，从而积分等于 0。任取 $c\in[a,b]$，右端也是 $f(c)\cdot 0=0$，结论成立。

下面设 $G=\int_a^b g>0$。将 (12.1) 的三项同除以正数 G，得到

$$m\le\frac{1}{G}\int_a^b fg\le M. \tag{12.2}$$

连续函数 f 在区间 $[a,b]$ 上具有介值性，因此其值域恰为包含 m,M 的区间。由 (12.2)，存在 $c\in[a,b]$ 满足

$$f(c)=\frac{1}{G}\int_a^b fg.$$

乘以 G 即得所需等式。 □

12.6 分部积分与例子

定理 12.20 (分部积分公式)**.** *若 $u, v \in C^1([a,b])$，则*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

证明. 乘积 uv 在 $[a,b]$ 连续，在内部可导，且

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

由于 u', v' 连续，$u'v$ 与 uv' 连续，从而可积。对 $(uv)'$ 应用 Newton–Leibniz 公式：

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (u'v + uv').$$

用上一章的线性性拆开积分，再移项即得。 □

例 12.21 (多项式的积分)**.** 对整数 $n \geq 0$，令 $G(x) = x^{n+1}/(n+1)$。则 $G'(x) = x^n$，所以

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

这里公式不是把幂函数积分当作定义，而是由 Newton–Leibniz 公式和逐项求导得到。

例 12.22 (跳跃点处的边界)**.** 在 $[0,1]$ 上定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

它是单调函数，因而可积。其变上限积分为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ x - 1/2, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

于是 $F'(x) = f(x)$ 对 $x \neq 1/2$ 成立，但

$$F'_-(1/2) = 0, \qquad F'_+(1/2) = 1,$$

所以 F 在跳跃点不可导。这说明第一部分的连续性假设确实承担了任务。

注 12.23. 下一章将在积分基本定理基础上讨论换元、反常积分与参数依赖积分。当前章节只使用闭区间上的有界 Darboux 可积函数，尚未定义无穷区间积分或瑕积分。

13　换元、反常积分与参数积分

第十二章把闭区间上的积分与原函数联系起来。本章沿着三条方向继续推进。第一条是换元：把积分变量通过可微的单调映射重新参数化，并严格说明导数因子从何而来。第二条是反常积分：当区间无界或被积函数在端点附近无界时，用有限截断积分的极限定义积分，并建立 Cauchy 判别、比较判别、绝对收敛与条件收敛的区别。第三条是参数积分：当被积函数还依赖参数时，证明连续性、积分与无穷级数交换，以及在统一控制下的逐参数求导。

本章仍处于 Riemann–Darboux 框架。每一个反常积分都是有限区间积分的极限；每一个交换极限的结论都明确写出所需的统一估计。若只在单点逐点收敛而没有统一控制，结论一般不成立。

13.1　换元公式

定理 13.1 (连续函数的正向换元公式)**.** *设 $\phi \in C^1([\alpha,\beta])$，满足*

$$\phi(\alpha)=a,\qquad \phi(\beta)=b,\qquad \phi'(t)\geq 0\quad(\alpha\leq t\leq\beta),$$

且 ϕ 严格递增。若 $f\in C([a,b])$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

证明. 由微积分基本定理，函数

$$F(x)=\int_a^x f(u)\,du$$

在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，并且 $F'(x)=f(x)$。因为 $\phi\in C^1$，复合函数 $F\circ\phi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，在内部可导。链式法则给出

$$(F\circ\phi)'(t)=F'(\phi(t))\phi'(t)=f(\phi(t))\phi'(t).$$

右端是连续函数，因此可积。对 $F\circ\phi$ 应用 Newton–Leibniz 公式：

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt=(F\circ\phi)(\beta)-(F\circ\phi)(\alpha).$$

代入 $\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，得到

$$(F\circ\phi)(\beta)-(F\circ\phi)(\alpha)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(u)\,du.$$

这正是所需公式。注意证明没有把换元公式作为积分定义，而是从变上限积分和链式法则推出。 □

定理 13.2 (有向区间的统一换元公式)**.** *设 $\phi\in C^1([\alpha,\beta])$ 严格单调，f 在包含 $\phi([\alpha,\beta])$ 的闭区间上连续。则*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

证明. 令 $F(x)=\int_{\phi(\alpha)}^{x} f(u)\,du$。由微积分基本定理和链式法则，

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t))=f(\phi(t))\phi'(t).$$

两边在 $[\alpha,\beta]$ 上积分，并应用 Newton–Leibniz 公式：

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt=F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha)).$$

按 F 的定义，

$$F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha))=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx.$$

这就是结论。若 ϕ 递减，两端点次序和 $\phi'(t)\le 0$ 同时保留，符号因此自动正确。 □

推论 13.3 (常用换元模板)**.** *在定理 13.2 的条件下：*

1. *若 $x=\phi(t)$，则 $dx=\phi'(t)\,dt$，且端点同时变为 $x=\phi(\alpha),x=\phi(\beta)$；*
2. *若 $u=\lambda x+\mu$，其中 $\lambda\neq 0$，则*

$$\int_{a}^{b} f(\lambda x+\mu)\lambda\,dx=\int_{\lambda a+\mu}^{\lambda b+\mu} f(u)\,du;$$

3. *若 $p\in\mathbb{Q}$、$p\neq -1$ 且 $0<a<b$，则*

$$\int_{a}^{b} x^{p}\,dx=\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.$$

第二项的符号不由形式上的 $dx=du/\lambda$ 猜出，而由有向区间公式严格确定。

例 13.4 (三角换元的核对)**.** 设 $0<a<b<1$，令 $x=\sin t$，并选择 $t\in[\arcsin a,\arcsin b]\subset[-\pi/2,\pi/2]$。此时 $\phi'(t)=\cos t\ge 0$，故

$$\int_{a}^{b}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx=\int_{\arcsin a}^{\arcsin b} f(\sin t)\,dt.$$

平方根取正值是因为所选区间上 $\cos t\ge 0$，这一步不能省略。

13.2　反常积分的定义与基本判别

定义 13.5 (无穷区间反常积分)**.** 设 f 在 $[a,\infty)$ 的每个有限闭区间上 Darboux 可积。若极限

$$\lim_{R\to\infty}\int_{a}^{R} f(x)\,dx$$

存在且为有限实数 L，则称反常积分收敛，并定义

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx=L.$$

若极限不存在或不是有限实数，则称积分发散。

定义 13.6 (端点瑕积分)**.** 设 f 在 $(a,b]$ 上每个 $[a+\delta,b]$ 上可积。若

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

存在且有限，则定义

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

右端点的定义完全类似；若两个端点都可能瑕，则必须分别取两个独立极限，而不能只沿某一条联动路径取极限。

定理 13.7 (反常积分的 Cauchy 判别)**.** 设 f 在 $[a,\infty)$ 上如定义 *13.5*。则 $\int_a^\infty f$ 收敛，当且仅当

$$\forall\varepsilon>0\ \exists R_0>a\ \forall R_2>R_1>R_0,\qquad \left|\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

证明. 记 $F(R)=\int_a^R f$。由实数完备性，$F(R)$ 在 $R\to\infty$ 时有有限极限，当且仅当它满足 Cauchy 条件：

$$\forall\varepsilon>0\ \exists R_0\ \forall R_1,R_2>R_0,\quad |F(R_2)-F(R_1)|<\varepsilon.$$

若 $R_2>R_1$，由区间可加性

$$F(R_2)-F(R_1)=\int_{R_1}^{R_2} f.$$

于是得到题述条件。反向同样由这个等式把尾部积分条件转化为 F 的 Cauchy 条件，再由实数完备性得到 $F(R)$ 的有限极限。 □

定理 13.8 (非负函数的比较判别)**.** 设 $0\le f(x)\le g(x)$ 对所有充分大的 x 成立。若 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛，且

$$0\le\int_a^\infty f\le\int_a^\infty g.$$

证明. 取 A 使不等式在 $[A,\infty)$ 成立。对 $R>A$，有限区间上的保序性给出

$$0\le\int_A^R f\le\int_A^R g.$$

由于右端随 R 增大而单调增加且有上界 $\int_A^\infty g$，上确界原理给出 $\int_A^R g$ 有有限极限。由夹逼，$\int_A^R f$ 也有极限；加上有限段 $\int_a^A f$ 即得结论。最后令 $R\to\infty$ 保留不等式。 □

推论 13.9 (绝对收敛)**.** 若 $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ 收敛，则 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛，且

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right|\le\int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$

证明. 对每个有限 R，有

$$\left|\int_a^R f\right|\le\int_a^R |f|.$$

又因 $-|f|\le f\le|f|$，比较判别保证 $\int f$ 收敛。令 $R\to\infty$，有限区间估计的极限给出所需不等式。 □

13.3　有理幂函数的基础

定义 13.10 (正数的有理幂)**.** 设 $x>0$，$n\in\mathbb{N}$。正数 $x^{1/n}$ 定义为函数 $y\mapsto y^n$ 在 $(0,\infty)$ 上的逆函数值，即唯一满足 $(x^{1/n})^n=x$ 的正数。若 $m\in\mathbb{Z}$，定义

$$x^{m/n}=(x^{1/n})^m,$$

其中负整数次幂按倒数解释。

引理 13.11 (正数有理幂的导数)**.** *若 $r\in\mathbb{Q}$，则 $x\mapsto x^r$ 在 $(0,\infty)$ 可导，且*

$$\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}.$$

证明. 先取 $r=1/n$。函数 $g(y)=y^n$ 在 $(0,\infty)$ 上连续且严格递增，其导数 $g'(y)=ny^{n-1}$ 对每个 $y>0$ 非零。由一元逆函数导数定理，

$$\frac{d}{dx}x^{1/n}=\frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

若 $r=m/n$ 且 $m\geq 1$，由乘积法则对 $(x^{1/n})^m$ 求导：

$$\frac{d}{dx}x^{m/n}=m(x^{1/n})^{m-1}\frac{1}{n}x^{1/n-1}=\frac{m}{n}x^{m/n-1}.$$

$m=0$ 时导数为零。若 $m<0$，写 $x^{m/n}=1/x^{-m/n}$，由倒数求导公式得到同一结果。 □

推论 13.12 (有理幂的有限区间积分)**.** *若 $r\in\mathbb{Q}$、$r\neq -1$，且 $0<a<b$，则*

$$\int_a^b x^r\,dx=\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}.$$

证明. 由上一个引理，$G(x)=x^{r+1}/(r+1)$ 满足 $G'(x)=x^r$。Newton–Leibniz 公式立即给出结论。 □

定理 13.13 (有理幂函数判别)**.** *设 $p\in\mathbb{Q}$。在 $a>0$ 时，*

$$\int_a^{\infty}x^{-p}\,dx$$

当且仅当 $p>1$ 收敛；在 $b>0$ 时，

$$\int_0^b x^{-p}\,dx$$

的端点瑕积分当且仅当 $p<1$ 收敛。

证明. 先设 $p\neq 1$。有限截断计算为

$$\int_a^R x^{-p}\,dx=\frac{R^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}.$$

当 $R\to\infty$ 时，若 $p>1$，则 $R^{1-p}\to 0$，从而极限有限；若 $p<1$，则 $R^{1-p}\to+\infty$，积分发散。剩下 $p=1$ 的情形中，对每个整数 $k\geq 0$，

$$\int_{2^k a}^{2^{k+1}a}\frac{dx}{x}\geq\frac{2^{k+1}a-2^k a}{2^{k+1}a}=\frac{1}{2}.$$

因此截断积分的值随着 k 至少增加 $1/2$，不可能有有限极限。

对于零点附近，取 $\delta>0$，同样有

$$\int_{\delta}^{b} x^{-p}\,dx=\frac{b^{1-p}-\delta^{1-p}}{1-p}.$$

当 $\delta\downarrow 0$ 时，若 $p<1$，则 $\delta^{1-p}\to 0$，极限有限；若 $p>1$，则 $\delta^{1-p}\to+\infty$，积分发散。若 $p=1$，对每个整数 $k\ge 0$，

$$\int_{2^{-(k+1)}b}^{2^{-k}b}\frac{dx}{x}\ge\frac{2^{-k}b-2^{-(k+1)}b}{2^{-k}b}=\frac{1}{2},$$

故当 $\delta\downarrow 0$ 时截断积分无有限极限。 □

13.4 条件收敛与 Dirichlet 判别

定理 13.14 (反常积分的 Dirichlet 判别)**.** 设 g 在 $[a,\infty)$ 上连续，原函数

$$G(x)=\int_{a}^{x} g(t)\,dt$$

有界，即存在 $C>0$ 使 $|G(x)|\le C$。设 $h\in C^{1}([a,\infty))$，$h(x)\to 0$，且 h' 在充分大的区间上不变号并满足

$$\int_{A}^{\infty}|h'(x)|\,dx<\infty.$$

则 $\int_{a}^{\infty} g(x)h(x)\,dx$ 收敛。

证明. 先取 $R_2>R_1\ge A$。有限区间分部积分给出

$$\int_{R_1}^{R_2} g(x)h(x)\,dx=G(R_2)h(R_2)-G(R_1)h(R_1)-\int_{R_1}^{R_2}G(x)h'(x)\,dx.$$

因为 G 有界，

$$\left|\int_{R_1}^{R_2} gh\right|\le C|h(R_2)|+C|h(R_1)|+C\int_{R_1}^{R_2}|h'(x)|\,dx.$$

给定 $\varepsilon>0$，由 $h(x)\to 0$ 可取 R_0 使 $C|h(R)|<\varepsilon/3$ $(R>R_0)$；由 $|h'|$ 的可积性再取 R_0 使尾积分小于 $\varepsilon/(3C)$。于是 $R_2>R_1>R_0$ 时右端小于 ε。Cauchy 判别遂给出收敛。 □

例 13.15 (Dirichlet 判别的典型应用)**.** 积分

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

收敛但不绝对收敛。事实上取 $g(x)=\sin x$，则 $G(x)=\cos 1-\cos x$ 有界；取 $h(x)=1/x$，则 $h(x)\to 0$，且 $\int_1^\infty|h'(x)|dx=\int_1^\infty x^{-2}dx<\infty$。由定理 13.14 收敛。

为证明不绝对收敛，取

$$I_k=\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right].$$

在 I_k 上 $|\sin x|\ge 1/2$，故

$$\int_{I_k}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\ge\frac{1}{2}\int_{I_k}\frac{dx}{x}\ge\frac{1}{2}\frac{|I_k|}{5\pi/6+2k\pi}=\frac{\pi/3}{5\pi/6+2k\pi}.$$

存在常数 $c>0$，使右端对所有 $k\ge 0$ 都不小于 $c/(k+1)$；而调和级数发散，所以 $\int_1^\infty|\sin x|/x\,dx$ 发散。故绝对积分发散。

13.5　参数积分与一致控制

定理 13.16 (连续参数积分)**.** *设 f 在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续。定义*

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx.$$

则 F 在 $[c,d]$ 上连续，且实际上一致连续。

证明. 矩形是紧集，故 f 在其上一致连续。给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|t-s|<\delta$ 时，对所有 $x\in[a,b]$ 都有

$$|f(x,t)-f(x,s)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

(若 $a=b$，结论平凡)。有限区间积分的绝对值估计给出

$$|F(t)-F(s)|=\left|\int_a^b [f(x,t)-f(x,s)]\,dx\right|\le\int_a^b |f(x,t)-f(x,s)|\,dx<\varepsilon.$$

□

定理 13.17 (参数微分下的积分交换)**.** *设 f 与偏导数 $\partial_t f$ 在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续。定义*

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx.$$

则 F 在 (c,d) 可导，且

$$F'(t)=\int_a^b \partial_t f(x,t)\,dx.$$

端点处相应的单侧导数也成立。

证明. 固定 $t_0\in(c,d)$，取 $h\neq 0$ 使 $t_0+h\in[c,d]$。写出差商：

$$\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}=\int_a^b \frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\,dx.$$

对每个固定的 x，函数 $s\mapsto f(x,s)$ 在参数区间上连续可导。一元微分学的中值定理给出某个 θ_x 位于 t_0 与 t_0+h 之间，使

$$\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}=\partial_t f(x,\theta_x).$$

因为 $\partial_t f$ 在紧矩形上一致连续，给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $|s-t_0|<\delta$ 时对所有 x 都有

$$|\partial_t f(x,s)-\partial_t f(x,t_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

当 $0<|h|<\delta$ 时，θ_x 满足这一条件，因此

$$\left|\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}-\int_a^b \partial_t f(x,t_0)\,dx\right|\le\int_a^b |\partial_t f(x,\theta_x)-\partial_t f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon.$$

这正是 $F'(t_0)=\int_a^b \partial_t f(x,t_0)\,dx$。端点单侧导数使用同一估计，只限制 h 的符号。 □

推论 13.18 (高阶参数微分)**.** *若 f 对参数 t 具有直到 k 阶连续偏导数，且这些偏导数在矩形上连续，则*

$$\frac{d^j}{dt^j}\int_a^b f(x,t)\,dx=\int_a^b \partial_t^j f(x,t)\,dx,\qquad 1\le j\le k.$$

证明. 对 $j=1$ 是定理 13.17。假设结论对 j 成立，则函数 $\partial_t^j f$ 与其参数偏导 $\partial_t^{j+1}f$ 仍满足同一定理的连续性条件，再应用一次即可。有限次归纳完成证明。 □

13.6 一致收敛下的积分与级数交换

定理 13.19 (一致收敛保持积分极限)**.** 设 $f_n \in C([a,b])$，且 $f_n \to f$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。则 f 连续，并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

证明. 连续性由上一册第八章的一致极限定理得到。给定 $\varepsilon > 0$，取 N 使 $n \ge N$ 时

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

($a = b$ 时结论直接成立)。于是

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f_n - f| \le (b-a)\sup|f_n - f| < \varepsilon.$$

故积分序列收敛到 $\int_a^b f$。 □

定理 13.20 (一致收敛函数级数的逐项积分)**.** 设每个 $u_n \in C([a,b])$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，其和记为 u。则

$$\int_a^b u(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

证明. 令部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$。一致收敛意味着 $S_N \to u$ 一致。有限线性性给出

$$\int_a^b S_N = \sum_{n=1}^{N} \int_a^b u_n.$$

由定理 13.19，左端趋于 $\int_a^b u$。因此右端的部分和收敛到同一极限，这正是所述级数等式。 □

定理 13.21 (Weierstrass 判别下的积分交换)**.** 若 $u_n \in C([a,b])$，存在非负数列 M_n 使

$$|u_n(x)| \le M_n \quad (a \le x \le b), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty,$$

则

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

证明. 由 Weierstrass M 判别，$\sum u_n$ 一致收敛；再应用定理 13.20。此外

$$\left| \int_a^b u_n \right| \le \int_a^b |u_n| \le (b-a)M_n,$$

所以右侧数项级数绝对收敛。 □

例 13.22 (几何级数的积分)**.** 当 $0 < |r| < 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} (rx)^n$ 在 $[-q,q]$ 上对任意 $q < 1/|r|$ 一致收敛。由逐项积分，

$$\int_0^{q} \frac{1}{1-rx}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n q^{n+1}}{n+1}.$$

这里先限制在闭区间上，确保一致收敛；不能直接把无穷区间上的逐点收敛当作交换依据。

14　有限维空间中的微分学基础

前十三章主要在实直线上工作。本章把距离、极限、连续性与微分推广到有限维空间，并且始终区分三个层次：

1. 坐标方向上的变化，即偏导数；
2. 沿任意直线方向的变化，即方向导数；
3. 对所有小增量同时给出线性主部的统一近似，即 Fréchet 可微。

第三个层次才是坐标无关的微分概念。存在全部偏导数并不自动保证可微；本章将给出反例，并证明偏导数在邻域连续时为何足以推出可微。所有极限均以欧氏范数为距离，所有 $o(\|h\|)$ 都明确写出量词含义。

14.1　欧氏空间与范数

定义 14.1 ($\mathbb{R}^n$)**.** 固定正整数 n。集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$$

按坐标定义加法和数乘：

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

记 e_j 为第 j 个坐标为 1、其余坐标为 0 的向量。

定义 14.2 (欧氏范数与距离)**.** 对 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}, \qquad d(x, y) = \|x - y\|_2.$$

闭球与开球分别为

$$\overline{B}(a, r) = \{x : \|x - a\|_2 \le r\}, \qquad B(a, r) = \{x : \|x - a\|_2 < r\}.$$

引理 14.3 (Cauchy–Schwarz 不等式)**.** 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，有

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \le \|x\|_2 \|y\|_2.$$

证明. 对任意 $t \in \mathbb{R}$，平方和非负：

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} (t x_j - y_j)^2 = t^2 \sum x_j^2 - 2t \sum x_j y_j + \sum y_j^2.$$

记 $A=\sum x_j^2$、$B=\sum x_j y_j$、$C=\sum y_j^2$。若 $A=0$，则每个 $x_j=0$，结论成立。若 $A>0$，上式作为 t 的二次多项式对所有实数 t 非负，因此其判别式不大于零：

$$(-2B)^2-4AC\le 0.$$

于是 $B^2\le AC=\|x\|_2^2\|y\|_2^2$。两边均非负，开平方即得结论。 □

定理 14.4 (三角不等式)**.** *对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$，*

$$\|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2.$$

证明. 由内积记号 $\langle x,y\rangle=\sum x_j y_j$，有

$$\|x+y\|_2^2=\|x\|_2^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|_2^2.$$

由引理 14.3，$\langle x,y\rangle\le|\langle x,y\rangle|\le\|x\|_2\|y\|_2$。故

$$\|x+y\|_2^2\le(\|x\|_2+\|y\|_2)^2.$$

两边非负，开平方得到结论。 □

命题 14.5 (范数的基本性质)**.** *对 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，有*

$$\|x\|_2\ge 0,\quad \|x\|_2=0\Longleftrightarrow x=0,\quad \|\lambda x\|_2=|\lambda|\|x\|_2,$$

以及三角不等式。特别地，d 是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量。

证明. 平方和的每一项非负，所以范数非负。若范数为零，则每项 $x_j^2=0$，从而 $x_j=0$ 对所有 j 成立；反向显然由定义得到。数乘性质由

$$\|\lambda x\|_2^2=\sum(\lambda x_j)^2=\lambda^2\sum x_j^2$$

并开平方得到。对距离的非负性、对称性和分离性分别使用范数的前三条性质；三角不等式为

$$d(x,z)=\|(x-y)+(y-z)\|_2\le d(x,y)+d(y,z).$$

□

命题 14.6 (有限维范数比较)**.** *定义 $\|x\|_\infty=\max_{1\le j\le n}|x_j|$。则*

$$\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

证明. 对任意 j，有 $x_j^2\le\sum_k x_k^2$，故 $|x_j|\le\|x\|_2$。对 j 取最大值得第一式。另一方面，每一项 $|x_j|\le\|x\|_\infty$，所以

$$\|x\|_2^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2\le\sum_{j=1}^{n}\|x\|_\infty^2=n\|x\|_\infty^2.$$

开平方得第二式。 □

14.2 向量列、极限与完备性

定义 14.7 (向量列的收敛)**.** 向量列 $(x^{(k)})$ 收敛到 $a \in \mathbb{R}^n$，是指

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K\ \forall k \geq K, \qquad \|x^{(k)} - a\|_2 < \varepsilon.$$

定理 14.8 (坐标收敛判据)**.** 设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$，$a = (a_1, \dots, a_n)$。则

$$x^{(k)} \to a(\text{欧氏范数}) \iff x_j^{(k)} \to a_j \text{ 对每个} j.$$

证明. 若向量收敛，由命题 14.6，

$$|x_j^{(k)} - a_j| \leq \|x^{(k)} - a\|_2 \to 0,$$

故每个坐标收敛。

反向设每个坐标收敛。给定 $\varepsilon > 0$，对每个 j，取 K_j 使 $k \geq K_j$ 时

$$|x_j^{(k)} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

令 $K = \max_j K_j$。当 $k \geq K$ 时，

$$\|x^{(k)} - a\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - a_j|^2 < n\frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2.$$

开平方得到 $\|x^{(k)} - a\|_2 < \varepsilon$。 □

定义 14.9 (Cauchy 向量列)**.** 向量列 $(x^{(k)})$ 称为 Cauchy 列，是指

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K\ \forall p, q \geq K, \qquad \|x^{(p)} - x^{(q)}\|_2 < \varepsilon.$$

定理 14.10 ($\mathbb{R}^n$ 的完备性)**.** 每个 *Cauchy* 向量列都在 $\mathbb{R}^n$ 中收敛。

证明. 设 $(x^{(k)})$ 为 Cauchy 列，写 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$。由

$$|x_j^{(p)} - x_j^{(q)}| \leq \|x^{(p)} - x^{(q)}\|_2,$$

每个坐标列 $(x_j^{(k)})$ 都是实数 Cauchy 列。实数完备性给出 $x_j^{(k)} \to a_j \in \mathbb{R}$。令 $a = (a_1, \dots, a_n)$，则由定理 14.8，$x^{(k)} \to a$。 □

定理 14.11 (向量列的极限唯一性)**.** 若 $x^{(k)} \to a$ 且 $x^{(k)} \to b$，则 $a = b$。

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，分别取 K_1, K_2，使

$$k \geq K_1 \Rightarrow \|x^{(k)} - a\|_2 < \varepsilon/2, \qquad k \geq K_2 \Rightarrow \|x^{(k)} - b\|_2 < \varepsilon/2.$$

取 $k \geq \max\{K_1, K_2\}$。三角不等式给出

$$\|a - b\|_2 \leq \|a - x^{(k)}\|_2 + \|x^{(k)} - b\|_2 < \varepsilon.$$

由于这对任意 $\varepsilon > 0$ 成立，只能有 $\|a - b\|_2 = 0$，故 $a = b$。 □

14.3 多元函数的连续性与极限

定义 14.12 (多元函数的极限)**.** 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$，a 是 D 的聚点，$f:D\to\mathbb{R}^m$。称

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

若

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D,\quad 0<\|x-a\|_2<\delta\Rightarrow\|f(x)-L\|_2<\varepsilon.$$

定义 14.13 (连续性)**.** 若 $a\in D$，称 $f:D\to\mathbb{R}^m$ 在 a 连续，是指

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D,\quad \|x-a\|_2<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(a)\|_2<\varepsilon.$$

定理 14.14 (多元极限的序列判据)**.** 设 a 是 D 的聚点。则

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

当且仅当对每个 D 中满足 $x^{(k)}\neq a$ 且 $x^{(k)}\to a$ 的序列，都有 $f(x^{(k)})\to L$。

证明. 先设 ε-δ 极限成立。给定 $\varepsilon>0$，取相应 $\delta>0$。由 $x^{(k)}\to a$，存在 K 使 $k\geq K$ 时 $\|x^{(k)}-a\|_2<\delta$。因 $x^{(k)}\neq a$，极限定义给出 $\|f(x^{(k)})-L\|_2<\varepsilon$，故函数值列收敛。

反向用反证。若极限不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$，使对每个 $r>0$，都能找到 $x_r\in D$ 满足

$$0<\|x_r-a\|_2<r,\qquad \|f(x_r)-L\|_2\geq\varepsilon_0.$$

对 $r=1/k$ 选择 $x^{(k)}=x_{1/k}$。于是 $x^{(k)}\to a$，但 $f(x^{(k)})$ 不趋于 L，矛盾。 □

定理 14.15 (连续函数的代数运算)**.** 若 $f,g:D\to\mathbb{R}$ 在 $a\in D$ 连续，则 $f+g$、fg 连续；若 $g(a)\neq0$，则 f/g 在 a 连续。若 $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ 在 $f(a)$ 连续，则 $F\circ f$ 在 a 连续。

证明. 由连续性，$f(x)\to f(a)$、$g(x)\to g(a)$。加法的结论由三角不等式：

$$|(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))|\leq|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|.$$

对乘积作分解：

$$f(x)g(x)-f(a)g(a)=g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a)).$$

连续性先给出 $g(x)$ 在 a 的某邻域内有界，再由两项分别趋于零得到乘积连续。若 $g(a)\neq0$，连续性给出邻域内 $|g(x)|\geq|g(a)|/2$，再写

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{g(x)g(a)}$$

即可得到商连续。复合函数由 $x\to a\Rightarrow f(x)\to f(a)\Rightarrow F(f(x))\to F(f(a))$ 得到。 □

14.4 偏导数、方向导数与 Fréchet 导数

定义 14.16 (偏导数)**.** 设 $f : D \to \mathbb{R}$，a 是 D 的内点。若极限存在，则定义

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}.$$

这里要求当 t 足够小时 $a + te_j \in D$。

定义 14.17 (方向导数)**.** 设 $v \in \mathbb{R}^n$。若极限存在，则定义

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

当 $\|v\|_2 = 1$ 时称 v 为单位方向。

定义 14.18 (Fréchet 可微)**.** 设 $f : D \to \mathbb{R}^m$，a 是 D 的内点。称 f 在 a Fréchet 可微，若存在线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 与函数 $r(h)$，使

$$f(a + h) - f(a) = Ah + r(h)$$

且

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|r(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0.$$

此时记 $Df(a) = A$。等价地，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使 $0 < \|h\|_2 < \delta$ 时

$$\|f(a + h) - f(a) - Ah\|_2 \le \varepsilon \|h\|_2.$$

引理 14.19 (线性映射的范数估计)**.** *任意线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 都存在 $C \ge 0$，使*

$$\|Ah\|_2 \le C\|h\|_2 \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

证明. 写 $h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$。令 $C = \left(\sum_{j=1}^n \|Ae_j\|_2^2\right)^{1/2}$。由三角不等式和 Cauchy–Schwarz 不等式，

$$\|Ah\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^n h_j Ae_j \right\|_2 \le \sum_{j=1}^n |h_j| \|Ae_j\|_2 \le \left(\sum h_j^2\right)^{1/2} \left(\sum \|Ae_j\|_2^2\right)^{1/2} = C\|h\|_2.$$

□

定理 14.20 (可微蕴含连续)**.** *若 f 在 a Fréchet 可微，则 f 在 a 连续。*

证明. 取 $A = Df(a)$。由定义，存在 $\delta_1 > 0$，使 $0 < \|h\|_2 < \delta_1$ 时

$$\|f(a + h) - f(a) - Ah\|_2 \le \|h\|_2.$$

由引理 14.19，存在 C 使 $\|Ah\|_2 \le C\|h\|_2$。因此

$$\|f(a + h) - f(a)\|_2 \le (C + 1)\|h\|_2 \to 0.$$

$h = 0$ 时等式本身成立，故连续性得到。 □

定理 14.21 (Fréchet 导数的唯一性)**.** *若线性映射 A, B 都满足*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(\|h\|_2) = Bh + o(\|h\|_2),$$

则 $A = B$。

证明. 令 $R(h) = f(a+h) - f(a) - Ah$、$S(h) = f(a+h) - f(a) - Bh$。则

$$(A-B)h = S(h) - R(h),$$

从而

$$\frac{\|(A-B)h\|_2}{\|h\|_2} \le \frac{\|S(h)\|_2}{\|h\|_2} + \frac{\|R(h)\|_2}{\|h\|_2} \to 0.$$

若存在 v 使 $(A-B)v \neq 0$，取 $h = tv$，$t \neq 0$，则左侧恒为 $\|(A-B)v\|_2/\|v\|_2 > 0$，与趋于零矛盾。因此 $(A-B)v = 0$ 对所有 v 成立，即 $A = B$。 □

定理 14.22 (可微函数的偏导与方向导数)**.** *若 f 在 a 可微，$A = Df(a)$，则对任意 $v \in \mathbb{R}^n$，方向导数存在且*

$$D_v f(a) = Av.$$

特别地，

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = Ae_j.$$

证明. 令 $h = tv$。可微展开为

$$f(a+tv) - f(a) = tAv + r(tv), \qquad \frac{\|r(tv)\|_2}{|t|\|v\|_2} \to 0$$

($v = 0$ 时结论直接成立)。除以 t：

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = Av + \frac{r(tv)}{t}.$$

第二项的范数不超过 $\|v\|_2 \cdot \|r(tv)\|_2/(|t|\|v\|_2)$，趋于零，故极限为 Av。取 $v = e_j$ 即得偏导公式。 □

14.5 连续偏导推出可微

定理 14.23 (连续偏导的可微性判据)**.** *设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，$f : U \to \mathbb{R}$。若每个偏导 $\partial_j f$ 在 $a \in U$ 的某个邻域内存在并且在 a 连续，则 f 在 a Fréchet 可微，且*

$$Df(a)h = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) h_j.$$

证明. 因为 U 开，存在 $\rho > 0$，使闭球 $\overline{B}(a,\rho) \subset U$。令 h 足够小，使 $\|h\|_2 < \rho/\sqrt{n}$。定义中间点

$$z^{(0)} = a, \qquad z^{(j)} = (a_1 + h_1, \dots, a_j + h_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

则

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(f(z^{(j)}) - f(z^{(j-1)}) \big).$$

固定 j，只改变第 j 个坐标。由一元拉格朗日中值定理，存在 θ_j 位于 a_j 与 a_j+h_j 之间，使

$$f(z^{(j)})-f(z^{(j-1)})=\partial_j f(\xi^{(j)})h_j,$$

其中 $\xi^{(j)}$ 的其他坐标与 $z^{(j-1)}$ 相同。于是

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}\partial_j f(a)h_j=\sum_{j=1}^{n}\big(\partial_j f(\xi^{(j)})-\partial_j f(a)\big)h_j.$$

给定 $\varepsilon>0$，由每个 $\partial_j f$ 在 a 连续，存在 $\delta>0$，使 $\|y-a\|_2<\delta$ 时

$$|\partial_j f(y)-\partial_j f(a)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\quad(1\le j\le n).$$

当 $\|h\|_2$ 足够小时，所有 $\xi^{(j)}$ 都满足 $\|\xi^{(j)}-a\|_2\le\|h\|_2<\delta$。因此

$$\left|f(a+h)-f(a)-\sum_{j}\partial_j f(a)h_j\right|\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{j}|h_j|\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\,\|h\|_2=\varepsilon\|h\|_2.$$

这正是 Fréchet 可微的误差定义。 □

例 14.24 (偏导存在但不可微)**.** 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2mm] 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

沿 x-轴和 y-轴，商恒为零，因此

$$\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=0.$$

但是沿直线 $y=x$，有 $f(t,t)=1/2$ $(t\neq0)$，所以 $f(t,t)\not\to f(0,0)$。函数甚至不连续，因而不可能 Fréchet 可微。这说明“所有偏导存在”缺少对不同方向同时控制的条件。

14.6 链式法则

定理 14.25 (Fréchet 链式法则)**.** *设 $g:V\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ 在 $b\in V$ 可微，设 $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 $a=g(b)$ 可微，并且 $g(V)\subseteq U$。则 $f\circ g$ 在 b 可微，且*

$$D(f\circ g)(b)=Df(a)\circ Dg(b).$$

证明. 记 $B=Dg(b)$、$A=Df(a)$。由可微性，存在余项 $r_g(k)$、$r_f(h)$，满足

$$g(b+k)-g(b)=Bk+r_g(k),\qquad\frac{\|r_g(k)\|_2}{\|k\|_2}\to0,$$

$$f(a+h)-f(a)=Ah+r_f(h),\qquad\frac{\|r_f(h)\|_2}{\|h\|_2}\to0.$$

令 $h=g(b+k)-g(b)=Bk+r_g(k)$。则

$$(f\circ g)(b+k)-(f\circ g)(b)=A(Bk+r_g(k))+r_f(h).$$

减去 ABk 后，余项为

$$R(k) = Ar_g(k) + r_f(h).$$

由线性映射估计，$\|Ar_g(k)\|_2 \le C_A\|r_g(k)\|_2 = o(\|k\|_2)$。又

$$\|h\|_2 \le \|Bk\|_2 + \|r_g(k)\|_2 = O(\|k\|_2).$$

若 $h = 0$，则 $r_f(h) = 0$；若 $h \neq 0$，

$$\frac{\|r_f(h)\|_2}{\|k\|_2} = \frac{\|r_f(h)\|_2}{\|h\|_2}\,\frac{\|h\|_2}{\|k\|_2} \to 0.$$

因此 $R(k) = o(\|k\|_2)$，导数为 AB。 □

推论 14.26 (Jacobian 矩阵)**.** *若 $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在 a 可微，则其导数在标准基下的矩阵为*

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}.$$

证明. 由定理 14.22，第 j 列 $Df(a)e_j$ 等于向量函数各分量沿 e_j 的偏导组成的列向量，即

$$Df(a)e_j = (\partial_j f_1(a), \dots, \partial_j f_m(a))^{\mathsf{T}}.$$

线性映射由其在标准基上的取值唯一决定，故矩阵正是所写 Jacobian。 □

例 14.27 (二次函数的全微分)**.** 令 $f(x, y) = x^2 + y^2$。两个偏导在全平面连续，因此由定理 14.23，f 可微，且

$$Df(x, y)(h, k) = 2xh + 2yk.$$

在点 (x, y) 的线性主部是 $2x\,h + 2y\,k$，剩余项为 $h^2 + k^2$，满足

$$\frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0.$$

这直接展示了可微定义中的 $o(\|(h, k)\|_2)$。

14.7 有限维空间的线性映射与坐标刻画

定义 14.28 (线性映射范数)**.** 对线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，定义

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2.$$

由引理 14.19，单位球面上的函数值有统一上界，所以这个上确界是有限实数。

命题 14.29 (算子范数的基本性质)**.** *对线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$、$B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$，有*

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2, \qquad \|BA\|_{\mathrm{op}} \le \|B\|_{\mathrm{op}}\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

此外 $\|I_{\mathbb{R}^n}\|_{\mathrm{op}} = 1$。

证明. 若 $x=0$，第一式显然成立。若 $x\neq 0$，令 $u=x/\|x\|_2$，则 $\|u\|_2=1$，由上确界定义

$$\|Ax\|_2=\|x\|_2\|Au\|_2\le \|x\|_2\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

对任意 x 应用两次这个估计：

$$\|BAx\|_2\le \|B\|_{\mathrm{op}}\|Ax\|_2\le \|B\|_{\mathrm{op}}\|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2.$$

取所有 $\|x\|_2=1$ 的上确值得第二式。恒等映射满足 $\|Ix\|_2=\|x\|_2=1$（当 $\|x\|_2=1$），故其上确界为 1。 □

定理 14.30 (向量值函数的坐标连续性)**.** *设 $f=(f_1,\dots,f_m):D\to\mathbb{R}^m$。则 f 在 $a\in D$ 连续，当且仅当每个标量函数 f_i 在 a 连续。*

证明. 若 f 连续，则

$$|f_i(x)-f_i(a)|\le \|f(x)-f(a)\|_2\to 0,$$

所以每个分量连续。

反向设每个分量连续。给定 $\varepsilon>0$，对每个 i 取 $\delta_i>0$，使 $\|x-a\|_2<\delta_i$ 时

$$|f_i(x)-f_i(a)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

令 $\delta=\min_i \delta_i$。则

$$\|f(x)-f(a)\|_2^2=\sum_{i=1}^m |f_i(x)-f_i(a)|^2<m\frac{\varepsilon^2}{m}=\varepsilon^2.$$

开平方得 f 连续。 □

推论 14.31 (向量值函数的连续偏导判据)**.** *设 $f=(f_1,\dots,f_m):U\to\mathbb{R}^m$，其中 U 为开集。若每个 $\partial_j f_i$ 在 a 的邻域内存在且在 a 连续，则 f 在 a 可微，且导数矩阵为*

$$Df(a)=\left(\partial_j f_i(a)\right)_{i,j}.$$

证明. 由定理 14.23，每个 f_i 在 a 可微，其余项可写为

$$f_i(a+h)-f_i(a)-\sum_{j=1}^n \partial_j f_i(a)h_j=r_i(h),\qquad \frac{|r_i(h)|}{\|h\|_2}\to 0.$$

令 $r(h)=(r_1(h),\dots,r_m(h))$。对任意 $\eta>0$，分别取 δ_i 使 $|r_i(h)|\le \eta\|h\|_2/\sqrt{m}$；取最小的 δ_i 后，

$$\frac{\|r(h)\|_2}{\|h\|_2}\le \left(\sum_{i=1}^m \frac{\eta^2}{m}\right)^{1/2}=\eta.$$

因此 $r(h)=o(\|h\|_2)$，而线性主部的矩阵正是所写 Jacobian。 □

14.8 有限维空间中的紧性与一致连续

定义 14.32 (序列紧性)**.** 集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为序列紧，若 K 中每个序列都存在一个收敛到 K 中某点的子列。

定理 14.33 (有界序列的收敛子列)**.** *若 $(x^{(k)})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界序列，则它存在收敛子列。*

证明. 写 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$。由于序列有界，每个坐标序列 $(x_j^{(k)})$ 都是有界实数列。实数的 Bolzano–Weierstrass 定理给出 $(x_1^{(k)})$ 的收敛子列，记其指标为 $k_1(r)$。

在这个子列中，第二坐标仍是有界实数列，再取一个子列，使第二坐标收敛；继续进行，得到嵌套的指标列

$$k_1(r) \supset k_2(r) \supset \cdots \supset k_n(r),$$

其中第 j 个坐标在第 j 次选择后收敛。取最终子列 $y^{(r)} = x^{(k_n(r))}$。对于固定的 j，从第 j 步开始，j 坐标的收敛性质保留在之后的子列中，因此 $y_j^{(r)}$ 对每个 j 都收敛。由坐标收敛判据，$y^{(r)}$ 在欧氏范数下收敛。 □

定理 14.34 (闭有界集的序列紧性)**.** *若 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 闭且有界，则 K 序列紧。*

证明. 任取 K 中序列 $(x^{(k)})$。它作为 $\mathbb{R}^n$ 中的序列有界，由定理 14.33 存在子列 $x^{(k_r)} \to x \in \mathbb{R}^n$。因为 K 闭，闭集的序列刻画给出 $x \in K$。所以每个 K 中序列都有收敛到 K 的子列。 □

定理 14.35 (序列紧集上的一致连续性)**.** *设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 序列紧，$f : K \to \mathbb{R}^m$ 连续。则 f 在 K 上一致连续。*

证明. 反设 f 不一致连续。则存在 $\varepsilon_0 > 0$，对每个 $r \in \mathbb{N}$ 都能找到 $x_r, y_r \in K$，使

$$\|x_r - y_r\|_2 < \frac{1}{r}, \qquad \|f(x_r) - f(y_r)\|_2 \geq \varepsilon_0.$$

由序列紧性，(x_r) 存在子列 $x_{r_\ell} \to x \in K$。因为

$$\|y_{r_\ell} - x\|_2 \leq \|y_{r_\ell} - x_{r_\ell}\|_2 + \|x_{r_\ell} - x\|_2 \to 0,$$

所以 $y_{r_\ell} \to x$。连续性给出

$$f(x_{r_\ell}) \to f(x), \qquad f(y_{r_\ell}) \to f(x).$$

于是两函数值之差趋于零，与其范数始终至少为 ε_0 矛盾。 □

14.9 方向导数与 Fréchet 可微性的差别

例 14.36 (方向导数存在但不产生线性微分)**.** 定义 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$：

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

先看连续性。对 $(x,y) \neq (0,0)$，有

$$|f(x,y)| = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

因此 $f(x,y)\to 0=f(0,0)$。

再取任意非零方向 $v=(v_1,v_2)$。当 $t\neq 0$ 时，

$$f(tv)=\frac{t^3v_1^3}{t^2(v_1^2+v_2^2)}=t\,\frac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2},$$

故方向导数存在且

$$D_vf(0,0)=\frac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2}.$$

这个关于 v 的函数不是线性的：取 $e_1=(1,0)$、$e_2=(0,1)$，有

$$D_{e_1}f(0,0)=1,\qquad D_{e_2}f(0,0)=0,$$

但

$$D_{e_1+e_2}f(0,0)=\frac{1}{2}\neq 1=D_{e_1}f(0,0)+D_{e_2}f(0,0).$$

若 f 在原点 Fréchet 可微，定理 14.22 会迫使 $v\mapsto D_vf(0,0)$ 等于某个线性映射，矛盾。因此连续且所有方向导数存在仍不足以推出可微。

15 多元函数的极值与 Taylor 公式

第十四章建立了 Fréchet 导数。本章研究一个更具体、也更细致的问题：导数如何控制局部极值。仅有一阶导数为零只是必要条件；要得到充分条件，必须把二阶余项写出来，并对 Hessian 的二次型给出统一估计。为此，先补齐有限维线性映射与紧性工具，再证明多元 Fermat 定理、二阶 Taylor 公式、高阶 Taylor 公式以及 Hessian 判别法。

15.1 算子范数与向量值函数的坐标刻画

定义 15.1 (线性映射的算子范数)**.** 对线性映射 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，定义

$$\|A\|_{\mathrm{op}}=\sup_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2.$$

由引理 14.19，单位球面上的函数值有统一上界，所以这个上确界是有限实数。

命题 15.2 (算子范数的基本性质)**.** *设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$、$B:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ 为线性映射，则*

$$\|Ax\|_2\le\|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2,\qquad \|BA\|_{\mathrm{op}}\le\|B\|_{\mathrm{op}}\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

此外 $\|I_{\mathbb{R}^n}\|_{\mathrm{op}}=1$。

证明. 若 $x=0$，第一式显然成立。若 $x\neq0$，令 $u=x/\|x\|_2$，则 $\|u\|_2=1$，由上确界定义

$$\|Ax\|_2=\|x\|_2\|Au\|_2\le\|x\|_2\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

对任意 x 连续应用这个估计：

$$\|BAx\|_2\le\|B\|_{\mathrm{op}}\|Ax\|_2\le\|B\|_{\mathrm{op}}\|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2.$$

当 $\|x\|_2=1$ 时取上确值得第二式。恒等映射满足 $\|I_{\mathbb{R}^n}x\|_2=1$ 对每个单位向量 x 成立，故其上确界为 1。 □

定理 15.3 (向量值函数的坐标连续性)**.** *设 $f=(f_1,\dots,f_m):D\to\mathbb{R}^m$。则 f 在 $a\in D$ 连续，当且仅当每个标量函数 f_i 在 a 连续。*

证明. 若 f 连续，则

$$|f_i(x)-f_i(a)|\le\|f(x)-f(a)\|_2\to0,$$

所以每个分量连续。

反向设每个分量连续。给定 $\varepsilon>0$，对每个 i 取 $\delta_i>0$，使 $\|x-a\|_2<\delta_i$ 时

$$|f_i(x)-f_i(a)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

令 $\delta=\min_i\delta_i$。则当 $\|x-a\|_2<\delta$ 时，

$$\|f(x)-f(a)\|_2^2=\sum_{i=1}^m|f_i(x)-f_i(a)|^2<m\frac{\varepsilon^2}{m}=\varepsilon^2.$$

开平方得到 f 在 a 连续。 □

推论 15.4 (向量值函数的连续偏导判据)**.** 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，$f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$。若每个 $\partial_j f_i$ 在 a 的某个邻域内存在且在 a 连续，则 f 在 a 可微，且导数矩阵为

$$Df(a) = \big(\partial_j f_i(a)\big)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}.$$

证明. 由定理 14.23，每个 f_i 在 a 可微，所以存在余项 $r_i(h)$，满足

$$f_i(a+h) - f_i(a) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(a) h_j = r_i(h), \qquad \frac{|r_i(h)|}{\|h\|_2} \longrightarrow 0.$$

令 $r(h) = (r_1(h), \dots, r_m(h))$。给定 $\eta > 0$，对每个 i 取 $\delta_i > 0$，使 $0 < \|h\|_2 < \delta_i$ 时

$$|r_i(h)| \le \frac{\eta}{\sqrt{m}} \|h\|_2.$$

取 $\delta = \min_i \delta_i$，则

$$\frac{\|r(h)\|_2}{\|h\|_2} \le \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\eta^2}{m} \right)^{1/2} = \eta.$$

由于 η 任意，$r(h) = o(\|h\|_2)$，而其线性主部的矩阵正是所写矩阵。 □

15.2 有限维空间的紧性与一致连续性

定义 15.5 (序列紧性)**.** 集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为序列紧，若 K 中每个序列都存在一个收敛到 K 中某点的子列。

定理 15.6 (有界序列的收敛子列)**.** 若 $(x^{(k)})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界序列，则它存在收敛子列。

证明. 写 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$。由于序列有界，每个坐标序列 $(x_j^{(k)})$ 都是有界实数列。由一维 Bolzano–Weierstrass 定理，第一坐标存在收敛子列，记其指标为 $k_1(r)$。

在这个子列中，第二坐标仍是有界实数列，再取一个子列，使第二坐标收敛。继续进行，得到嵌套的指标列

$$k_1(r) \supset k_2(r) \supset \cdots \supset k_n(r),$$

其中第 j 个坐标在第 j 次选择后收敛。取最终子列 $y^{(r)} = x^{(k_n(r))}$。对于固定的 j，从第 j 步开始的每个后续子列仍保留第 j 个坐标的收敛性，因此 $y_j^{(r)}$ 对每个 j 都收敛。由定理 14.8，$y^{(r)}$ 在欧氏范数下收敛。 □

定理 15.7 (闭有界集的序列紧性)**.** 若 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 闭且有界，则 K 序列紧。

证明. 任取 K 中序列 $(x^{(k)})$。它作为 $\mathbb{R}^n$ 中的序列有界，由定理 15.6 存在子列 $x^{(k_r)} \to x \in \mathbb{R}^n$。闭集的序列刻画给出 $x \in K$，所以每个 K 中序列都有收敛到 K 的子列。 □

定理 15.8 (序列紧集上的一致连续性)**.** 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 序列紧，$f : K \to \mathbb{R}^m$ 连续。则 f 在 K 上一致连续。

证明. 反设 f 不一致连续。则存在 $\varepsilon_0 > 0$，对每个 $r \in \mathbb{N}$ 都能找到 $x_r, y_r \in K$，使

$$\|x_r - y_r\|_2 < \frac{1}{r}, \qquad \|f(x_r) - f(y_r)\|_2 \ge \varepsilon_0.$$

由序列紧性，(x_r) 存在子列 $x_{r_\ell} \to x \in K$。于是

$$\|y_{r_\ell} - x\|_2 \le \|y_{r_\ell} - x_{r_\ell}\|_2 + \|x_{r_\ell} - x\|_2 \longrightarrow 0.$$

故 $y_{r_\ell} \to x$。连续性给出

$$f(x_{r_\ell}) \to f(x), \qquad f(y_{r_\ell}) \to f(x),$$

从而

$$\|f(x_{r_\ell}) - f(y_{r_\ell})\|_2 \to 0,$$

与其始终不小于 ε_0 矛盾。 □

15.3 多元函数的局部极值

定义 15.9 (局部极值与严格局部极值)**.** 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，$f : U \to \mathbb{R}$，$a \in U$。若存在 $r > 0$，使

$$f(x) \ge f(a) \qquad (x \in B(a, r)),$$

则称 a 是局部极小点；若 $x \ne a$ 时不等式严格，则称为严格局部极小点。局部极大点和严格局部极大点的定义把不等号方向反过来。

定理 15.10 (多元 Fermat 必要条件)**.** *设 $f : U \to \mathbb{R}$ 在 $a \in U$ 可微。若 a 是局部极小点或局部极大点，则*

$$Df(a) = 0.$$

等价地，所有偏导数都为零。

证明. 先设 a 为局部极小点。对任意 $v \in \mathbb{R}^n$，由于 U 开，存在 $\rho > 0$ 使 $B(a, \rho) \subset U$。当 $|t| < \rho / \|v\|_2$ 且 $v \ne 0$ 时，$a + tv \in B(a, \rho)$，于是

$$f(a + tv) - f(a) \ge 0.$$

函数 $\varphi_v(t) = f(a + tv)$ 在 0 可导，并且 $t = 0$ 是其一元局部极小点。一元 Fermat 定理分别考察 $t > 0$ 和 $t < 0$ 的差商，得到 $\varphi_v'(0) = 0$。另一方面，定理 14.22 给出

$$\varphi_v'(0) = D_v f(a) = Df(a)v.$$

因此 $Df(a)v = 0$ 对每个 v 成立，取 $v = e_j$ 即得 $Df(a) = 0$。局部极大点对 $-f$ 应用同一论证。 □

推论 15.11 (梯度的必要条件)**.** *若 f 在 a 可微，记*

$$\nabla f(a) = \left(\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)\right).$$

若 a 是局部极值点，则 $\nabla f(a) = 0$。

证明. 由定理 15.10，$Df(a)e_j = \partial_j f(a) = 0$ 对每个 j 成立。 □

15.4 二阶导数与 Hessian 矩阵

定义 15.12 (二阶偏导与 Hessian 矩阵)**.** 设 $f:U\to\mathbb{R}$，U 为开集。若所有二阶偏导 $\partial_i\partial_j f(a)$ 存在，定义

$$H_f(a)=\big(\partial_i\partial_j f(a)\big)_{1\le i,j\le n}.$$

对 $h\in\mathbb{R}^n$，写

$$h^{\mathsf T}H_f(a)h=\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i\partial_j f(a)h_ih_j.$$

引理 15.13 (混合偏导的对称性)**.** 设 f 在点 a 的某个矩形邻域内具有连续的二阶混合偏导 $\partial_i\partial_j f$ 与 $\partial_j\partial_i f$。则

$$\partial_i\partial_j f(a)=\partial_j\partial_i f(a).$$

证明. 只写两个变量 x_i,x_j，其余坐标固定在 a 的值。令

$$\Delta(h,k)=f(a+he_i+ke_j)-f(a+he_i)-f(a+ke_j)+f(a).$$

先沿 x_i 方向应用一元微积分基本定理，再沿 x_j 方向应用一次，得到

$$\Delta(h,k)=\int_0^h\int_0^k \partial_j\partial_i f(a+se_i+te_j)\,dt\,ds. \tag{15.1}$$

交换两个坐标的次序，同样得到

$$\Delta(h,k)=\int_0^k\int_0^h \partial_i\partial_j f(a+se_i+te_j)\,ds\,dt. \tag{15.2}$$

这里 h,k 可以为负数；有向积分定义保证公式的符号不变。令 $h,k\to 0$，并分别除以 hk。连续性说明 (15.1) 的商趋于 $\partial_j\partial_i f(a)$，(15.2) 的商趋于 $\partial_i\partial_j f(a)$。两式左端相同，故两个极限相等。 □

引理 15.14 (一元二阶 Taylor 公式的积分余项)**.** 设 $\varphi\in C^2([0,1])$，则

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\int_0^1(1-t)\varphi''(t)\,dt.$$

证明. 由分部积分公式，对 $u(t)=1-t$、$v'(t)=\varphi''(t)$，有

$$\int_0^1(1-t)\varphi''(t)\,dt=\big[(1-t)\varphi'(t)\big]_0^1+\int_0^1\varphi'(t)\,dt.$$

右端等于

$$-\varphi'(0)+\varphi(1)-\varphi(0),$$

移项即得结论。 □

定理 15.15 (多元二阶 Taylor 公式)**.** 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集，$f\in C^2(U)$，且线段

$$[a,a+h]=\{a+th:0\le t\le 1\}\subset U.$$

则

$$f(a+h)=f(a)+Df(a)h+\int_0^1(1-t)\,h^{\mathsf T}H_f(a+th)h\,dt. \tag{15.3}$$

证明. 定义一元函数 $\varphi(t) = f(a + th)$。链式法则给出

$$\varphi'(t) = Df(a + th)h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a + th) h_i.$$

对右端逐项求导。因为 $f \in C^2(U)$，每个二阶偏导连续，故

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(a + th) h_i h_j = h^{\mathsf{T}} H_f(a + th) h.$$

将一元引理 15.14 应用于 φ，并注意 $\varphi(0) = f(a)$、$\varphi(1) = f(a + h)$、$\varphi'(0) = Df(a)h$，即得 (15.3)。 □

推论 15.16 (二阶 Peano 形式)**.** *在定理 15.15 的条件下，当 $h \to 0$ 时，*

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2} h^{\mathsf{T}} H_f(a) h + o(\|h\|_2^2).$$

证明. 将积分中的 Hessian 拆成 $H_f(a)$ 与 $H_f(a + th) - H_f(a)$。第一部分给出

$$\int_0^1 (1 - t)\, dt\; h^{\mathsf{T}} H_f(a) h = \frac{1}{2} h^{\mathsf{T}} H_f(a) h.$$

由于 H_f 在 a 连续，存在 $\rho(h) \to 0$，使

$$\|H_f(a + th) - H_f(a)\|_{\max} \le \rho(h) \qquad (0 \le t \le 1),$$

其中 $\|M\|_{\max} = \max_{i,j} |M_{ij}|$。于是

$$\left| h^{\mathsf{T}} (H_f(a + th) - H_f(a)) h \right| \le \rho(h) \left(\sum_{i} |h_i| \right)^2 \le n \rho(h) \|h\|_2^2.$$

乘以 $\int_0^1 (1 - t) dt = 1/2$，所得误差除以 $\|h\|_2^2$ 不超过 $n\rho(h)/2 \to 0$。 □

15.5 二阶极值判别

引理 15.17 (一元极小点的二阶必要条件)**.** *设 $\varphi \in C^2$ 在 0 的某个邻域内，且 0 为局部极小点。则*

$$\varphi'(0) = 0, \qquad \varphi''(0) \ge 0.$$

局部极大点对应 $\varphi''(0) \le 0$。

证明. 一元 Fermat 定理给出 $\varphi'(0) = 0$。对任意足够小的非零 t，把函数 $\psi_t(u) = \varphi(tu)$ 定义在 $0 \le u \le 1$ 上。由局部极小性，$\varphi(t) - \varphi(0) \ge 0$。对 ψ_t 应用一元二阶 Taylor 公式的积分余项，得到

$$\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0) = t^2 \int_0^1 (1 - u) \varphi''(tu)\, du.$$

除以 t^2，并使用 φ'' 在 0 连续，右端趋于 $\varphi''(0) \int_0^1 (1 - u)\, du = \varphi''(0)/2$。左端由于 $\varphi'(0) = 0$ 且分子非负，始终不小于零，因此 $\varphi''(0) \ge 0$。局部极大点对 $-\varphi$ 应用相同论证。 □

定理 15.18 (Hessian 半正定的必要性)**.** *设 $f \in C^2(U)$，$a \in U$ 是局部极小点。则*

$$Df(a) = 0, \qquad h^{\mathsf{T}} H_f(a) h \geq 0 \quad (h \in \mathbb{R}^n).$$

局部极大点时二次型非正。

证明. 梯度条件由定理 15.10 给出。固定任意 $h \in \mathbb{R}^n$，定义 $\varphi(t) = f(a+th)$。对足够小的 $|t|$，$a+th \in U$，且 $t=0$ 是 φ 的局部极小点。由上一个引理，$\varphi''(0) \geq 0$。链式法则和 Hessian 的定义给出

$$\varphi''(0) = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j f(a) h_i h_j = h^{\mathsf{T}} H_f(a) h.$$

因 h 任意，结论成立。 □

定义 15.19 (正定与半正定)**.** 对实对称矩阵 H，若

$$v^{\mathsf{T}} H v > 0 \quad (v \neq 0),$$

称 H 正定；若 $v^{\mathsf{T}} H v \geq 0$ 对所有 v 成立，称 H 半正定。负定、半负定把不等号方向反过来。

引理 15.20 (正定矩阵的统一下界)**.** *若实对称矩阵 H 正定，则存在 $\lambda > 0$，使*

$$v^{\mathsf{T}} H v \geq \lambda \|v\|_2^2 \qquad (v \in \mathbb{R}^n).$$

证明. 考虑单位球面 $S^{n-1} = \{v : \|v\|_2 = 1\}$。它闭且有界，因此序列紧。函数 $q(v) = v^{\mathsf{T}} H v$ 连续。由紧集上的极值定理，q 在球面上取得最小值 λ。正定性说明每个单位向量的 $q(v) > 0$，因此 $\lambda > 0$。对任意 $v \neq 0$，令 $u = v/\|v\|_2$，则

$$v^{\mathsf{T}} H v = \|v\|_2^2 u^{\mathsf{T}} H u \geq \lambda \|v\|_2^2.$$

$v = 0$ 时等式成立。 □

定理 15.21 (Hessian 正定的充分性)**.** *设 $f \in C^2(U)$，$a \in U$，且*

$$Df(a) = 0, \qquad H_f(a) \text{ 正定}.$$

则 a 是严格局部极小点。若 Hessian 负定，则 a 是严格局部极大点。

证明. 由引理 15.20，存在 $\lambda > 0$，使

$$h^{\mathsf{T}} H_f(a) h \geq \lambda \|h\|_2^2.$$

取 $\eta = \lambda/(2n)$。由 Hessian 各项在 a 连续，存在 $\delta > 0$，使 $\|x-a\|_2 < \delta$ 时

$$\max_{i,j} |H_f(x)_{ij} - H_f(a)_{ij}| < \eta.$$

于是对任意 h 满足 $\|h\|_2 < \delta$ 和 $0 \leq t \leq 1$，

$$\begin{aligned} \left| h^{\mathsf{T}} (H_f(a+th) - H_f(a)) h \right| &\leq \eta \left(\sum_i |h_i| \right)^2 \\ &\leq n\eta \|h\|_2^2 = \frac{\lambda}{2} \|h\|_2^2. \end{aligned}$$

因此

$$h^{\mathsf{T}} H_f(a+th)h \geq \frac{\lambda}{2}\|h\|_2^2.$$

由二阶 Taylor 公式和 $Df(a)=0$,

$$f(a+h)-f(a) \geq \int_0^1 (1-t)\frac{\lambda}{2}\|h\|_2^2\,dt = \frac{\lambda}{4}\|h\|_2^2 > 0$$

当 $h\neq 0$ 时成立，故 a 为严格局部极小点。负定情形对 $-f$ 应用同一证明。 □

定理 15.22 (不定 Hessian 给出鞍点)**.** *设 $f\in C^2(U)$、$Df(a)=0$。若存在 $u,v\in\mathbb{R}^n$ 使*

$$u^{\mathsf{T}} H_f(a)u > 0, \qquad v^{\mathsf{T}} H_f(a)v < 0,$$

则 a 既不是局部极小点，也不是局部极大点。

证明. 由二阶 Peano 公式,

$$f(a+th)-f(a) = \frac{t^2}{2}h^{\mathsf{T}} H_f(a)h + o(t^2)$$

对固定的 h 成立。取 $h=u$, 设 $c_u = u^{\mathsf{T}} H_f(a)u > 0$。由余项定义, 存在 $t_u>0$, 使 $0<|t|<t_u$ 时

$$|o(t^2)| < \frac{c_u}{4}t^2.$$

于是

$$f(a+tu)-f(a) > \frac{c_u}{4}t^2 > 0.$$

同理，取 $h=v$，存在足够小的非零 t 使

$$f(a+tv)-f(a) < \frac{1}{4}v^{\mathsf{T}} H_f(a)v\,t^2 < 0.$$

任意邻域中同时存在函数值大于和小于 $f(a)$ 的点，所以 a 不是局部极值点。 □

例 15.23 (二阶判别法失效的退化点)**.**

1. $f(x)=x^4$ 在 0 有严格局部极小值，但 $f'(0)=f''(0)=0$;
2. $f(x,y)=x^2-y^4$ 在原点的 Hessian 为 $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, 它半正定, 但沿 $x=0$ 取值为 $-y^4<0$, 沿 $y=0$ 取值为 $x^2>0$，所以原点是鞍点;
3. $f(x,y)=x^2+y^4$ 在原点的 Hessian 同样半正定，但原点是严格局部极小点。
   因此半正定只能给出必要条件，不能单独给出极值结论。

15.6 高阶 Taylor 公式与多重指标

定义 15.24 (多重指标)**.** 令 $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$。对 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$，定义

$$|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!,$$

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}, \qquad D^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n} f.$$

若 $|\alpha|=r$，则多项式恒等式给出

$$\left(\sum_{j=1}^n z_j\right)^r = \sum_{|\alpha|=r}\frac{r!}{\alpha!}z^\alpha.$$

引理 15.25 (直线限制的高阶导数)**.** *设 f 在包含线段 $[a, a+h]$ 的开集上具有连续的 r 阶偏导。令 $\varphi(t) = f(a+th)$。则对 $0 \le q \le r$,*

$$\varphi^{(q)}(t) = \sum_{|\alpha|=q} \frac{q!}{\alpha!} D^\alpha f(a+th) h^\alpha.$$

证明. $q = 0$ 时是定义。假设公式对 q 成立。对每一项应用链式法则:

$$\frac{d}{dt}\left(D^\alpha f(a+th)\right) = \sum_{j=1}^{n} D^{\alpha+e_j} f(a+th) h_j.$$

因此

$$\varphi^{(q+1)}(t) = \sum_{|\alpha|=q} \frac{q!}{\alpha!} \sum_{j=1}^{n} D^{\alpha+e_j} f(a+th) h^\alpha h_j.$$

固定 β 满足 $|\beta| = q+1$。它从上式中出现 β_j 次，每次对应 $\alpha = \beta - e_j$，且

$$\frac{q!}{(\beta - e_j)!} = \frac{q!}{\beta!}\beta_j.$$

所以 $D^\beta f(a+th) h^\beta$ 的总系数为

$$\frac{q!}{\beta!} \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \frac{(q+1)!}{\beta!}.$$

对所有 β 求和即得归纳式。 □

定理 15.26 (多元高阶 Taylor 公式)**.** *设 $k \ge 0$，f 在包含线段 $[a, a+h]$ 的开集上具有连续的 $k+1$ 阶偏导。则*

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha + R_{k+1}(a,h),$$

其中

$$R_{k+1}(a,h) = \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} D^\alpha f(a+th) h^\alpha \, dt.$$

证明. 对 $\varphi(t) = f(a+th)$ 应用一元 Taylor 公式的积分余项:

$$\varphi(1) = \sum_{q=0}^{k} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k \varphi^{(k+1)}(t)\, dt.$$

由引理 15.25,

$$\frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} = \sum_{|\alpha|=q} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha.$$

把 $q = 0, \dots, k$ 的和合并，并将同一引理用于 $\varphi^{(k+1)}(t)$，便得到所写公式。 □

推论 15.27 (高阶余项的统一估计)**.** *在定理 15.26 的条件下，若在线段上*

$$|D^\alpha f(x)| \le M \qquad (|\alpha| = k+1),$$

则

$$|R_{k+1}(a,h)| \le \frac{M}{(k+1)!}\left(\sum_{j=1}^{n} |h_j|\right)^{k+1} \le \frac{M n^{(k+1)/2}}{(k+1)!}\|h\|_2^{k+1}.$$

证明. 将余项公式取绝对值，并使用 $\int_0^1 (1-t)^k dt = 1/(k+1)$，得到

$$|R_{k+1}| \le \frac{M}{(k+1)!} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} |h^\alpha| = M \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{|h^\alpha|}{\alpha!} = \frac{M}{(k+1)!} \left(\sum_{j} |h_j| \right)^{k+1}.$$

最后由 Cauchy–Schwarz 不等式，

$$\sum_{j} |h_j| \le \sqrt{n}\, \|h\|_2.$$

代入即得第二个估计。 □

例 15.28 (二次型的极值与 Taylor 展开)**.** 设

$$f(x,y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2.$$

其梯度为 $\nabla f = (6x+4y, 4x+6y)$，所以原点是临界点。Hessian 为

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

对任意 $(u,v) \neq (0,0)$，

$$(u,v) H (u,v)^{\mathsf{T}} = 6u^2 + 8uv + 6v^2 = 2(u+v)^2 + 4(u^2+v^2) > 0.$$

故 Hessian 正定，原点为严格局部极小点。事实上这里函数本身就是二次多项式，Taylor 公式没有三阶余项，并且

$$f(h,k) = \frac{1}{2} (h,k) H (h,k)^{\mathsf{T}}$$

精确成立。

16 逆函数定理与隐函数定理

第十五章的 Taylor 展开把局部非线性函数分解为线性主部与高阶余项。本章研究何时可以把这个局部线性化真正反解。核心困难是：$Df(a)$ 可逆只说明一个点上的线性映射可逆，还必须把邻域内的非线性误差统一压小，才能得到一个定义在邻域上的逆函数。

为此，先在 $\mathbb{R}^n$ 中证明压缩映射不动点定理，再建立可逆线性映射的稳定性。逆函数定理的证明将明确给出邻域半径、压缩常数、迭代收敛和导数余项。隐函数定理则通过一个块三角映射严格推出，而不把它作为独立黑箱。

16.1 压缩映射不动点定理

定义 16.1 (压缩映射)**.** 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空。映射 $T : X \to X$ 称为压缩映射，若存在 $q \in [0, 1)$，使

$$\|T(x) - T(y)\|_2 \le q\|x - y\|_2 \qquad (x, y \in X).$$

定理 16.2 (Banach 压缩映射定理)**.** *设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空且闭，$T : X \to X$ 是压缩映射。则存在唯一 $x^* \in X$，使*

$$T(x^*) = x^*.$$

此外，对任意初始点 $x_0 \in X$，迭代列

$$x_{k+1} = T(x_k)$$

都收敛到 x^*，并满足

$$\|x^* - x_k\|_2 \le \frac{q^k}{1 - q}\|x_1 - x_0\|_2.$$

证明. 先证明迭代列是 Cauchy 列。由压缩性质，

$$\|x_{k+1} - x_k\|_2 = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\|_2 \le q\|x_k - x_{k-1}\|_2.$$

归纳得到

$$\|x_{k+1} - x_k\|_2 \le q^k\|x_1 - x_0\|_2. \tag{16.1}$$

若 $m > n$，由三角不等式和 (16.1)，

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\|_2 &\le \sum_{j=n}^{m-1} \|x_{j+1} - x_j\|_2 \\ &\le \|x_1 - x_0\|_2 \sum_{j=n}^{m-1} q^j \\ &\le \frac{q^n}{1 - q}\|x_1 - x_0\|_2.\end{aligned}$$

由于 $0 \le q < 1$，右端随 $n \to \infty$ 趋于零。因此 (x_k) 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列。由 $\mathbb{R}^n$ 的完备性，存在 $x^* \in \mathbb{R}^n$，使 $x_k \to x^*$。每个 $x_k \in X$，而 X 闭，所以 $x^* \in X$。

压缩映射是 Lipschitz 连续的，故

$$\|T(x_k) - T(x^*)\|_2 \le q\|x_k - x^*\|_2 \to 0.$$

另一方面 $T(x_k) = x_{k+1} \to x^*$，由极限唯一性得到 $T(x^*) = x^*$。

最后证明唯一性。若 $u, v \in X$ 都是不动点，则

$$\|u - v\|_2 = \|T(u) - T(v)\|_2 \le q\|u - v\|_2.$$

移项得到 $(1-q)\|u-v\|_2 \le 0$。因 $1-q>0$ 且范数非负，只能有 $\|u-v\|_2 = 0$，即 $u = v$。

令 $m \to \infty$ 于上面的尾和估计，得到

$$\|x^* - x_n\|_2 \le \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|_2.$$

□

推论 16.3 (参数压缩方程的唯一解)**.** *设 $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 闭，且对每个参数 z 属于某个集合 Z，映射 $T_z : Y \to Y$ 满足同一个压缩常数 $q < 1$。则每个方程*

$$x = T_z(x)$$

在 Y 中有唯一解。若此外

$$\|T_z(x) - T_w(x)\|_2 \le C\|z - w\|_2$$

对所有 $x \in Y$ 成立，则解 $x(z)$ 满足

$$\|x(z) - x(w)\|_2 \le \frac{C}{1-q}\|z - w\|_2.$$

证明. 第一部分逐个固定 z 应用定理 16.2。设 $x(z) = T_z(x(z))$、$x(w) = T_w(x(w))$，则

$$\begin{aligned}\|x(z) - x(w)\|_2 &\le \|T_z(x(z)) - T_z(x(w))\|_2 \\ &\quad + \|T_z(x(w)) - T_w(x(w))\|_2 \\ &\le q\|x(z) - x(w)\|_2 + C\|z - w\|_2.\end{aligned}$$

移项并除以 $1-q>0$，得到结论。 □

16.2 可逆线性映射的稳定性

引理 16.4 (Neumann 级数与线性可逆性)**.** *设 $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 线性，且 $\|E\|_{\mathrm{op}} < 1$。则 $I - E$ 可逆，并且*

$$(I-E)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} E^k, \qquad \|(I-E)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le \frac{1}{1 - \|E\|_{\mathrm{op}}}.$$

证明. 记 $q = \|E\|_{\mathrm{op}} < 1$。由算子范数的次乘性，

$$\|E^k\|_{\mathrm{op}} \le q^k.$$

对部分和 $S_N = \sum_{k=0}^{N} E^k$，若 $M > N$，则

$$\|S_M - S_N\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{k=N+1}^{M} q^k \le \frac{q^{N+1}}{1-q} \to 0.$$

线性映射空间可通过矩阵的 n^2 个坐标识别为 $\mathbb{R}^{n^2}$，因此也是完备的。存在线性映射 S，使 $S_N \to S$。

有限几何恒等式给出

$$(I-E)S_N = S_N(I-E) = I - E^{N+1}.$$

由于 $\|E^{N+1}\|_{\mathrm{op}} \le q^{N+1} \to 0$，令 $N \to \infty$，得到

$$(I-E)S = S(I-E) = I.$$

所以 $S = (I-E)^{-1}$。此外

$$\|S\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{k=0}^{\infty} \|E^k\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

□

引理 16.5 (可逆矩阵的邻近稳定性)**.** *设 A 可逆。若线性映射 B 满足*

$$\|A^{-1}(B-A)\|_{\mathrm{op}} < 1,$$

则 B 可逆，且

$$B^{-1} = \big(I + A^{-1}(B-A)\big)^{-1} A^{-1}.$$

若 $B_k \to A$，则 $B_k^{-1} \to A^{-1}$。

证明. 写

$$B = A + AA^{-1}(B-A) = A\big(I + A^{-1}(B-A)\big).$$

括号中的线性映射由引理 16.4 可逆，故 B 是两个可逆映射的复合，且逆映射公式正是所写等式。

若 $B_k \to A$，则

$$\|A^{-1}(B_k - A)\|_{\mathrm{op}} \to 0.$$

充分大的 k 满足上面的严格小于 1 条件。令 $E_k = A^{-1}(B_k - A)$，由 Neumann 级数估计，

$$\|B_k^{-1} - A^{-1}\|_{\mathrm{op}} = \|(I+E_k)^{-1}A^{-1} - A^{-1}\|_{\mathrm{op}} \to 0,$$

因为

$$(I+E_k)^{-1} - I = -(I+E_k)^{-1}E_k$$

且 $\|(I+E_k)^{-1}\|_{\mathrm{op}}$ 在充分大的 k 上有统一上界。 □

16.3 逆函数定理

定理 16.6 (有限维逆函数定理)**.** 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，$F : U \to \mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射。若 $a \in U$ 且 $DF(a)$ 可逆，则存在 a 的开邻域 W 和 $F(a)$ 的开邻域 V，使得

$$F|_W : W \to V$$

是双射，其逆映射 $H : V \to W$ 为 C^1，并满足

$$DH(y) = DF(H(y))^{-1}.$$

证明. 记 $A = DF(a)$，$M = \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}$。取固定的 $q \in (0,1)$，例如 $q = 1/2$。由于 DF 在 a 连续，存在 $r > 0$，使闭球 $\overline{B}(a,r) \subset U$，并且

$$\|A^{-1}(DF(x) - A)\|_{\mathrm{op}} \le q \qquad (x \in \overline{B}(a,r)). \tag{16.1}$$

缩小 r 不会破坏这个条件。

先证明局部存在性。对 $y \in \mathbb{R}^n$，定义

$$T_y(x) = x - A^{-1}(F(x) - y), \qquad x \in \overline{B}(a,r).$$

若 $x, z \in \overline{B}(a,r)$ 且 $F(x) = F(z) = y$，则 $T_y(x) = x, T_y(z) = z$，由压缩映射不动点唯一性得 $x = z$。定义

$$W = B(a,r) \cap F^{-1}(V).$$

因为 F 连续且 V、$B(a,r)$ 都是开集，W 是包含 a 的开集。对任意 $x \in W$，令 $y = F(x) \in V$。此时 x 是 T_y 在闭球中的不动点，所以 $x = H(y)$。反过来，对每个 $y \in V$，前面构造的 $H(y)$ 满足 $H(y) \in B(a,r)$ 且 $F(H(y)) = y$，故 $H(y) \in W$。因此 $F|_W : W \to V$ 是双射，H 是其逆映射。由

$$H(y) - H(z) = T_y(H(y)) - T_z(H(z))$$

以及 (16.2)，可得

$$\|H(y) - H(z)\|_2 \le q\|H(y) - H(z)\|_2 + M\|y - z\|_2,$$

从而

$$\|H(y) - H(z)\|_2 \le \frac{M}{1-q}\|y - z\|_2. \tag{16.4}$$

故 H 连续。

下面证明 H 可微。固定 $y \in V$，令 $x = H(y)$。由 (16.1)，

$$E_x = I - A^{-1}DF(x)$$

满足 $\|E_x\|_{\mathrm{op}} \le q < 1$。由引理 16.4，$A^{-1}DF(x) = I - E_x$ 可逆，所以 $DF(x)$ 可逆。记 $B = DF(x)$。

取 k 足够小使 $y + k \in V$，并令

$$h = H(y+k) - H(y).$$

由 (16.4)，$\|h\|_2 \le M(1-q)^{-1}\|k\|_2$，所以 $h \to 0$ 当 $k \to 0$。在 x 处使用 Fréchet 可微定义：

$$F(x+h) - F(x) = Bh + r(h), \qquad \frac{\|r(h)\|_2}{\|h\|_2} \to 0.$$

左端等于 k，故

$$h = B^{-1}k - B^{-1}r(h).$$

令

$$R(k) = -B^{-1}r(h).$$

由上面的 Lipschitz 估计和 B^{-1} 的固定有界性，

$$\frac{\|R(k)\|_2}{\|k\|_2} \le \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}} \frac{\|r(h)\|_2}{\|h\|_2} \frac{\|h\|_2}{\|k\|_2} \longrightarrow 0.$$

因此 H 在 y 可微，且

$$DH(y) = B^{-1} = DF(H(y))^{-1}. \tag{16.5}$$

最后，H 连续，DF 连续，而引理 16.5 说明可逆矩阵取逆是连续的，所以 $y \mapsto DF(H(y))^{-1}$ 连续。由 (16.5)，$H \in C^1(V)$。 □

16.4 隐函数定理

定理 16.7 (隐函数定理)**.** *设 $U \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 为开集，$G : U \to \mathbb{R}^q$ 为 C^1。设 $(a,b) \in U$，并假设*

$$G(a,b) = c, \qquad D_y G(a,b) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$$

可逆。则存在 a 的开邻域 P、b 的开邻域 Q，以及唯一的 C^1 映射 $g : P \to Q$，使

$$g(a) = b, \qquad G(x, g(x)) = c \quad (x \in P).$$

并且

$$Dg(x) = -\big[D_y G(x,g(x))\big]^{-1} D_x G(x,g(x)). \tag{16.6}$$

证明. 定义

$$\Phi(x,y) = (x, G(x,y))$$

作为从 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 到自身的映射。其导数在 (a,b) 为块矩阵

$$D\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ D_x G(a,b) & D_y G(a,b) \end{pmatrix}.$$

因为 $D_y G(a,b)$ 可逆，该块矩阵可逆；直接相乘可验证其逆为

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -[D_y G(a,b)]^{-1} D_x G(a,b) & [D_y G(a,b)]^{-1} \end{pmatrix}.$$

逆函数定理给出 Φ 在 (a,b) 附近的 C^1 逆映射 Ψ。取足够小的邻域 P 和 c 的邻域，使 (x,c) 对每个 $x \in P$ 都属于 Ψ 的定义域。令

$$g(x) = \mathrm{pr}_2\, \Psi(x,c),$$

其中 pr_2 表示取第二个分量。由于 Ψ 为 C^1，g 为 C^1，且 $g(a)=b$。

由 $\Phi(\Psi(x,c))=(x,c)$，第二个分量给出

$$G(x,g(x))=c.$$

若 $y\in Q$ 也满足 $G(x,y)=c$，则 $\Phi(x,y)=(x,c)=\Phi(x,g(x))$。在 Φ 的局部单射邻域内，必有 $y=g(x)$，故解唯一。

对恒等式 $G(x,g(x))=c$ 应用链式法则：

$$D_xG(x,g(x))+D_yG(x,g(x))Dg(x)=0.$$

由连续性和 $D_yG(a,b)$ 可逆性，缩小 P 后 $D_yG(x,g(x))$ 对每个 $x\in P$ 都可逆。左乘其逆映射，得到

$$Dg(x)=-\big[D_yG(x,g(x))\big]^{-1}D_xG(x,g(x)).$$

□

例 16.8 (一个标量隐函数)**.** 令

$$G(x,y)=y^3+xy-1.$$

在 $(0,1)$ 处 $G(0,1)=0$，且

$$\partial_yG(0,1)=3\neq 0.$$

隐函数定理说明，在 0 的某个邻域内存在唯一 C^1 函数 $y=g(x)$，满足

$$g(x)^3+xg(x)=1,\qquad g(0)=1.$$

由公式 (16.6)，

$$g'(x)=-\frac{\partial_xG(x,g(x))}{\partial_yG(x,g(x))}=-\frac{g(x)}{3g(x)^2+x}.$$

特别地 $g'(0)=-1/3$。这里的结论只保证局部函数分支；没有额外的全局单调性或无奇点条件时，不能把局部结论扩大到整个实轴。

例 16.9 (圆的局部图像)**.** 令 $G(x,y)=x^2+y^2-1$。在点 $(0,1)$ 处，$\partial_yG(0,1)=2\neq 0$，故圆在该点附近可唯一写成 $y=g(x)$，且

$$g'(x)=-\frac{x}{g(x)}.$$

在点 $(1,0)$ 处 $\partial_yG(1,0)=0$，但 $\partial_xG(1,0)=2\neq 0$，所以不能用 y 作为局部函数，而可以交换坐标，在该点附近写成 $x=h(y)$。这说明隐函数定理的非退化条件依赖于所选择的因变量方向。

17　秩定理、正则曲线与正则曲面

第十六章把可逆导数用于局部反解。本章继续追问：当导数不再是方阵可逆，而只具有固定秩时，映射的局部形状是什么。答案是，经过适当的坐标变换，常秩映射局部等价于投影

$$(u, v) \longmapsto (u, 0).$$

这一本质性的标准形同时解释了隐函数的自由变量、水平集的维数以及曲线和曲面的切空间。

证明分为四步。先在线性代数层面构造秩分解；再把逆函数定理应用于部分坐标，证明常秩定理；随后从隐函数定理推出正则水平集的局部参数化和切空间公式；最后在 $\mathbb{R}^3$ 中讨论正则曲线、正则曲面及参数变换。

17.1　线性映射的秩分解

引理 17.1 (秩–零度定理)**.** *设 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为线性映射。若 $\operatorname{rank} A = r$，则*

$$\dim \ker A = n - r.$$

证明. 取 $\ker A$ 的一组基 $k_{r+1}, \dots, k_n$，并将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基

$$x_1, \dots, x_r, k_{r+1}, \dots, k_n.$$

我们先证明 $Ax_1, \dots, Ax_r$ 线性无关。若

$$\sum_{i=1}^{r} c_i A x_i = 0,$$

则 $A(\sum_i c_i x_i) = 0$，所以 $\sum_i c_i x_i \in \ker A$。另一方面，这个向量在所选基中的 $k_{r+1}, \dots, k_n$ 坐标均为零。由于基向量唯一，只能有 $c_1 = \cdots = c_r = 0$。

因此 $Ax_1, \dots, Ax_r$ 是 $\operatorname{im} A$ 的 r 个线性无关向量，构成其一组基。若 $\dim \ker A = d$，则上述扩充使用了 d 个核基向量，所以 $r + d = n$，即 $d = n - r$。 □

定理 17.2 (线性秩标准形)**.** *设 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的秩为 r。则存在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 上的可逆线性坐标变换，使得 A 在新坐标下表示为*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 由引理 17.1，取

$$x_1, \dots, x_r, k_{r+1}, \dots, k_n$$

为定义域的一组基，其中后 $n - r$ 个向量构成 $\ker A$，并且 $Ax_1, \dots, Ax_r$ 构成 $\operatorname{im} A$ 的一组基。

将 $Ax_1, \dots, Ax_r$ 扩充为陪域的一组基

$$y_1 = Ax_1, \dots, y_r = Ax_r, y_{r+1}, \dots, y_m.$$

若定义域向量的坐标为

$$x = \sum_{i=1}^{r} u_i x_i + \sum_{j=r+1}^{n} v_j k_j,$$

则

$$Ax = \sum_{i=1}^{r} u_i A x_i = \sum_{i=1}^{r} u_i y_i.$$

所以在这两组基下，前 r 个输出坐标等于 $(u_1, \dots, u_r)$，其余输出坐标为零，矩阵正是所写标准形。基变换矩阵均可逆，故这确实是通过可逆坐标变换得到的等价形式。 □

17.2 常秩定理

引理 17.3 (沿线段的向量值积分公式)**.** 设 $F : U \to \mathbb{R}^m$ 为 C^1，且线段 $[x, y] \subset U$。则

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 DF(x + t(y - x))(y - x)\, dt.$$

证明. 定义 $\varphi(t) = F(x + t(y - x))$。对每个分量应用一元链式法则，

$$\varphi'(t) = DF(x + t(y - x))(y - x).$$

每个分量的导数连续，因此可以逐分量应用微积分基本定理：

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt.$$

代入 $\varphi(0) = F(x)$、$\varphi(1) = F(y)$ 得到公式。 □

定理 17.4 (常秩局部标准形)**.** 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，$F : U \to \mathbb{R}^m$ 为 C^1 映射。设 $a \in U$，并假设存在 a 的邻域 U_0，使

$$\operatorname{rank} DF(x) = r \qquad (x \in U_0).$$

则存在 a 的邻域 W、$F(a)$ 的邻域 V，以及定义域和值域上的 C^1 微分同胚 Φ, Θ，使在适当的坐标分解

$$\Theta \circ F \circ \Phi^{-1}(u, v) = (u, 0), \qquad u \in \mathbb{R}^r,\ v \in \mathbb{R}^{n-r}.$$

这里零向量位于 $\mathbb{R}^{m-r}$ 中。

证明. 先平移坐标，使 $a = 0$、$F(a) = 0$。由线性秩标准形，存在定义域和值域上的可逆线性变换，使

$$DF(0) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可逆线性变换保持 C^1 性和导数秩，因此只需在这个坐标下证明结论。把变量写成 $x = (u, v)$，其中 $u \in \mathbb{R}^r$、$v \in \mathbb{R}^{n-r}$，把函数写成

$$F(u, v) = (f(u, v), g(u, v)),$$

其中 f 取值于 $\mathbb{R}^r$、g 取值于 $\mathbb{R}^{m-r}$。由 $DF(0)$ 的标准形，

$$D_u f(0, 0) = I_r. \tag{17.1}$$

定义

$$\Psi(u,v)=(f(u,v),v).$$

其导数在原点为

$$D\Psi(0,0)=\begin{pmatrix} D_uf(0,0) & D_vf(0,0)\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & D_vf(0,0)\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix},$$

这是可逆矩阵。由逆函数定理，缩小邻域后，Ψ 在原点附近有 C^1 逆映射。写

$$(u,v)=\Psi^{-1}(s,v).$$

在新坐标 (s,v) 下，定义

$$\widetilde{F}(s,v)=F(\Psi^{-1}(s,v)).$$

由于 Ψ 的第一分量正是 f，有

$$\widetilde{F}(s,v)=(s,h(s,v))$$

其中 h 为 C^1 映射。

计算导数矩阵：

$$D\widetilde{F}(s,v)=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ D_sh(s,v) & D_vh(s,v)\end{pmatrix}.$$

对这个矩阵的前 r 行作行消元，得到与之秩相同的矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & D_vh(s,v)\end{pmatrix}.$$

原假设说明其秩恒为 r，所以

$$D_vh(s,v)=0$$

在足够小的邻域内恒成立。

取一个关于 v 凸的矩形邻域。固定 s，对任意两个 v_0,v_1，定义 $\eta(t)=h(s,v_0+t(v_1-v_0))$。由链式法则，

$$\eta'(t)=D_vh(s,v_0+t(v_1-v_0))(v_1-v_0)=0.$$

一元中值定理给出 $\eta(1)=\eta(0)$，即 $h(s,v_1)=h(s,v_0)$。因此 $h(s,v)$ 与 v 无关，存在 C^1 函数 $\rho(s)$，使

$$h(s,v)=\rho(s).$$

最后定义陪域坐标变换

$$\Theta(z,w)=(z,w-\rho(z)).$$

其逆映射为

$$\Theta^{-1}(z,w)=(z,w+\rho(z)),$$

所以 Θ 是 C^1 微分同胚。于是

$$\Theta(\widetilde{F}(s,v))=\Theta(s,\rho(s))=(s,0).$$

将前面使用的线性坐标变换和平移复原，即得原命题。 □

推论 17.5 (满秩映射的局部开性)**.** 设 $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为 C^1，且 $n \geq m$。若 $DF(a)$ 的秩为 m，则 F 把 a 的某个邻域映为 $F(a)$ 的一个邻域。

证明. 在常秩定理中取 $r = m$。局部标准形为

$$(u, v) \longmapsto u, \qquad u \in \mathbb{R}^m.$$

投影 $(u, v) \mapsto u$ 把任意含原点的小矩形映为含原点的开集，坐标微分同胚和平移保持开集，因此原映射的像包含 $F(a)$ 的一个邻域。 □

17.3 正则水平集与切空间

定理 17.6 (正则水平集的局部参数化)**.** 设 $G : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ 为 C^1，$a \in U$，且 $DG(a)$ 满秩 r。令 $c = G(a)$。则存在 a 的邻域 W、0 的邻域 $P \subseteq \mathbb{R}^{n-r}$，以及 C^1 映射

$$\Gamma : P \to \mathbb{R}^n$$

使

$$\Gamma(0) = a, \qquad G(\Gamma(v)) = c,$$

并且在 W 内

$$G^{-1}(c) \cap W = \Gamma(P).$$

证明. 由于 $DG(a)$ 满秩 r，存在 r 个坐标方向，使相应的 $r \times r$ 子矩阵可逆。重新排列坐标后，写

$$x = (u, v) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

并且 $D_u G(a)$ 可逆。由隐函数定理，存在邻域和唯一的 C^1 函数 $u = \varphi(v)$，满足

$$G(\varphi(v), v) = c, \qquad \varphi(0) = a_u.$$

定义

$$\Gamma(v) = (\varphi(v), v).$$

这给出 $G(\Gamma(v)) = c$。

若 $(u, v) \in W$ 满足 $G(u, v) = c$，隐函数定理的局部唯一性说明 $u = \varphi(v)$，故 $(u, v) = \Gamma(v)$。反向包含由定义直接成立。 □

定理 17.7 (正则水平集的切空间)**.** 在定理 *17.6* 的条件下，Γ 在 0 的导数

$$D\Gamma(0) : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^n$$

是单射，并且

$$\operatorname{im} D\Gamma(0) = \ker DG(a).$$

证明. 因为 $\Gamma(v) = (\varphi(v), v)$，有

$$D\Gamma(0)w = (D\varphi(0)w, w).$$

若 $D\Gamma(0)w = 0$，比较最后 $n - r$ 个坐标得到 $w = 0$，所以 $D\Gamma(0)$ 单射。

恒等式 $G(\Gamma(v)) = c$ 对 v 求导，得到

$$DG(a)D\Gamma(0) = 0.$$

故 $\operatorname{im} D\Gamma(0) \subseteq \ker DG(a)$。

另一方面，$DG(a)$ 满秩 r，由秩–零度定理

$$\dim \ker DG(a) = n - r.$$

而 $D\Gamma(0)$ 单射，定义域维数为 $n-r$，所以 $\dim \operatorname{im} D\Gamma(0) = n - r$。包含关系两侧维数相同，故两者相等。 □

17.4 正则曲线

定义 17.8 (正则曲线与切向量)**.** 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为开区间。C^1 映射 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ 称为正则曲线，若

$$\gamma'(t) \neq 0 \qquad (t \in I).$$

在 t_0 处的切线定义为

$$\gamma(t_0) + \mathbb{R}\,\gamma'(t_0).$$

命题 17.9 (正则曲线的局部单射性)**.** *设 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ 为 C^1，且 $\gamma'(t_0) \neq 0$。则存在 t_0 的邻域 J，使 $\gamma|_J$ 为单射。*

证明. 取坐标 j 使 $\gamma_j'(t_0) \neq 0$。由导数连续性，缩小 J 后，$\gamma_j'(t)$ 在 J 上保持同一严格符号。由一元中值定理，对 $s < t$ 属于 J，存在 $\xi \in (s,t)$ 使

$$\gamma_j(t) - \gamma_j(s) = \gamma_j'(\xi)(t-s).$$

右端非零，所以 $\gamma_j(t) \neq \gamma_j(s)$，从而 $\gamma(t) \neq \gamma(s)$。 □

定理 17.10 (参数变换下的切线不变性)**.** *设 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ 为正则 C^1 曲线，$\phi : J \to I$ 为 C^1 微分同胚，且 $\phi'(s) \neq 0$。令 $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$。则*

$$\widetilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\phi(s))\phi'(s),$$

所以 $\widetilde{\gamma}'(s)$ 与 $\gamma'(\phi(s))$ 张成同一条直线。

证明. 链式法则给出所写导数公式。因 $\phi'(s)$ 是非零实数，

$$\mathbb{R}\,\widetilde{\gamma}'(s) = \mathbb{R}\,\gamma'(\phi(s)).$$

因此切线不依赖于正则参数的具体选择。 □

例 17.11 (圆的参数化)**.** 令

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

则

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t), \qquad \|\gamma'(t)\|_2 = 1,$$

所以它是正则曲线。其切线方向始终与半径 $\gamma(t)$ 垂直，因为

$$\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0.$$

17.5 正则曲面与切平面

定义 17.12 (正则曲面参数片)**.** 设 $V \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集。C^1 映射 $X : V \to \mathbb{R}^3$ 称为正则参数片，若

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) \neq 0 \qquad ((u,v) \in V).$$

在 (u_0, v_0) 处的切平面定义为

$$X(u_0,v_0) + \operatorname{span}\{X_u(u_0,v_0), X_v(u_0,v_0)\}.$$

引理 17.13 (叉积条件与参数导数独立)**.** 对 $a, b \in \mathbb{R}^3$，有

$$a \times b \neq 0 \iff a, b \text{ 线性无关}.$$

证明. 若 a, b 线性相关，则 $b = \lambda a$ 或其中一个为零，按叉积坐标公式直接得到 $a \times b = 0$。

反向若 $a \times b = 0$，则

$$\|a \times b\|_2^2 = \|a\|_2^2 \|b\|_2^2 - (a \cdot b)^2 = 0.$$

若 $a = 0$，显然相关；若 $a \neq 0$，Cauchy–Schwarz 等号成立，说明 b 是 a 的实数倍。因此二者线性相关。 □

命题 17.14 (参数片的法向量与切平面)**.** 若 X 是正则参数片，则

$$N(u,v) = X_u(u,v) \times X_v(u,v)$$

是切平面的非零法向量。向量 $w \in \mathbb{R}^3$ 属于切平面的平移空间，当且仅当

$$w \cdot N(u,v) = 0.$$

证明. 由叉积定义，

$$X_u \cdot (X_u \times X_v) = 0, \qquad X_v \cdot (X_u \times X_v) = 0.$$

所以 N 垂直于切平面生成的两个方向。由引理 17.13，这两个方向线性无关，确实生成二维平面。在 $\mathbb{R}^3$ 中，非零向量 N 的正交补是二维子空间；它包含 X_u, X_v 所张成的二维空间，故二者相等。 □

定理 17.15 (正则水平面与正则参数片)**.** 设 $G : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为 C^1，且 $\nabla G(a) \neq 0$。则水平集

$$S = \{x \in U : G(x) = G(a)\}$$

在 a 附近可以表示为一个正则参数片，其切平面为

$$a + \ker DG(a) = \{a + w : \nabla G(a) \cdot w = 0\}.$$

证明. 由于 $\nabla G(a) \neq 0$，至少有一个偏导数不为零。交换坐标后，可设 $\partial_y G(a) \neq 0$。由隐函数定理，存在 C^1 函数 $y = g(x,z)$，使水平集在 a 附近由

$$X(x,z) = (x, g(x,z), z)$$

参数化。其两个偏导为

$$X_x = (1, g_x, 0), \qquad X_z = (0, g_z, 1).$$

这两个向量线性无关，因为若 $\lambda X_x + \mu X_z = 0$，比较第一、第三坐标即得 $\lambda = \mu = 0$。所以 X 是正则参数片。

另一方面，$G(X(x,z)) = G(a)$。对 x, z 求导：

$$DG(a)X_x = 0, \qquad DG(a)X_z = 0.$$

于是切平面平移空间包含于 $\ker DG(a)$。由于 $DG(a) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 非零，秩为 1，其核维数为 2；切平面生成空间也为二维，故两者相等。最后 $DG(a)w = \nabla G(a) \cdot w$，得到所写方程。 □

例 17.16 (球面的参数片)**.** 令

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

在单位球面的任一点 a，

$$\nabla G(a) = 2a \neq 0.$$

所以球面在每一点都是正则水平面，其切平面为

$$\{a + w : a \cdot w = 0\}.$$

这说明球面的法向方向正是半径方向。

18 多重 Riemann 积分与 Fubini 定理

一元积分把区间分成有限个小区间，再用上下和控制函数在每个小区间内的振幅。本章把这一思想推广到有限维闭盒体。所有结论都在已经建立的实数完备性、紧性和一元 Darboux 积分基础上证明；一般区域的积分只有在明确给出边界内容条件后才使用。

设

$$Q=\prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k]\subset\mathbb{R}^n,\qquad a_k<b_k,\qquad |Q|=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k).$$

这里 $|Q|$ 表示盒体体积，而不是点的范数。

18.1 盒体分割与体积

定义 18.1 (矩形分割与网格)**.** 对每个 $k=1,\dots,n$，取有限分割

$$P_k:\quad a_k=x_{k,0}<x_{k,1}<\cdots<x_{k,N_k}=b_k.$$

令 $\mathcal{P}=(P_1,\dots,P_n)$。它的基本小盒体为

$$R_{\boldsymbol{i}}=\prod_{k=1}^{n}[x_{k,i_k-1},x_{k,i_k}],\qquad 1\le i_k\le N_k.$$

小盒体的内部两两不交，且并为 Q。定义

$$\|\mathcal{P}\|=\max_{1\le k\le n}\ \max_{1\le i_k\le N_k}(x_{k,i_k}-x_{k,i_k-1}).$$

若每个 P_k 都由另一个分割 P_k' 加入分点得到，则称 $\mathcal{P}'$ 是 $\mathcal{P}$ 的细化。

引理 18.2 (小盒体体积可加)**.** 对任意矩形分割 $\mathcal{P}$，有

$$\sum_{\boldsymbol{i}}|R_{\boldsymbol{i}}|=|Q|.$$

若一个盒体沿一个坐标方向加入有限个分点而被切成有限个子盒体，则子盒体体积之和等于原盒体体积。

证明. 小盒体体积为

$$|R_{\boldsymbol{i}}|=\prod_{k=1}^{n}(x_{k,i_k}-x_{k,i_k-1}).$$

有限和与有限积可以逐次交换，所以

$$\begin{aligned}\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}|R_{\boldsymbol{i}}|&=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k=1}^{N_k}(x_{k,i_k}-x_{k,i_k-1})\right)\\&=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)=|Q|.\end{aligned}$$

若只沿第 j 个方向切分，设该方向的端点为 $c_0 < c_1 < \cdots < c_s$。其余方向的长度乘积记为 A，则子盒体体积之和为

$$A\sum_{\ell=1}^{s}(c_\ell - c_{\ell-1}) = A(c_s - c_0),$$

这正是原盒体体积。有限次切分由归纳法得到。 □

引理 18.3 (共同细化)**.** *任意两个矩形分割 $\mathcal{P}, \mathcal{R}$ 都存在共同细化。*

证明. 在第 k 个坐标方向，把 P_k 与 R_k 的分点集合取并，按大小排列得到分割 S_k。令 $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_n)$。每个原分点仍是 S_k 的分点，因此 $\mathcal{S}$ 同时细化 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{R}$。 □

定义 18.4 (Jordan 外内容)**.** 有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的 Jordan 外内容定义为

$$J^*(E) = \inf\left\{ \sum_{\ell=1}^{N} |Q_\ell| : E \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} Q_\ell,\ Q_\ell \text{ 为闭盒体} \right\}.$$

若 E 可被有限个盒体并 K 包含，且 $J^*(K \setminus E) = 0$，则称 E Jordan 可测，并把 $J^*(E)$ 记为 $J(E)$。本章的基本积分先只在闭盒体上定义；对一般区域的积分需另行说明边界的 Jordan 内容。

18.2 多重 Darboux 积分

定义 18.5 (多重上下和)**.** 设 $f : Q \to \mathbb{R}$ 有界，$\mathcal{P}$ 是 Q 的矩形分割。对每个小盒体 $R \in \mathcal{P}$，定义

$$m_R(f) = \inf_{x \in R} f(x), \qquad M_R(f) = \sup_{x \in R} f(x).$$

令

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{R \in \mathcal{P}} m_R(f)|R|, \qquad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{R \in \mathcal{P}} M_R(f)|R|.$$

再定义

$$\underline{\int_Q} f = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}), \qquad \overline{\int_Q} f = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P}).$$

若上下积分相等，则称 f 在 Q 上 Riemann–Darboux 可积，并将共同值记为

$$\int_Q f(x)\, dx.$$

引理 18.6 (细化不等式)**.** *若 $\mathcal{P}'$ 细化 $\mathcal{P}$，则*

$$L(f, \mathcal{P}) \le L(f, \mathcal{P}') \le U(f, \mathcal{P}') \le U(f, \mathcal{P}).$$

证明. 先把一个小盒体 R 沿一个坐标方向切成 R_1, R_2。由于 $R_1, R_2 \subseteq R$，有

$$m_R(f) \le m_{R_1}(f), m_{R_2}(f).$$

由体积可加性，

$$m_R(f)|R| \le m_{R_1}(f)|R_1| + m_{R_2}(f)|R_2|.$$

同理，$M_{R_1}(f), M_{R_2}(f) \le M_R(f)$，故

$$M_{R_1}(f)|R_1| + M_{R_2}(f)|R_2| \le M_R(f)|R|.$$

任意有限细化由有限次这样的切分组成，逐次应用即可。 □

命题 18.7 (下积分不超过上积分)**.** *对任意有界 f，有*

$$\underline{\int_Q} f \le \overline{\int_Q} f.$$

证明. 任取分割 $\mathcal{P}, \mathcal{R}$，取共同细化 $\mathcal{S}$。由引理 18.6，

$$L(f,\mathcal{P}) \le L(f,\mathcal{S}) \le U(f,\mathcal{S}) \le U(f,\mathcal{R}).$$

固定 $\mathcal{R}$ 对左边取上确界，得到 $\underline{\int_Q} f \le U(f,\mathcal{R})$。再对 $\mathcal{R}$ 取下确界即可。 □

定义 18.8 (盒体振幅)**.** 定义

$$\omega(f;R) = M_R(f) - m_R(f).$$

则

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{R\in\mathcal{P}} \omega(f;R)|R|.$$

定理 18.9 (多重振幅判据)**.** *有界函数 $f : Q \to \mathbb{R}$ 可积，当且仅当*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{P}, \qquad U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

证明. 设 f 可积，积分值为 I。由上确界和下确界的定义，可取 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ 使

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{P}_1) \le I, \qquad I \le U(f,\mathcal{P}_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取共同细化 $\mathcal{P}$，则

$$0 \le U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \le U(f,\mathcal{P}_2) - L(f,\mathcal{P}_1) < \varepsilon.$$

反过来，假设题述条件成立。记下积分和上积分为 I_- 与 I_+。对任何所选分割，

$$L(f,\mathcal{P}) \le I_- \le I_+ \le U(f,\mathcal{P}),$$

所以 $0 \le I_+ - I_- < \varepsilon$。若 $I_+ > I_-$，取 $\varepsilon = (I_+ - I_-)/2$ 得矛盾，故 $I_+ = I_-$。 □

定理 18.10 (多重取样和判据)**.** *有界函数 f 可积，当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得任意 $\|\mathcal{P}\| < \delta$ 的矩形分割和任意标签 $\xi_R \in R$ 都满足*

$$\left| \sum_{R\in\mathcal{P}} f(\xi_R)|R| - \int_Q f \right| < \varepsilon.$$

证明. 先设 f 可积，积分为 I，并取 $B \ge 1$ 使 $|f| \le B$。由振幅判据取 $\mathcal{P}_0$ 使

$$U(f,\mathcal{P}_0) - L(f,\mathcal{P}_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $P_{0,k}$ 的内部分点数为 $r_k - 1$，并令

$$N = \sum_{k=1}^{n} (r_k - 1).$$

若 $N > 0$，令 $d > 0$ 为所有相邻分点距离中的最小值，并取

$$0 < \delta < d, \qquad 2BC_Q\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad C_Q = \sum_{k=1}^{n} (r_k - 1) \prod_{\ell \ne k} (b_\ell - a_\ell).$$

若 $N = 0$，没有内部网格超平面，任意 $\delta > 0$ 都不会产生坏盒体。

称一个 $\mathcal{P}$ 的小盒体为坏盒体，如果它跨过某个 $P_{0,k}$ 的内部分点超平面；否则称为好盒体。因为其边长小于 d，在同一方向至多跨过一个内部分点。对固定的第 k 个方向和一个内部分点 s，与超平面 $x_k = s$ 相交的小盒体的总体积不超过

$$\delta \prod_{\ell \ne k} (b_\ell - a_\ell).$$

把所有内部分点和坐标方向相加，坏盒体总体积 V_{bad} 满足

$$V_{\mathrm{bad}} \le C_Q \delta.$$

好盒体完全落在 $\mathcal{P}_0$ 的某个大盒体内部。把好盒体按其所属大盒体归类，并把坏盒体的贡献单独估计，得到

$$L(f,\mathcal{P}_0) - 2BV_{\mathrm{bad}} \le \sum_{R \in \mathcal{P}} f(\xi_R)|R| \le U(f,\mathcal{P}_0) + 2BV_{\mathrm{bad}}.$$

因为 $L(f,\mathcal{P}_0) \le I \le U(f,\mathcal{P}_0)$，故

$$\left| \sum_{R \in \mathcal{P}} f(\xi_R)|R| - I \right| \le U(f,\mathcal{P}_0) - L(f,\mathcal{P}_0) + 2BV_{\mathrm{bad}} < \varepsilon.$$

反过来，假设取样和性质成立。给定 $\varepsilon > 0$，把性质中的误差先取为 $\varepsilon/4$，得到 $\delta > 0$，再取 $\|\mathcal{P}\| < \delta$ 的分割。对每个小盒体 R，按下确界和上确界定义选取

$$f(u_R) < m_R(f) + \frac{\varepsilon}{4|Q|}, \qquad f(v_R) > M_R(f) - \frac{\varepsilon}{4|Q|}.$$

于是相应取样和 S_u, S_v 满足

$$L(f,\mathcal{P}) \le S_u \le L(f,\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{4},$$

$$U(f,\mathcal{P}) - \frac{\varepsilon}{4} \le S_v \le U(f,\mathcal{P}).$$

又有 $|S_u - I| < \varepsilon/4$、$|S_v - I| < \varepsilon/4$，从而

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \le (U - S_v) + |S_v - I| + |I - S_u| + (S_u - L) < \varepsilon.$$

由振幅判据 f 可积。 □

18.3 连续函数的可积性

引理 18.11 (闭盒体上的一致连续性)**.** *若 $f \in C(Q)$，则 f 在 Q 上一致连续。*

证明. 闭盒体是闭且有界的集合，因此由第五章的序列紧性定理它是紧集。连续函数在紧集上一致连续。也可以把这一点直接写成序列论证：若不一致连续，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $x_j, y_j \in Q$，使

$$\|x_j - y_j\|_2 < 1/j, \qquad |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon_0.$$

从 x_j 抽取收敛子列 $x_{j_\ell} \to x \in Q$。由三角不等式，

$$\|y_{j_\ell} - x\|_2 \leq \|y_{j_\ell} - x_{j_\ell}\|_2 + \|x_{j_\ell} - x\|_2 \to 0.$$

故 $y_{j_\ell} \to x$。连续性给出两列函数值都趋于 $f(x)$，与差值不小于 ε_0 矛盾。 □

定理 18.12 (连续函数在闭盒体上可积)**.** *若 $f \in C(Q)$，则 f 在 Q 上可积。*

证明. 给定 $\varepsilon > 0$。由一致连续性取 $\delta > 0$，使

$$\|x - y\|_2 < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|Q|}.$$

每个坐标方向取等距分割，使网格小于 $\delta/\sqrt{n}$。同一小盒体中的 x, y 满足

$$\|x - y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 < \delta^2,$$

所以该盒体的振幅小于 $\varepsilon/|Q|$。由体积可加性，

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{|Q|} \sum_{R \in \mathcal{P}} |R| = \varepsilon.$$

振幅判据完成证明。 □

命题 18.13 (线性性、保序性与绝对值估计)**.** *若 f, g 在 Q 上可积，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则 $\alpha f + \beta g$ 可积且*

$$\int_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_Q f + \beta \int_Q g.$$

若 $f \leq g$，则

$$\int_Q f \leq \int_Q g.$$

特别地，

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|.$$

证明. 对每个小盒体 R，当 $\alpha, \beta \geq 0$ 时，

$$\inf_R (\alpha f + \beta g) \geq \alpha \inf_R f + \beta \inf_R g,$$

$$\sup_R (\alpha f + \beta g) \leq \alpha \sup_R f + \beta \sup_R g.$$

因此

$$\omega(\alpha f + \beta g; R) \leq \alpha \omega(f; R) + \beta \omega(g; R).$$

分别选择使右边的加权振幅和足够小的分割，并取共同细化，得到可积性及积分的加法和正齐次性。若 $\alpha<0$，则

$$\inf_R(\alpha f)=\alpha\sup_R f,\qquad \sup_R(\alpha f)=\alpha\inf_R f,$$

故上下和同时换位，积分为 $\alpha\int_Q f$。这给出一般线性性。若 $f\le g$，则每个小盒体上的下确界和上确界分别满足

$$\inf_R f\le\inf_R g,\qquad \sup_R f\le\sup_R g,$$

取下、上积分得到保序性。最后由 $-|f|\le f\le|f|$ 得到绝对值估计。 □

命题 18.14 (积函数可积)**.** *若 f,g 在 Q 上可积，则 fg 在 Q 上可积。*

证明. 取 $B\ge1$ 使 $|f|,|g|\le B$。对同一小盒体中的 x,y，

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)|&\le|g(x)|\,|f(x)-f(y)|+|f(y)|\,|g(x)-g(y)|\\&\le B\big(|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|\big).\end{aligned}$$

取所有 $x,y\in R$ 的上确界，得到

$$\omega(fg;R)\le B\big(\omega(f;R)+\omega(g;R)\big).$$

分别为 f,g 选择振幅和足够小的分割，再取共同细化并求和，依据振幅判据即可。 □

18.4 迭代积分与 Fubini 定理

下面先设 $Q=[a,b]\times[c,d]$。

引理 18.15 (截面积分的连续性)**.** *设 $f\in C([a,b]\times[c,d])$，定义*

$$g(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

则 $g\in C([a,b])$。

证明. 给定 $\varepsilon>0$。由闭盒体上的一致连续性，存在 $\delta>0$，使

$$|x-x'|<\delta\Longrightarrow|f(x,y)-f(x',y)|<\frac{\varepsilon}{d-c}\quad\text{对所有}y\in[c,d].$$

于是

$$\begin{aligned}|g(x)-g(x')|&=\left|\int_c^d\big(f(x,y)-f(x',y)\big)\,dy\right|\\&\le\int_c^d|f(x,y)-f(x',y)|\,dy\\&\le\frac{\varepsilon}{d-c}(d-c)=\varepsilon.\end{aligned}$$

第一步不等式由一元积分的保序性应用于 $-|h|\le h\le|h|$ 得到。因此 g 连续。 □

定理 18.16 (连续函数的二维 Fubini 定理)**.** *若 $f\in C([a,b]\times[c,d])$，则*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

证明. 先证第一个等式。由引理 18.15，$g(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ 连续。取一列分割 $\mathcal{P}_m$ 和 $\mathcal{R}_m$，分别分割 $[a,b]$ 与 $[c,d]$，使

$$\|\mathcal{P}_m\|\to 0,\qquad \|\mathcal{R}_m\|\to 0.$$

取标签 $\xi_{m,i}\in[x_{i-1},x_i]$ 和 $\eta_{m,j}\in[y_{j-1},y_j]$，并置

$$S_m=\sum_{i,j} f(\xi_{m,i},\eta_{m,j})\Delta x_{m,i}\Delta y_{m,j}.$$

由二维多重取样和判据，

$$S_m\longrightarrow\int_{[a,b]\times[c,d]} f.$$

另一方面，令

$$T_m=\sum_i g(\xi_{m,i})\Delta x_{m,i}.$$

一元取样和判据给出

$$T_m\longrightarrow\int_a^b g(x)\,dx.$$

还需证明 $S_m-T_m\to 0$。由 f 在闭盒体上一致连续性，令 ω_m 为所有满足 $|y-y'|\le\|\mathcal{R}_m\|$ 的点对上的最大振幅，则 $\omega_m\to 0$。固定 i，在每个小区间 $[y_{j-1},y_j]$ 上有

$$|f(\xi_{m,i},y)-f(\xi_{m,i},\eta_{m,j})|\le\omega_m.$$

积分并求和得到

$$\left|g(\xi_{m,i})-\sum_j f(\xi_{m,i},\eta_{m,j})\Delta y_{m,j}\right|\le\omega_m(d-c).$$

乘以 $\Delta x_{m,i}$ 后对 i 求和，因 $\sum_i\Delta x_{m,i}=b-a$，故

$$|T_m-S_m|\le(b-a)(d-c)\omega_m\longrightarrow 0.$$

两列有相同极限，第一条等式成立。交换 x,y 后重复同一证明，得到第二条等式。 □

推论 18.17 (乘积函数的积分分解)**.** *若 $u\in C([a,b])$、$v\in C([c,d])$，则*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} u(x)v(y)\,dx\,dy=\left(\int_a^b u(x)\,dx\right)\left(\int_c^d v(y)\,dy\right).$$

证明. 固定 x，有

$$\int_c^d u(x)v(y)\,dy=u(x)\int_c^d v(y)\,dy.$$

再对 x 积分，并使用一元积分的线性性，得到结论。二维 Fubini 定理把迭代积分等同于矩形上的多重积分。 □

定理 18.18 (高维连续函数的 Fubini 公式)**.** *设*

$$Q=Q'\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},\qquad f\in C(Q).$$

定义

$$g(x')=\int_{a_n}^{b_n} f(x',t)\,dt.$$

则 $g \in C(Q')$，且

$$\int_{Q} f(x',t)\,dx'\,dt = \int_{Q'} g(x')\,dx'.$$

反复应用该公式，可以按任意指定次序把连续函数的多重积分写成一元迭代积分。

证明. 设 $x', y' \in Q'$。由一致连续性，当 $\|x'-y'\|_2$ 足够小时，对所有 $t \in [a_n, b_n]$ 有

$$|f(x',t) - f(y',t)| < \frac{\varepsilon}{b_n - a_n}.$$

积分后得到 $|g(x') - g(y')| < \varepsilon$，所以 g 连续。

对积分恒等式，取 Q' 的矩形分割以及最后坐标的分割。在每个前 $n-1$ 维小盒体中取标签 ξ，在最后坐标小区间中取标签 η_j。一致连续性给出：当最后坐标网格趋于零时，内层积分 $\int_{a_n}^{b_n} f(\xi,t)\,dt$ 与取样和 $\sum_j f(\xi,\eta_j)\Delta t_j$ 的差值一致趋于零；其绝对值至多为 $(b_n-a_n)\omega$，其中 $\omega \to 0$。再乘以前 $n-1$ 维小盒体体积并求和，误差至多为

$$|Q'|(b_n - a_n)\omega \longrightarrow 0.$$

多重取样和判据分别给出两侧的积分极限，故恒等式成立。逐坐标重复即可。 □

18.5 例子与区域边界

例 18.19 (二维 Dirichlet 型函数). 在 $Q = [0,1]^2$ 上定义

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

每一个非退化小盒体都包含有理点对，也包含至少一个坐标为无理数的点；故其下确界为 0、上确界为 1。于是对任何分割

$$L(f,\mathcal{P}) = 0, \qquad U(f,\mathcal{P}) = \sum_{R \in \mathcal{P}} |R| = 1.$$

上下积分不同，函数不可积。变细不能消除小盒体内的全振幅振荡。

例 18.20 (三角形区域的迭代积分). 令

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}.$$

若 f 在包含 T 的矩形上连续，可以先定义

$$\int_T f := \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx.$$

例如 $f \equiv 1$ 时

$$\int_T 1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

要把这个定义与一般 Jordan 区域上的指标函数积分完全等同，还需要证明边界 $\{(x,x) : 0 \le x \le 1\}$ 的 Jordan 外内容为零，并建立区域逼近定理；这一步不能由图形面积直觉替代。

19 Jordan 区域与区域上的积分

第十八章把多重 Riemann–Darboux 积分定义在闭盒体上。实际积分常常发生在三角形、圆盘或由连续曲线围成的区域内；这时必须回答两个问题：区域的边界是否会破坏 Darboux 上下和的极限，以及区域积分如何与迭代积分联系。本章在不引入一般测度的前提下，用有限盒体覆盖定义 Jordan 内容，并证明边界具有零 Jordan 内容时的可积性与区域积分公式。

19.1 Jordan 内容与边界判据

定义 19.1 (盒体并与 Jordan 外内容)**.** 称集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有限盒体并，如果存在有限个闭盒体 $R_1, \dots, R_N$ 使

$$K = \bigcup_{\ell=1}^{N} R_\ell .$$

其外内容定义为

$$J^*(E) = \inf\left\{ \sum_{\ell=1}^{N} |R_\ell| : E \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} R_\ell \right\},$$

其中 R_ℓ 遍历闭盒体。称有界集合 E Jordan 可测，如果

$$J^*(\partial E) = 0.$$

在这种情形定义

$$J(E) = J^*(E).$$

引理 19.2 (外内容的单调性与有限次次可加性)**.** *若 $E \subseteq F$，则 $J^*(E) \le J^*(F)$。对任意有界 $E_1, \dots, E_N$，有*

$$J^*\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} E_\ell \right) \le \sum_{\ell=1}^{N} J^*(E_\ell).$$

证明. 每一个覆盖 F 的有限盒体族也是覆盖 E 的盒体族，因此取下确界得到单调性。给定 $\varepsilon > 0$，对每个 ℓ 选择有限盒体族 $R_{\ell,1}, \dots, R_{\ell,m_\ell}$，使

$$E_\ell \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_\ell} R_{\ell,j}, \qquad \sum_{j=1}^{m_\ell} |R_{\ell,j}| < J^*(E_\ell) + \frac{\varepsilon}{N}.$$

所有这些盒体合起来覆盖 $\bigcup_\ell E_\ell$，所以

$$J^*\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} E_\ell \right) \le \sum_{\ell=1}^{N} J^*(E_\ell) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ 即得结论。 □

引理 19.3 (边界运算)**.** *对任意集合 $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$，有*

$$\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F, \qquad \partial(E \cap F) \subseteq \partial E \cup \partial F, \qquad \partial(E \setminus F) \subseteq \partial E \cup \partial F.$$

证明. 证明第一条。若 $x \notin \partial E \cup \partial F$，则 x 有一个邻域 U_E，使 $U_E \subset E$ 或 $U_E \cap E = \varnothing$；也有一个邻域 U_F，使 $U_F \subset F$ 或 $U_F \cap F = \varnothing$。取 $U = U_E \cap U_F$。四种可能中，若 $U_E \subset E$ 或 $U_F \subset F$，则 $U \subset E \cup F$；若两者均与相应集合不交，则 $U \cap (E \cup F) = \varnothing$。故 $x \notin \partial(E \cup F)$。第二条和第三条分别对交集与差集使用同一论证：在 U_E, U_F 上各自知道成员关系恒定，故交集或差集的成员关系也恒定。 □

推论 19.4 (Jordan 可测集合的有限运算). *若 E, F Jordan 可测，则 $E \cup F$、$E \cap F$ 和 $E \setminus F$ 都 Jordan 可测。*

证明. 由引理 19.3 和外内容的有限次次可加性，

$$J^*(\partial(E \cup F)) \le J^*(\partial E) + J^*(\partial F) = 0.$$

交集与差集完全相同。 □

引理 19.5 (边界分离小盒体). *设 Q 是闭盒体，$B \subset Q$ 是非空紧集，且 $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 是 B 的有限开盒体覆盖。则存在 $\delta > 0$，使得任意直径小于 δ 且与 B 相交的盒体都包含于某个 U_α 的闭子盒体中。*

证明. 先把每个开盒体 U_α 缩小为同心闭盒体 V_α，使

$$B \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{N} V_\alpha, \qquad V_\alpha \subset U_\alpha.$$

这是有限覆盖下的逐点选择：对每个 $x \in B$，选一个 U_α 包含 x，再选一个以 x 为中心且闭包包含于 U_α 的小盒体；紧性抽取有限子覆盖，并将其记为 V_α。

对每个 α，闭集 $B \setminus \operatorname{int} V_\alpha$ 与 V_α 的内部不相交。若不存在所需的统一 δ，则存在盒体 R_j 和点 $x_j \in R_j \cap B$，满足 $\operatorname{diam} R_j \to 0$，但 R_j 不包含于任何 U_α。由 B 紧性，抽取 $x_{j_k} \to x \in B$。有某个 α_0 使 $x \in \operatorname{int} V_{\alpha_0}$。取 $\rho > 0$ 使 $B(x, \rho) \subset V_{\alpha_0}$。当 k 足够大时，R_{j_k} 的直径小于 $\rho/2$，且其中一点 x_{j_k} 距 x 小于 $\rho/2$，于是 $R_{j_k} \subset B(x, \rho) \subset V_{\alpha_0} \subset U_{\alpha_0}$，矛盾。 □

定理 19.6 (边界零内容的指标函数判据). *设 $E \subset Q$ 有界，且 $J^*(\partial E) = 0$。定义指标函数*

$$\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

则 $\mathbf{1}_E$ 在 Q 上 Riemann–Darboux 可积，且

$$\int_Q \mathbf{1}_E = J(E).$$

证明. 给定 $\varepsilon > 0$。由 $J^*(\partial E) = 0$，可取有限个开盒体 $U_1, \dots, U_N$ 覆盖 ∂E，满足

$$\sum_{\ell=1}^{N} |U_\ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

把每个开盒体稍微扩大为闭盒体，再取一个包含这些闭盒体和 Q 的闭盒体；不改变论证，只需把上式的右侧换成更小的数。对有限覆盖应用引理 19.5，取 $\delta > 0$，使得直径小于 δ 且与 ∂E 相交的小盒体都落在这些覆盖盒体的并中。

取网格小于 $\delta/\sqrt{n}$ 的矩形分割 $\mathcal{P}$。若小盒体 $R\in\mathcal{P}$ 同时与 E 和 $Q\setminus E$ 相交，则任取 $x\in R\cap E$、$y\in R\setminus E$。线段 $t\mapsto (1-t)x+ty$ 从 E 到其补集；集合

$$A=\{t\in[0,1]:(1-t)x+ty\in E\}$$

非空且有界。令 $s=\sup A$。若 $s<1$，取 $t_j\downarrow s$ 且 $t_j\notin A$，取 $r_j\uparrow s$ 且 $r_j\in A$；两列对应的点都趋于线段上的点 z。每个邻域同时含有 E 中点和补集中的点，所以 $z\in\partial E$。若 $s=1$，则 $y\in\partial E$；若 $s=0$，则 $x\in\partial E$。因此每个振幅非零的小盒体都与 ∂E 相交，因而被覆盖盒体并控制。

在不与边界相交的小盒体上，指标函数恒为 0 或恒为 1，振幅为零；在与边界相交的小盒体上，振幅至多为 1。于是

$$U(\mathbf{1}_E,\mathcal{P})-L(\mathbf{1}_E,\mathcal{P})\le\sum_{\substack{R\in\mathcal{P}\\ R\cap\partial E\neq\varnothing}}|R|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由多重振幅判据，指标函数可积。

最后，由 Jordan 外内容定义，任何有限盒体覆盖 $K\supset E$ 都给出

$$\int_Q\mathbf{1}_E\le\sum|R_\ell|.$$

反过来，取使上下和间隙任意小的分割，并把指标函数取值为 1 的小盒体略作覆盖，可得到

$$J(E)\le\int_Q\mathbf{1}_E.$$

两边相等。更直接地说，对于任意 $\eta>0$，由上和定义取分割使

$$U(\mathbf{1}_E,\mathcal{P})<\int_Q\mathbf{1}_E+\eta.$$

上和只由与 E 相交的小盒体体积组成，而这些盒体的有限并覆盖 E，故

$$J(E)\le U(\mathbf{1}_E,\mathcal{P})<\int_Q\mathbf{1}_E+\eta.$$

令 $\eta\downarrow0$，结合前一方向的不等式得到结论。 □

推论 19.7 (内容的单调性与有限可加性)**.** *若 $E,F\subset Q$ Jordan 可测且 $E\cap F=\varnothing$，则*

$$J(E\cup F)=J(E)+J(F).$$

若 $E\subseteq F$，则 $J(E)\le J(F)$。

证明. 指标函数恒等式

$$\mathbf{1}_{E\cup F}=\mathbf{1}_E+\mathbf{1}_F\qquad(E\cap F=\varnothing)$$

以及积分线性性给出可加性。若 $E\subseteq F$，则 $\mathbf{1}_E\le\mathbf{1}_F$，由积分保序性得到单调性。 □

19.2 区域上的 Riemann 积分

定义 19.8 (Jordan 区域上的积分)**.** 设 $E \subset Q$ Jordan 可测，$f : E \to \mathbb{R}$ 是有界函数。若存在一个在 Q 上 Riemann 可积的延拓 $\widetilde{f}$，满足 $\widetilde{f}|_E = f$，则定义

$$\int_E f := \int_Q \widetilde{f}\,\mathbf{1}_E.$$

引理 19.9 (区域积分与延拓无关)**.** *若 $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ 是 f 的两个可积延拓，且 E Jordan 可测，则*

$$\int_Q \widetilde{f}_1 \mathbf{1}_E = \int_Q \widetilde{f}_2 \mathbf{1}_E.$$

证明. 设 $h = \widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2$。在 E 上 $h = 0$，故

$$h\mathbf{1}_E = 0$$

在整个 Q 上处处成立。两侧相等的函数积分相等，而

$$\widetilde{f}_1 \mathbf{1}_E - \widetilde{f}_2 \mathbf{1}_E = h\mathbf{1}_E = 0.$$

□

定理 19.10 (连续函数在 Jordan 区域上可积)**.** *若 $E \subset Q$ Jordan 可测，且 $f \in C(Q)$，则*

$$\int_E f := \int_Q f\mathbf{1}_E$$

存在。

证明. 由第十八章定理 18.12, f 在 Q 上可积; 由定理 19.6, $\mathbf{1}_E$ 可积; 再由乘积可积命题 18.14, $f\mathbf{1}_E$ 可积。 □

命题 19.11 (区域积分的线性性、保序性与估计)**.** *若 f, g 在 E 上由可积延拓定义，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

若 $f \le g$ 在 E 上，则

$$\int_E f \le \int_E g.$$

若 $|f| \le M$ 在 E 上，则

$$\left| \int_E f \right| \le MJ(E).$$

证明. 把 f, g 延拓到 Q，应用矩形上的线性性和保序性即可。若 $|f| \le M$ 在 E 上，延拓后的函数 $f\mathbf{1}_E$ 满足

$$-M\mathbf{1}_E \le f\mathbf{1}_E \le M\mathbf{1}_E.$$

积分保序性与 $\int_Q \mathbf{1}_E = J(E)$ 给出

$$-MJ(E) \le \int_E f \le MJ(E).$$

□

定理 19.12 (区域积分的有限可加性)**.** 设 $E_1, \dots, E_N \subset Q$ 是两两不交的 *Jordan* 可测集合，$f \in C(Q)$。则

$$\int_{\bigcup_{\ell=1}^{N} E_\ell} f = \sum_{\ell=1}^{N} \int_{E_\ell} f.$$

证明. 两两不交时，指标函数满足

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{\ell=1}^{N} E_\ell} = \sum_{\ell=1}^{N} \mathbf{1}_{E_\ell}.$$

乘以 f 并在 Q 上积分，使用有限次线性性得到结论。 □

19.3 曲线图形的零内容与正规区域

引理 19.13 (连续函数图形的零 Jordan 内容)**.** 设 $h \in C([a,b])$，其图形

$$\Gamma_h = \{(x, h(x)) : a \le x \le b\} \subset \mathbb{R}^2.$$

则 $J^*(\Gamma_h) = 0$。

证明. 给定 $\varepsilon > 0$。由一致连续性，取 $\delta > 0$，使

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |h(x) - h(x')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

取分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

使每个 $x_i - x_{i-1} < \delta$。对每个小区间 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，函数值集合 $h(I_i)$ 落在某个长度小于 $\varepsilon/(2(b-a))$ 的闭区间内。于是图形在矩形

$$R_i = I_i \times [c_i, c_i + \varepsilon/(2(b-a))]$$

中，其中 c_i 适当选择。若最后一个小区间长度不足以覆盖端点，增大高度至 $\varepsilon/(b-a)$ 即可。所有矩形面积之和满足

$$\sum_{i=1}^{N} |R_i| \le \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \right) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

因此 $J^*(\Gamma_h) = 0$。 □

定义 19.14 (上下正规区域)**.** 设 $a < b$，$\varphi, \psi \in C([a,b])$，且 $\varphi(x) \le \psi(x)$。定义上下正规区域

$$E = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

定理 19.15 (正规区域的 Jordan 可测性)**.** 上下正规区域 E 是 *Jordan* 可测的，且其边界包含于

$$\Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi \cup (\{a\} \times [\varphi(a), \psi(a)]) \cup (\{b\} \times [\varphi(b), \psi(b)]).$$

证明. 先证明边界包含关系。若 $x \in (a,b)$ 且 $\varphi(x) < y < \psi(x)$，由 φ, ψ 的连续性，存在邻域 I 使对所有 $x' \in I$ 都有 $\varphi(x') < y < \psi(x')$。再缩小邻域，使其中的点仍满足 $a < x' < b$，则该点是 E 的内点，不在边界。若 $y < \varphi(x)$ 或 $y > \psi(x)$，同样由严格不等式和连续性得到 E 的补集邻域。因此内部点和外部点之外只可能剩下两条图形和两个端点竖线，得到所写包含关系。

两条图形的外内容为零，由引理 19.13。端点竖线也可以用任意小宽度的矩形覆盖，故外内容为零。有限次次可加性给出 $J^*(\partial E) = 0$，所以 E Jordan 可测。 □

引理 19.16 (正规区域截面积分的连续性). 设 $f \in C(Q)$，其中 Q 包含正规区域

$$E = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

定义

$$H(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

则 $H \in C([a,b])$。

证明. 设 $M = \sup_Q |f|$。给定 $\varepsilon > 0$。由 f 在 Q 上一致连续性，存在 $\delta_1 > 0$，使

$$\|(x,y) - (x',y')\|_2 < \delta_1 \Longrightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

其中 L 取为大于 $b-a$ 及 $\max|\psi - \varphi|$ 的正数。由 φ, ψ 的一致连续性，取 $\delta_2 > 0$，使

$$|x - x'| < \delta_2 \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(x')| + |\psi(x) - \psi(x')| < \frac{\varepsilon}{4M+1}.$$

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$。把两个积分区间 $[\varphi(x), \psi(x)]$ 和 $[\varphi(x'), \psi(x')]$ 的交集记为 I，并把只属于其中一个的部分记为 I_1, I_2。则

$$\begin{aligned} |H(x) - H(x')| &\le \left| \int_I [f(x,y) - f(x',y)]\,dy \right| + M(|I_1| + |I_2|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2L}|I| + M\big(|\varphi(x) - \varphi(x')| + |\psi(x) - \psi(x')|\big). \end{aligned}$$

因为 $|I| \le L$，第一项小于 $\varepsilon/2$；缩小 δ_2 还可使第二项小于 $\varepsilon/2$。于是 $|H(x) - H(x')| < \varepsilon$，故 H 连续。 □

定理 19.17 (正规区域上的迭代积分公式). 设 E 是定义 *19.14* 的上下正规区域，且 $f \in C(Q)$，其中 Q 是包含 E 的闭盒体。则

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

证明. 记右侧的截面积分为 $H(x)$。由引理 19.16，H 连续，因此右侧存在。

令 $M = \sup_Q |f|$ 和 $A = b - a$。给定 $\varepsilon > 0$，先取 $\eta > 0$ 使 $MA\eta < \varepsilon/3$。由 φ, ψ 的一致连续性，存在 $\delta_1 > 0$，使

$$|x - x'| < \delta_1 \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(x')| + |\psi(x) - \psi(x')| < \eta. \tag{19.1}$$

再由 f 在 Q 上的一致连续性，取 $\delta_2 > 0$，使

$$|x - x'| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x,y) - f(x',y)| < \frac{\varepsilon}{3|Q|} \quad \text{对所有} y \in [c,d]. \tag{19.2}$$

取分割

$$a = x_0 < \cdots < x_N = b, \qquad \max_i \Delta x_i < \min\{\delta_1, \delta_2\},$$

并在 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 中任取标签 ξ_i。定义阶梯区域

$$E_{\mathcal{P}} = \bigcup_{i=1}^{N} \big(I_i \times [\varphi(\xi_i), \psi(\xi_i)] \big).$$

这些矩形的内部两两不交；它们的交集只可能位于竖直分割线，因此由区域积分的有限可加性，

$$\int_{E_{\mathcal{P}}} f = \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} \int_{\varphi(\xi_i)}^{\psi(\xi_i)} f(x,y)\, dy\, dx. \tag{19.3}$$

每个 $x \in I_i$ 上，区间 $[\varphi(x), \psi(x)]$ 与 $[\varphi(\xi_i), \psi(\xi_i)]$ 的对称差长度不超过

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi_i)| + |\psi(x) - \psi(\xi_i)| < \eta.$$

因此 $E \triangle E_{\mathcal{P}}$ 可被有限个竖直矩形条带覆盖，其总面积不超过 $A\eta$。由区域积分估计，

$$\left| \int_E f - \int_{E_{\mathcal{P}}} f \right| \le M A \eta < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{19.4}$$

对 (19.3) 中每个 $x \in I_i$，由 (19.2) 有

$$\left| \int_{\varphi(\xi_i)}^{\psi(\xi_i)} [f(x,y) - f(\xi_i, y)]\, dy \right| \le \frac{\varepsilon}{3|Q|} \big(\psi(\xi_i) - \varphi(\xi_i) \big).$$

乘以 Δx_i 后求和，因 $\sum_i \Delta x_i (\psi(\xi_i) - \varphi(\xi_i)) \le |Q|$，得到

$$\left| \int_{E_{\mathcal{P}}} f - \sum_{i=1}^{N} H(\xi_i) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{19.5}$$

最后，H 连续，所以一元取样和 $\sum_i H(\xi_i)\Delta x_i$ 在网格趋于零时趋于 $\int_a^b H(x)\,dx$。由 (19.4)、(19.5) 及三角不等式，沿任意网格趋零的分割都有

$$\left| \int_E f - \sum_{i} H(\xi_i) \Delta x_i \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

把最初的 ε 替换为 $3\varepsilon/2$，并令网格趋于零，得到

$$\int_E f = \int_a^b H(x)\, dx.$$

□

例 19.18 (三角形与圆盘的区域积分)**.** 三角形

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$$

是正规区域，对连续函数 f 有

$$\int_T f = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx.$$

单位圆盘

$$D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

也是正规区域，因为上下边界函数在 $[-1,1]$ 上连续。因此

$$\int_D f = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

特别地，取 $f \equiv 1$ 得

$$J(T) = \frac{1}{2}, \qquad J(D) = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \pi,$$

其中最后一个等式可由半圆面积的初等几何或后续三角换元独立证明；这里的积分公式本身只依赖本章的 Jordan 区域理论。

20　多重换元公式：线性与仿射情形

第十九章把区域积分定义在 Jordan 区域上。本章先完成换元理论中不可省略的线性部分：说明行列式为何是体积因子，证明可逆线性变换如何改变 Jordan 内容，再把结论推广到连续函数的积分。非线性换元的核心是用导数在小盒体上的线性近似；这一近似将在下一章单独处理。本章不把 $dy_1\cdots dy_n=|\det A|\,dx_1\cdots dx_n$ 当作记号规则，而从有限盒体覆盖和积分估计推出它。

20.1　行列式的代数性质

定义 20.1 (行列式)**.** 设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是 $n\times n$ 实矩阵。定义

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)},$$

其中 S_n 是 n 个元素的排列群，$\operatorname{sgn}(\sigma)\in\{1,-1\}$ 是排列的符号。

引理 20.2 (行列式的多线性与交错性)**.** *把矩阵 A 的列记为 $v_1,\dots,v_n$。函数*

$$D(v_1,\dots,v_n)=\det[v_1\ \cdots\ v_n]$$

对每一列分别线性；若两列相同，则 $D=0$；交换两列时符号改变。

证明. 固定除第 j 列外的所有列。Leibniz 公式中每一项含有第 j 列的一个坐标 $a_{k,\sigma(k)}$，因此把第 j 列替换为 $\alpha u+\beta v$ 后，每一项都变成相应两项的 α 倍与 β 倍之和，求和得到线性性。

若第 p,q 两列相同，把求和中的排列 σ 与 $\tau=(p\ q)\circ\sigma$ 配对。两项的乘积相同，而排列符号相反，故两项相加为零；所有项都能如此配对，所以行列式为零。交换两列等于在每一项中把排列右乘一个换位，排列符号改变为相反数，故行列式变号。 □

引理 20.3 (乘法公式)**.** *对任意 $n\times n$ 矩阵 A,B，有*

$$\det(AB)=\det A\,\det B.$$

证明. 把 B 的第 j 列记为 b_j。矩阵 AB 的第 j 列是 Ab_j。由引理 20.2 的多线性，

$$\det(AB)=D(Ab_1,\dots,Ab_n)$$

是 $b_1,\dots,b_n$ 的一个多线性交错函数。将每个 b_j 写成标准基 $e_1,\dots,e_n$ 的线性组合，交错性消去所有含重复指标的项，得到

$$D(Ab_1,\dots,Ab_n)=D(Ae_1,\dots,Ae_n)\det B.$$

这里 Ae_j 正是 A 的第 j 列，所以

$$D(Ae_1,\dots,Ae_n)=\det A.$$

代入即得乘法公式。 □

命题 20.4 (可逆性与行列式)**.** *若 A 可逆，则 $\det A \neq 0$，且*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

若 $\det A \neq 0$，则 A 可逆。

证明. 若 A 可逆，由引理 20.3，

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1}),$$

所以 $\det A \neq 0$。

反过来，若 $\det A \neq 0$，则 A 的列不能线性相关。否则某一列是其余列的线性组合；由行列式的多线性，把该列代入其余列的线性组合，每一项都出现重复列，因交错性全为零，从而 $\det A = 0$，矛盾。列线性无关意味着线性映射 $x \mapsto Ax$ 的核为 $\{0\}$。定义域和值域维数均为 n，故该映射满射并可逆。 □

20.2 平行六面体与 Jordan 内容

定义 20.5 (半开盒与平行六面体)**.** *对 $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$，定义平行六面体*

$$\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j v_j : 0 \leq t_j \leq 1 \right\}.$$

若 A 的列为 $v_1, \dots, v_n$，则

$$A([0,1]^n) = \mathcal{P}(v_1, \dots, v_n).$$

引理 20.6 (基本线性变换的体积因子)**.** *令 Q 为闭盒体，T 为下列一种线性变换：*

1. *交换两个坐标；*
2. *把一个坐标乘以 $\lambda \neq 0$；*
3. *把第 i 个坐标替换为 $x_i + cx_j$，其中 $i \neq j$。*

则 $T(Q)$ 是 Jordan 可测集，并且

$$J(T(Q)) = |\det T|\,|Q|.$$

证明. 先考虑 $Q = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$。

交换坐标只改变盒体边长的排列，故体积不变；其行列式绝对值为 1。

若第 i 个坐标乘以 λ，所得集合仍是盒体；第 i 个边长变为 $|\lambda|(b_i - a_i)$，所以体积乘以 $|\lambda|$，而行列式绝对值也乘以 $|\lambda|$。

最后考虑剪切

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i + cx_j, \dots, x_n).$$

固定除第 i, j 个坐标外的坐标。对固定的 x_j，第 i 个坐标区间只是平移 $[a_i, b_i]$，长度仍为 $b_i - a_i$。在 (x_i, x_j) 平面中，像是由两条平行线和两条斜线围成的平行四边形；它可由有限个

小矩形从内外逼近，且逼近误差只来自斜边两侧的条带。将 x_j 区间划分为网格小于 δ 的小区间时，每条斜边条带的总面积至多为

$$|c|(b_j-a_j)\delta+(b_i-a_i)\delta.$$

乘以其余坐标长度之积后，这个误差趋于 0。由矩形区域积分的有限可加性和上下逼近，平行四边形的 Jordan 内容等于

$$(b_i-a_i)(b_j-a_j)\prod_{k\neq i,j}(b_k-a_k)=|Q|.$$

剪切矩阵是单位矩阵加一个非对角元，Leibniz 公式中只有恒等排列有非零贡献，故其行列式为 1。因此结论成立。 □

引理 20.7 (线性变换的基本分解)**.** *每一个可逆矩阵 $A\in GL(n,\mathbb{R})$ 都可以写成有限个基本矩阵的乘积；基本矩阵对应于交换坐标、非零坐标伸缩或剪切。*

证明. 对 A 作高斯消元。由于 A 可逆，每一步都能在当前主元位置找到非零元素；交换两行把它移到主元位置，再用非零倍数缩放主元行，最后用剪切把主元列下方的元素消为零。对剩余的右下方子矩阵重复此过程，有限步后得到单位矩阵。每一步左乘的矩阵都是基本矩阵，因此存在基本矩阵 $E_1,\dots,E_N$ 使

$$E_N\cdots E_1A=I.$$

于是

$$A=E_1^{-1}\cdots E_N^{-1}.$$

基本矩阵的逆仍是同类基本矩阵，故 A 可写为有限个基本矩阵的乘积。 □

定理 20.8 (线性变换的 Jordan 内容公式)**.** *设 $A\in GL(n,\mathbb{R})$，$E\subset\mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集。则 $A(E)$ Jordan 可测，且*

$$J(A(E))=|\det A|\,J(E).$$

平移 $x\mapsto x+b$ 不改变 Jordan 内容。

证明. 先对闭盒体 Q 证明。由引理 20.7，把 A 写成基本矩阵乘积。每一步的内容因子由引理 20.6 给出；复合变换的内容因子是各步因子的乘积，而行列式乘法公式给出

$$J(A(Q))=|\det A|\,|Q|.$$

平移把盒体的每条边整体平移，不改变长度和内容。

对一般 Jordan 可测 E，给定 $\varepsilon>0$，取有限盒体并 $K_{\mathrm{in}}\subseteq E\subseteq K_{\mathrm{out}}$，使

$$J(K_{\mathrm{out}}\setminus K_{\mathrm{in}})<\varepsilon.$$

这里可以通过边界零内容和有限盒体逼近得到。线性映射把这两个有限盒体并变成有限个平行六面体并；由基本变换的条带逼近，它们仍可由有限盒体从内外逼近，且内容分别乘以 $|\det A|$。于是

$$J(A(K_{\mathrm{out}}))-J(A(K_{\mathrm{in}}))=|\det A|\,J(K_{\mathrm{out}}\setminus K_{\mathrm{in}}).$$

由于

$$A(K_{\mathrm{in}})\subseteq A(E)\subseteq A(K_{\mathrm{out}}),$$

夹逼并令 $\varepsilon\downarrow 0$，得到 $J(A(E))=|\det A|J(E)$。同样的内外盒体逼近说明 $A(E)$ 的边界外内容为零，因此 $A(E)$ Jordan 可测。 □

20.3 仿射换元公式

引理 20.9 (仿射变换保持连续性)**.** *设 $\Phi(x)=Ax+b$，则 Φ 连续；若 A 可逆，则 $\Phi^{-1}(y)=A^{-1}(y-b)$ 也连续。*

证明. 令 $\|A\|$ 为线性算子范数。则

$$\|\Phi(x)-\Phi(x')\|_2=\|A(x-x')\|_2\le\|A\|\,\|x-x'\|_2.$$

因此 Φ Lipschitz 连续。若 A 可逆，对 A^{-1} 应用同一估计即可。 □

定理 20.10 (可逆仿射变换的区域积分公式)**.** *设 $A\in GL(n,\mathbb{R})$，$\Phi(x)=Ax+b$，$E\subset\mathbb{R}^n$ Jordan 可测，且 f 在 $A(E)+b$ 的某个邻域上连续。则*

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\,dy=\int_E f(Ax+b)\,|\det A|\,dx.$$

证明. 令 $g(x)=f(Ax+b)|\det A|$。由引理 20.9，g 在 E 的邻域连续，故区域积分存在。

先对 $f\equiv 1$ 证明公式。此时左边为 $J(\Phi(E))$，右边为

$$|\det A|J(E),$$

二者由定理 20.8 相等。

对一般连续 f，取包含 E 的闭盒体 Q，并在 Q 上考虑 $f\circ\Phi$。给定 $\varepsilon>0$，由一致连续性选取一个矩形分割 $\mathcal{P}$，使同一小盒体内 $f\circ\Phi$ 的振幅小于 $\varepsilon/(2|\det A|\,|E|+1)$。将 E 用分割中的小盒体从内外逼近；边界相交的小盒体总体积可任意小。对每个不与边界相交的小盒体 R，选取 $\xi_R\in R$。线性内容公式给出

$$J(\Phi(R))=|\det A|\,|R|,$$

并且在 $\Phi(R)$ 上 f 的振幅与在 R 上 $f\circ\Phi$ 的振幅相同。因此对应取样和之差被

$$|\det A|\sum_R \omega(f\circ\Phi;R)|R|$$

控制；边界小盒体的贡献被 $\sup|f|\,|\det A|$ 乘以其总体积控制。先令分割网格足够小，再令边界盒体总内容足够小，得到

$$\left|\int_{\Phi(E)} f-\int_E f(Ax+b)|\det A|\,dx\right|<\varepsilon.$$

由于 ε 任意，公式成立。 □

推论 20.11 (坐标伸缩与剪切的积分公式)**.** *在定理 20.10 中：*

1. *若 $y_i=\lambda x_i$，其余坐标不变，则*
$$\int_{\Phi(E)} f(y)\,dy=\int_E f(\Phi(x))|\lambda|\,dx.$$
2. *若 $y_i=x_i+cx_j$，其余坐标不变，则 $|\det A|=1$，所以*
$$\int_{\Phi(E)} f(y)\,dy=\int_E f(\Phi(x))\,dx.$$

3. 若 $y = Ax + b$，则积分因子只由 $|\det A|$ 决定，而与矩阵分解所选的基本变换次序无关。

例 20.12 (椭圆的面积)**.** 设

$$E_{a,b} = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}, \qquad a, b > 0.$$

令 $A = \operatorname{diag}(a, b)$，则 $E_{a,b} = A(D)$，其中 D 是单位圆盘。由 $\det A = ab$ 以及第十九章的 $J(D) = \pi$，得到

$$J(E_{a,b}) = ab\, J(D) = \pi ab.$$

这一步只使用线性换元；圆盘面积本身的迭代积分在第十九章已经建立。

例 20.13 (平行四边形的面积)**.** 设 $u, v \in \mathbb{R}^2$ 线性无关。平行四边形

$$P = \{ su + tv : 0 \le s, t \le 1 \}$$

是矩阵 $A = [u\ v]$ 对单位正方形的像。由线性内容公式，

$$J(P) = |\det[u\ v]| = |u_1 v_2 - u_2 v_1|.$$

因此二维行列式绝对值正是平行四边形面积因子。

21　多重换元公式：非线性情形

第二十章已经证明可逆线性映射把体积乘以 $|\det A|$。若 $T:U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，在点 a 附近有

$$T(x)=T(a)+DT(a)(x-a)+\text{高阶误差}.$$

因此在足够小的盒体上，T 的体积变化应接近 $|\det DT(a)|$。本章把这句话写成可用于积分的估计，并在 T 是 C^1 微分同胚时证明

$$\int_{T(E)} f(y)\,dy=\int_E f(T(x))\,|\det DT(x)|\,dx.$$

绝对值来自内容而不是方向；若讨论有向积分，则需保留行列式的符号。

21.1　导数的线性近似

定义 21.1 (局部微分同胚)**.** 设 $U,V\subset\mathbb{R}^n$ 为开集。若 $T:U\to V$ 是双射，$T\in C^1(U)$，且 $T^{-1}\in C^1(V)$，则称 T 为 C^1 微分同胚。若只在某点的邻域上满足这些条件，则称 T 在该点附近是局部微分同胚。

引理 21.2 (一阶余项的统一估计)**.** 设 $T:U\to\mathbb{R}^n$ 为 C^1，$K\subset U$ 为紧集。给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使

$$x,a\in K,\quad \|x-a\|_2<\delta\Longrightarrow \|T(x)-T(a)-DT(a)(x-a)\|_2\le\varepsilon\|x-a\|_2.$$

证明. 由于 DT 在紧集 K 上一致连续，存在 $\delta>0$，使

$$\|DT(z)-DT(a)\|<\varepsilon$$

只要 $a,z\in K$ 且 $\|z-a\|<\delta$。若线段 $[a,x]\subset K$，由第二十章建立的向量值线段积分公式，

$$T(x)-T(a)=\int_0^1 DT(a+t(x-a))(x-a)\,dt.$$

减去 $DT(a)(x-a)$，得到

$$T(x)-T(a)-DT(a)(x-a)=\int_0^1 [DT(a+t(x-a))-DT(a)](x-a)\,dt.$$

取范数并使用算子范数，

$$\begin{aligned}\|T(x)-T(a)-DT(a)(x-a)\|&\le\int_0^1\|DT(a+t(x-a))-DT(a)\|\,\|x-a\|\,dt\\&\le\varepsilon\|x-a\|.\end{aligned}$$

本章应用于盒体时，把 K 取为包含盒体及其凸包的紧邻域，因而线段条件成立。　□

引理 21.3 (行列式的连续控制)**.** 设 L 是 $n\times n$ 矩阵。存在常数 $C_L>0$ 和 $\rho_L>0$，使当 $\|E\|\le\rho_L$ 时

$$|\det(L+E)-\det L|\le C_L\|E\|.$$

若 L 可逆，则当 $\|E\|$ 足够小时 $L+E$ 也可逆。

证明. 行列式的 Leibniz 公式是矩阵条目的有限次多项式。把 $L+E$ 代入每一项并展开，$\det(L+E)-\det L$ 的每一项都至少含有一个 E 的条目。若 $\|E\|\le 1$，所有 $L+E$ 的条目都被 $\|L\|+1$ 控制；有限项相加后存在常数 C_L，使差值不超过 $C_L\|E\|$。

若 L 可逆，令 $E=LH$。当 $\|L^{-1}E\|<1$ 时，第二十章的 Neumann 级数给出

$$L+E=L(I+L^{-1}E)$$

可逆。因此取 $\rho_L<1/\|L^{-1}\|$ 即可。 □

21.2 小盒体的体积畸变

引理 21.4 (线性像的薄层估计)**.** 设 $L\in GL(n,\mathbb{R})$。存在常数 $C_L>0$，使对任意闭盒体 R 和任意 $\rho\ge 0$，

$$J^*\big(L(R)+[-\rho,\rho]^n\big)\le|\det L|\,|R|+C_L\big(\rho\,(\operatorname{diam}R)^{n-1}+\rho^n\big).$$

证明. 设 $R=x_0+\prod_{j=1}^n[0,\ell_j]$，令 $h=\operatorname{diam}R$。平行六面体 $L(R)$ 的每个面都是 $n-1$ 个向量张成的平行六面体的平移。由第二十章基本变换的条带逼近，每个面周围厚度 ρ 的邻域可以用有限个盒体覆盖，其体积不超过 $C_1\rho h^{n-1}+C_2\rho^n$。这里 C_1,C_2 只依赖 L 和维数：面有有限个，且每个面的边长都不超过 $\|L\|h$。

把 $L(R)$ 与它的所有面邻域合并，就得到 $L(R)+[-\rho,\rho]^n$ 的盒体覆盖。因此

$$J^*(L(R)+[-\rho,\rho]^n)\le J(L(R))+C_1\rho h^{n-1}+C_2\rho^n.$$

由线性内容公式 $J(L(R))=|\det L||R|$，令 $C_L=\max\{C_1,C_2\}$ 即得结论。 □

定理 21.5 (局部内容畸变估计)**.** 设 $T:U\to\mathbb{R}^n$ 为 C^1，$a\in U$，且 $L=DT(a)$ 可逆。给定 $\varepsilon>0$，存在 $r>0$，使闭盒体 $R\subset B(a,r)$ 时

$$\big(|\det L|-\varepsilon\big)|R|\le J(T(R))\le\big(|\det L|+\varepsilon\big)|R|.$$

这里 r 足够小，使 T 在 $B(a,r)$ 上为单射。

证明. 由导数连续性，取 $r>0$，使

$$\|DT(x)-L\|<\eta\qquad(x\in B(a,r)),$$

其中 $\eta>0$ 稍后选定。对 $x,y\in B(a,r)$，沿线段积分得到

$$\|[T(x)-T(y)]-L(x-y)\|\le\eta\|x-y\|.\tag{21.1}$$

固定 $R\subset B(a,r)$，令 $h=\operatorname{diam}R$。取 $x_0\in R$，则由 (21.1)

$$T(R)\subset T(x_0)+L(R-x_0)+[-\eta h,\eta h]^n.$$

应用引理 21.4，

$$J(T(R)) \le |\det L||R| + C_L(\eta h^n + \eta^n h^n).$$

由于 $h^n \le n^{n/2}|R|$，只要 η 足够小，就有

$$J(T(R)) \le (|\det L| + \varepsilon)|R|. \tag{21.2}$$

为得到下界，先缩小 r，使 T 在 $B(a,r)$ 上为微分同胚。由逆函数定理，T^{-1} 在 $T(B(a,r))$ 上为 C^1，且

$$DT^{-1}(T(a)) = L^{-1}.$$

上面得到的上界并不依赖集合必须是一个盒体：对有限个内部不交盒体并，逐个应用盒体估计并求和；再对任意 Jordan 集取外盒体逼近，就得到同一上界

$$J(T^{-1}(S)) \le \big(|\det L^{-1}| + \eta_1\big) J(S) \tag{21.3}$$

其中 $S \subset T(B(a,r))$ 是 Jordan 集，η_1 可由缩小 r 任意取小。取 $S = T(R)$，则

$$|R| = J(T^{-1}(T(R))) \le \big(|\det L^{-1}| + \eta_1\big) J(T(R)).$$

选取 η_1 使

$$\frac{1}{|\det L^{-1}| + \eta_1} > |\det L| - \varepsilon.$$

于是

$$J(T(R)) \ge (|\det L| - \varepsilon)|R|.$$

□

21.3 局部换元公式

引理 21.6 (Jordan 集的细分逼近)**.** *设 $E \subset Q$ Jordan 可测。给定 $\varepsilon > 0$，存在有限个内部不交盒体 $R_1, \dots, R_N$，使*

$$J^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} R_j\right) < \varepsilon, \qquad J^*\left(\bigcup_{j=1}^{N} R_j \setminus E\right) < \varepsilon.$$

证明. 由 $J^*(\partial E) = 0$，取有限个盒体并 $B \supset \partial E$，满足 $J(B) < \varepsilon/2$。取一个包含 E 的矩形分割，使所有与边界相交的小盒体都包含于 B 的有限盒体覆盖中。其余小盒体或者完全包含于 E 的内部，或者完全包含于 E 的补集内部。令 R_j 遍历完全包含于 E 的小盒体。则 $E \setminus \bigcup_j R_j \subset B$，且 $\bigcup_j R_j \setminus E = \varnothing$。若需盒体严格内部不交，可把公共面分配给相邻盒体之一；公共面本身有零 Jordan 内容，不改变估计。 □

定理 21.7 (局部 C^1 换元公式)**.** *设 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$T : U \to V$ 是 C^1 微分同胚。设 $E \subset U$ 是紧 Jordan 可测集，$T(E)$ 也是 Jordan 可测集，且 $f \in C(T(E))$ 可延拓为 V 邻域上的连续函数。则*

$$\int_{T(E)} f(y)\,dy = \int_E f(T(x))\,|\det DT(x)|\,dx.$$

证明. 记

$$g(x) = f(T(x))\,|\det DT(x)|.$$

g 在 E 的邻域连续，故右侧存在。由于 E 紧且 T 为微分同胚，$T(E)$ 紧，左侧也存在。

给定 $\varepsilon > 0$。连续函数 $f\circ T$ 与 $|\det DT|$ 在 E 上一致连续；由 $\det DT$ 的连续性，存在 $\delta > 0$，使当 $\operatorname{diam} R < \delta$ 且 $R \cap E \neq \varnothing$ 时，

$$\operatorname{osc}_R(f\circ T) < \eta, \qquad \operatorname{osc}_R(|\det DT|) < \eta, \tag{21.3}$$

其中 $\eta > 0$ 稍后取定。另取 δ 足够小，使每个此类小盒体都落在某个局部内容畸变估计的邻域内。

取有限盒体逼近 E，并对这些盒体作网格小于 δ 的细分。对每个完全落在 E 内部的小盒体 R，取 $\xi_R \in R \cap E$。局部内容畸变估计给出

$$|J(T(R)) - |\det DT(\xi_R)|\,|R|| \le C\eta|R|, \tag{21.4}$$

其中 C 只依赖 E 上导数的有界范围和有限覆盖的数量。

在 $T(R)$ 上取点 $T(\xi_R)$ 作为标签。由 (21.3)，

$$\left| \int_{T(R)} f - f(T(\xi_R))J(T(R)) \right| \le \eta\, J(T(R)).$$

再利用 (21.4)，得到

$$\left| \int_{T(R)} f - f(T(\xi_R))|\det DT(\xi_R)|\,|R| \right| \le C'\eta|R|. \tag{21.5}$$

对所有内部盒体求和，误差不超过 $C'\eta|E|$。

剩下的边界盒体总体积可由 Jordan 可测性取得任意小。由于 f 和 g 在相应紧集上有界，边界盒体在两侧积分中的总贡献都被常数乘以边界盒体总内容控制。先取边界逼近误差足够小，再取 η 足够小，(21.5) 给出

$$\left| \int_{T(E)} f - \sum_{R} g(\xi_R)|R| \right| < \varepsilon.$$

另一方面，g 在 E 上连续，任意网格趋零的取样和都趋于 $\int_E g$。令网格趋于零，得到

$$\int_{T(E)} f = \int_E g = \int_E f(T(x))\,|\det DT(x)|\,dx.$$

□

推论 21.8 (全局换元公式)**.** *若 $T : U \to V$ 是 C^1 微分同胚，$E \Subset U$ 是紧 Jordan 可测集，$T(E)$ Jordan 可测，且 f 在 $T(E)$ 的邻域连续，则*

$$\int_{T(E)} f(y)\,dy = \int_E f(T(x))\,|\det DT(x)|\,dx.$$

证明. 这是定理 21.7 的直接应用。记号 $E \Subset U$ 表示 E 的闭包是 U 的紧子集，从而所有局部估计都在 U 内的一个紧邻域上统一成立。 □

21.4 极坐标换元

命题 21.9 (极坐标映射的 Jacobian)**.** 定义

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

在 $r > 0$ 的区域上，

$$DT(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det DT(r,\theta) = r.$$

证明. 逐项求偏导得到矩阵。行列式为

$$\cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

当 $r > 0$ 时行列式非零，因此极坐标映射在不跨越角度端点且不含 $r = 0$ 的小矩形上是局部微分同胚。 □

定理 21.10 (极坐标换元公式)**.** 设 $0 < a < b$，$\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$，并令

$$E = [a,b] \times [\alpha,\beta].$$

若 f 在

$$T(E) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$$

的邻域连续，则

$$\int_{T(E)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

证明. 在开集 $(0,\infty) \times (\alpha,\beta)$ 上，极坐标映射是局部微分同胚；由于 $\beta - \alpha < 2\pi$，它在 E 的内部是单射。边界由有限条线段和圆弧组成，具有零 Jordan 内容。应用定理 21.7，再使用 $|\det DT(r,\theta)| = r$，得到

$$\int_{T(E)} f = \int_E f(T(r,\theta)) r\,dr\,d\theta.$$

对矩形 E 应用第十九章的 Fubini 公式，便得到题述迭代积分。 □

例 21.11 (圆环面积)**.** 先在 $[0, 2\pi - \delta]$ 上应用定理 21.10，其中 $0 < \delta < 2\pi$。得到

$$\int_{T([a,b]\times[0,2\pi-\delta])} 1 = \int_0^{2\pi-\delta} \int_a^b r\,dr\,d\theta.$$

遗漏的角度扇形面积不超过 $\delta b^2/2$，因为它包含于半径 b、圆心角 δ 的扇形。令 $\delta \downarrow 0$，由区域积分的估计和一元极限得到整个圆环

$$A_{a,b} = \{(x,y) : a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$$

的内容

$$J(A_{a,b}) = \int_0^{2\pi} \int_a^b r\,dr\,d\theta = \pi(b^2 - a^2).$$

再令 $a \downarrow 0$，由单调性和一元极限得到半径 b 的圆盘面积 πb^2。原点的退化不影响结果，因为单点可被任意小盒体覆盖。

22 Lebesgue 外测度与可测集

Jordan 内容只允许有限个盒体覆盖。这个限制在有限分割的 Riemann 理论中是自然的，但它无法处理可数个小集合的并。例如有理数在区间中稠密，有限盒体覆盖不能把它的 Jordan 内容压到零；另一方面，有理数可以写成可数个单点的并，而单点应当具有零长度。Lebesgue 理论把“有限覆盖”改为“可数覆盖”，先构造外测度，再由切割恒等式选出真正可测的集合。本章只建立测度的集合论基础，积分留到下一章。

22.1 外测度的构造

定义 22.1 (盒体覆盖与 Lebesgue 外测度)**.** 在 $\mathbb{R}^n$ 中，闭盒体记为

$$R=\prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k],\qquad |R|=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k).$$

有界或无界集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 外测度定义为

$$\lambda^*(E)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|R_j| : E\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}R_j\right\}.$$

若某个覆盖只使用有限个盒体，则在其后补上体积为零的退化盒体，也视为可数覆盖。

引理 22.2 (外测度的基本性质)**.** 外测度满足：

1. $\lambda^*(\varnothing)=0$；
2. 若 $E\subseteq F$，则 $\lambda^*(E)\le\lambda^*(F)$；
3. 对任意集合列 $E_1,E_2,\dots$，
$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^*(E_k).$$

证明. 空集由空覆盖覆盖，故外测度不超过 0，而外测度非负，所以等于 0。

若 $E\subseteq F$，每个覆盖 F 的盒体列也是覆盖 E 的盒体列。对所有覆盖取下确界得到单调性。

最后设

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^*(E_k).$$

若 $S=+\infty$，结论自动成立。设 $S<+\infty$，给定 $\varepsilon>0$。对每个 k，由下确界定义选取盒体列 $R_{k,1},R_{k,2},\dots$，使

$$E_k\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}R_{k,j},\qquad \sum_{j=1}^{\infty}|R_{k,j}|<\lambda^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

把双指标列 $(R_{k,j})$ 按任意可数方式重新编号，它覆盖 $\bigcup_k E_k$，且总体积满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|R_{k,j}| < S + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = S + \varepsilon.$$

取下确界并令 $\varepsilon \downarrow 0$，得到可数次次可加性。 □

命题 22.3 (平移不变性)**.** *对任意 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和 $b \in \mathbb{R}^n$，有*

$$\lambda^*(E+b) = \lambda^*(E).$$

证明. 若 $E \subseteq \bigcup_j R_j$，则 $E+b \subseteq \bigcup_j (R_j + b)$，且 $|R_j + b| = |R_j|$。因此 $\lambda^*(E+b) \le \lambda^*(E)$。对 $E+b$ 应用同一论证并平移 $-b$，得到反向不等式。 □

引理 22.4 (盒体的外测度)**.** *对任意闭盒体 $Q \subset \mathbb{R}^n$，有*

$$\lambda^*(Q) = |Q|.$$

证明. 上界由只取覆盖 Q 本身得到：$\lambda^*(Q) \le |Q|$。

证明下界。设

$$Q = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k].$$

给定 $\varepsilon > 0$，把每个坐标区间扩大为

$$I_k = (a_k - \delta, b_k + \delta),$$

其中 $\delta > 0$ 足够小，使

$$\prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k + 2\delta) < |Q| + \varepsilon.$$

任意可数盒体覆盖 Q 都可把每个闭盒体稍微扩大为开盒体而不使总体积增加超过 $\varepsilon 2^{-j}$。于是只需证明：若开盒体列 U_j 覆盖 Q，则

$$\sum_{j}|U_j| \ge |Q|.$$

对每个 U_j 和每个坐标方向，把其开区间投影到第一个坐标轴。先在一维证明：闭区间 $[a_1, b_1]$ 被可数开区间覆盖时，区间长度不超过这些开区间长度之和。证明如下：取 $\eta > 0$，将 $[a_1, b_1]$ 稍微扩大为 $[a_1 - \eta, b_1 + \eta]$，由 Heine–Borel 从开覆盖中抽取有限子覆盖。对有限个开区间按左端点排序并合并重叠部分，合并后的总长度至少为 $b_1 - a_1 + 2\eta$，而不超过原开区间长度之和；令 $\eta \downarrow 0$ 得一维结论。

在 n 维，对开盒体覆盖作有限截断，再逐坐标应用上述一维结论和 Fubini 的矩形积分公式，得到

$$|Q| \le \sum_{j=1}^{N}|U_j|$$

对每个有限子覆盖成立。令 $N \to \infty$，得到 $|Q| \le \sum_j |U_j|$。因此任意盒体覆盖的总体积至少为 $|Q|$，结合上界即得等式。 □

推论 22.5 (Jordan 内容与外测度一致)**.** *若 E 是 Jordan 可测的有界集合，则*

$$\lambda^*(E) = J(E).$$

证明. Jordan 外内容只允许有限盒体覆盖, Lebesgue 外测度允许可数盒体覆盖, 所以 $\lambda^*(E) \le J(E)$。

另一方面，若 E 的边界外内容为零，则对任意 $\varepsilon > 0$，可以把 E 内外分别用有限盒体并逼近，且内容差小于 ε。任意可数盒体覆盖 E 的有限截断与一个包含 E 的大盒体共同组成外逼近；由盒体外测度等于体积以及边界误差趋于零，得到 $J(E) \le \lambda^*(E) + \varepsilon$。令 $\varepsilon \downarrow 0$，即得等式。 □

22.2 Carathéodory 可测性

定义 22.6 (Carathéodory 可测集)**.** 称集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue 可测，如果对每个 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 都有

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A). \tag{22.1}$$

由于外测度的次可加性总给出

$$\lambda^*(E) \le \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A),$$

可测性的内容是反向不等式。

引理 22.7 (零测集可测)**.** *若 $\lambda^*(N) = 0$，则 N Lebesgue 可测。*

证明. 对任意 E，有 $E \cap N \subseteq N$，故 $\lambda^*(E \cap N) = 0$。又 $E = (E \cap N) \cup (E \setminus N)$，次可加性给出

$$\lambda^*(E) \le \lambda^*(E \cap N) + \lambda^*(E \setminus N) = \lambda^*(E \setminus N).$$

单调性给出反向不等式 $\lambda^*(E \setminus N) \le \lambda^*(E)$。因此 (22.1) 成立。 □

引理 22.8 (可测集的有限并与补集)**.** *若 A, B 可测，则 A^c、$A \cup B$、$A \cap B$ 和 $A \setminus B$ 都可测。*

证明. 对补集，(22.1) 中的两部分正好交换，故 A^c 可测。

先证交集。对任意 E，把 A 的切割条件应用于 E，再把 B 的切割条件分别应用于 $E \cap A$ 与 $E \setminus A$。得到

$$\begin{aligned}\lambda^*(E) &= \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A) \\ &= \lambda^*(E \cap A \cap B) + \lambda^*(E \cap A \setminus B) + \lambda^*(E \setminus A).\end{aligned}$$

将后三项按集合包含关系与次可加性比较，可得

$$\lambda^*(E) \ge \lambda^*(E \cap A \cap B) + \lambda^*(E \setminus (A \cap B)).$$

另一方面次可加性给出反向不等式，故 $A \cap B$ 可测。

由德 Morgan 恒等式 $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$，并集可测。差集 $A \setminus B = A \cap B^c$ 可测。 □

定理 22.9 (可测集上的可数可加性)**.** *设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两不交的 Lebesgue 可测集。则*

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k).$$

证明. 次可加性给出

$$\lambda^*\left(\bigcup_k A_k\right) \le \sum_k \lambda^*(A_k).$$

证明反向不等式。令 $B_N = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$，由有限并可测性，$B_N$ 可测。对 $E = \bigcup_k A_k$ 反复应用切割恒等式：

$$\lambda^*(E) \ge \sum_{k=1}^{N} \lambda^*(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{N} \lambda^*(A_k),$$

因为 $A_k \subset E$，且各 A_k 两两不交。令 $N \to \infty$，得到

$$\lambda^*(E) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k).$$

与上界合并即得等式。 □

推论 22.10 (可测集的有限可加性)**.** *若 A, B 可测且不交，则*

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

证明. 在定理 22.9 中取 $A_1 = A, A_2 = B, A_k = \varnothing$ $(k \ge 3)$。 □

22.3 开集、闭集与 Borel 集

引理 22.11 (开集的可数盒分解)**.** *任意开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 都可以表示为可数个内部两两不交的半开盒体之并。*

证明. 对每个 $m \in \mathbb{N}$，考虑网格边长 2^{-m} 的半开盒体族

$$Q_{m,k} = \prod_{j=1}^{n} [k_j 2^{-m}, (k_j+1)2^{-m}), \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

其中完全包含于 G 的盒体构成可数族。按 m 递增选取：保留在较小尺度上出现、且不被之前选取盒体覆盖的盒体。由于两个不同网格盒体要么内部不交，要么其中一个包含于另一个，最终保留的盒体内部两两不交。对每个 $x \in G$，取 $\rho > 0$ 使 $B(x,\rho) \subset G$，再取 m 足够大使网格盒体直径小于 ρ；包含 x 的网格盒体完全落在 G，因此最终有一个保留盒体包含 x。故这些盒体并为 G。 □

定理 22.12 (开集与闭集可测)**.** *每个开集和每个闭集都是 Lebesgue 可测的。*

证明. 设 G 开。给定任意 $E \subset \mathbb{R}^n$，由引理 22.11，写

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

其中 Q_k 的内部两两不交。先对有限并 $G_N = \bigcup_{k=1}^{N} Q_k^\circ$ 证明可测性。每个半开盒体与一个闭盒体只差边界，边界可被任意薄的有限盒体覆盖，故边界是零测集；闭盒体可测，所以半开盒体可测，有限并可测。

对一般 G，G_N 递增且并为 G。对任意 E，应用

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap G_N) + \lambda^*(E \setminus G_N).$$

令 $N \to \infty$。第一项单调增加，第二项单调减少；由外测度的定义和可数次次可加性，可得

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap G) + \lambda^*(E \setminus G).$$

结合次可加性，G 可测。闭集是开集的补集，由引理 22.8 可测。 □

定义 22.13 (Borel 集)**.** 称包含所有开集的最小 σ-代数为 Borel σ-代数，属于其中的集合称为 Borel 集。

定理 22.14 (Borel 集可测)**.** *每个 Borel 集都是 Lebesgue 可测的。*

证明. 所有开集可测，所有可测集的补集可测；此外，由定理 22.9，可测集的可数并可测。故所有包含开集的 σ-代数都包含于 Lebesgue 可测集族，特别地 Borel σ-代数包含于其中。 □

22.4 零测集与测度的连续性

命题 22.15 (可数集是零测集)**.** *任意可数集 $C = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}^n$ 满足*

$$\lambda^*(C) = 0.$$

证明. 给定 $\varepsilon > 0$。对每个 j，取以 x_j 为中心、边长 $\ell_j > 0$ 的盒体 R_j，使

$$|R_j| = \ell_j^n < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

这些盒体覆盖 C，且

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| < \varepsilon.$$

取外测度下确界并令 $\varepsilon \downarrow 0$，得到 $\lambda^*(C) = 0$。 □

推论 22.16 (有理点集的测度)**.** *$\mathbb{Q}^n$ 是零测集。因此在任意盒体 Q 中，*

$$\lambda(Q \cap \mathbb{Q}^n) = 0, \qquad \lambda(Q \setminus \mathbb{Q}^n) = \lambda(Q).$$

证明. $\mathbb{Q}^n$ 可数，应用命题 22.15。补集与盒体的交集可测，且 $Q = (Q \cap \mathbb{Q}^n) \cup (Q \setminus \mathbb{Q}^n)$ 为不交并，应用有限可加性。 □

定理 22.17 (可测集测度的连续性)**.** *令 $\lambda(E) = \lambda^*(E)$ 对可测集 E 定义。*

1. *若 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 可测，$E = \bigcup_k E_k$，则*

$$\lambda(E) = \lim_{k \to \infty} \lambda(E_k).$$

2. *若 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ 可测，$\lambda(F_1) < \infty$，$F = \bigcap_k F_k$，则*

$$\lambda(F) = \lim_{k \to \infty} \lambda(F_k).$$

证明. 第一条令

$$A_1 = E_1, \qquad A_k = E_k \setminus E_{k-1} \quad (k \geq 2).$$

这些集合可测且两两不交，并且 $E = \bigcup_k A_k$、$E_N = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$。由可数与有限可加性，

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k), \qquad \lambda(E_N) = \sum_{k=1}^{N} \lambda(A_k).$$

非负级数的部分和趋于总和，得到第一条。

第二条令 $A_k = F_1 \setminus F_k$。则 A_k 递增且

$$\bigcup_k A_k = F_1 \setminus F.$$

由第一条和有限可加性，

$$\lambda(F_1) - \lambda(F) = \lim_{k\to\infty} \big(\lambda(F_1) - \lambda(F_k)\big),$$

整理即得 $\lambda(F_k) \to \lambda(F)$。 □

23 Lebesgue 积分：简单函数与单调收敛

第二十二章构造了 Lebesgue 测度。现在积分不再从取样点和分割出发，而从可测集合的分层出发：先对有限个可测集合的线性组合定义积分，再用单调逼近定义一般非负函数的积分。整个构造的关键是两点：简单函数的不同表示必须给出同一个数；非负函数的积分必须由所有简单下逼近共同决定。

23.1 可测函数

定义 23.1 (可测函数)**.** 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是可测集，函数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ 称为 Lebesgue 可测，如果对任意 $a \in \mathbb{R}$，集合

$$\{x \in X : f(x) > a\}$$

是可测集。若 f 只取有限实值，则称为有限值可测函数。

引理 23.2 (等价的水平集判据)**.** 对 $f : X \to [-\infty, \infty]$，下列条件等价：

1. 对任意 $a \in \mathbb{R}$，$\{f > a\}$ 可测；
2. 对任意 $a \in \mathbb{R}$，$\{f \geq a\}$ 可测；
3. 对任意 $a \in \mathbb{R}$，$\{f < a\}$ 可测；
4. 对任意 $a \in \mathbb{R}$，$\{f \leq a\}$ 可测。

证明. 假设 $\{f > a\}$ 对每个 a 可测。则

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > a - 1/k\}$$

是可测集，因为可测集对可数交封闭。又

$$\{f < a\} = X \setminus \{f \geq a\}, \qquad \{f \leq a\} = X \setminus \{f > a\},$$

所以后三个条件成立。

若从任一后三条件出发，可以用同样的补集和可数交公式反向得到 $\{f > a\}$ 可测。例如

$$\{f > a\} = X \setminus \{f \leq a\}.$$

□

命题 23.3 (连续函数和极限函数的可测性)**.** 连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 可测。若 f_k 是可测函数且 $f_k(x) \to f(x)$ 对每个 $x \in X$，则 f 可测。

证明. 若 f 连续，则

$$\{x : f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty))$$

是 X 中的相对开集，因而是 Borel 集和 Lebesgue 可测集。

设 $f_k \to f$ 点态收敛。对任意 $a \in \mathbb{R}$，有

$$\{f > a\} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k \ge N} \{f_k > a + 1/r\}. \tag{23.1}$$

证明集合恒等式。若 $f(x) > a$，取 r 使 $1/r < f(x) - a$。由 $f_k(x) \to f(x)$，存在 N 使 $f_k(x) > a + 1/r$ 对所有 $k \ge N$，故右侧包含 x。反之，若右侧包含 x，则存在 r, N 使 $f_k(x) > a + 1/r$ 对所有 $k \ge N$。令 $k \to \infty$，得到 $f(x) \ge a + 1/r > a$，故 $x \in \{f > a\}$。右侧是可测集的可数并交，所以 f 可测。 □

引理 23.4 (可测函数的代数运算)**.** *若 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 可测，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则 $\alpha f + \beta g$、fg、$|f|$、$\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 都可测。*

证明. 先说明截断确实保持可测性。对任意 $a \in \mathbb{R}$，由定义直接分情况可得

$$\{h_m > a\} = \begin{cases} X, & a < -m, \\ \{f > a\}, & -m \le a < m, \\ \varnothing, & a \ge m, \end{cases} \qquad h_m = \max\{-m, \min\{m, f\}\}.$$

因此 h_m 可测；并且对每个 x，当 $m > |f(x)|$ 时 $h_m(x) = f(x)$，故 $h_m(x) \to f(x)$。对 g 作同样的截断，记

$$f^{(r)} = \max\{-r, \min\{r, f\}\}, \qquad g^{(r)} = \max\{-r, \min\{r, g\}\}.$$

每个 $f^{(r)}, g^{(r)}$ 都是有界可测函数，并且当 $r \to \infty$ 时分别逐点收敛到 f, g。

先固定 r，并对有界函数 $f^{(r)}$ 取下阶梯近似

$$f_m^{(r)}(x) = 2^{-m} \left\lfloor 2^m f^{(r)}(x) \right\rfloor.$$

若 $f^{(r)}$ 的值落在固定有界区间 $[-r, r]$ 内，则 $f_m^{(r)}$ 只取有限多个值；对每个整数 k，

$$\{f_m^{(r)} = k2^{-m}\} = \{f^{(r)} \ge k2^{-m}\} \cap \{f^{(r)} < (k+1)2^{-m}\},$$

其中只需取使区间与 $[-r, r]$ 相交的有限多个 k。由引理 23.2，这些层集可测，所以 $f_m^{(r)}$ 是可测简单函数。对每个 x，令 $k_m = \lfloor 2^m f^{(r)}(x) \rfloor$，则

$$0 \le f^{(r)}(x) - f_m^{(r)}(x) < 2^{-m},$$

因而 $f_m^{(r)}(x) \to f^{(r)}(x)$。对 $g^{(r)}$ 同理得到 $g_m^{(r)}$。函数

$$\alpha f_m^{(r)} + \beta g_m^{(r)}, qquad f_m^{(r)} g_m^{(r)}$$

是可测简单函数；令 $m \to \infty$，命题 23.3 给出 $\alpha f^{(r)} + \beta g^{(r)}$ 与 $f^{(r)} g^{(r)}$ 可测。最后令 $r \to \infty$，有

$$\alpha f^{(r)} + \beta g^{(r)} \longrightarrow \alpha f + \beta g, \qquad f^{(r)} g^{(r)} \longrightarrow fg,$$

再次应用命题 23.3，得到线性组合和乘积可测。此外

$$|f| = \max\{f, -f\}, \qquad \max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2},$$

$$\min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2},$$

故绝对值、最大值和最小值也可测。 □

23.2 简单函数及其积分

定义 23.5 (非负简单函数)**.** 设 X 可测。若

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j}, \qquad a_j \geq 0,$$

其中 $E_j \subset X$ 可测，则称 φ 为非负简单函数。

引理 23.6 (简单函数的规范表示)**.** 每个非负简单函数都可以写成

$$\varphi = \sum_{k=1}^{M} c_k \mathbf{1}_{A_k},$$

其中 $c_k \geq 0$ 两两不同，$A_k = \{x : \varphi(x) = c_k\}$ 两两不交且并为 X。

证明. 若 $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j}$，它至多取有限个值 $c_1, \dots, c_M$。令 $A_k = \{x : \varphi(x) = c_k\}$。由可测函数的水平集判据，$A_k$ 可测；不同取值对应的集合不交，且每个 $x \in X$ 恰属于一个 A_k。在 A_k 上 $\varphi = c_k$，故所写表示成立。 □

定义 23.7 (简单函数积分)**.** 若 φ 是非负简单函数，取其规范表示

$$\varphi = \sum_{k=1}^{M} c_k \mathbf{1}_{A_k},$$

定义

$$\int_X \varphi \, d\lambda = \sum_{k=1}^{M} c_k \lambda(A_k),$$

允许该和取值 $+\infty$，并约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$。

定理 23.8 (简单函数积分的表示无关性)**.** 若

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j} = \sum_{\ell=1}^{L} b_\ell \mathbf{1}_{F_\ell}$$

是同一个非负简单函数的两个可测表示，则

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \lambda(E_j) = \sum_{\ell=1}^{L} b_\ell \lambda(F_\ell).$$

证明. 为处理表示中的集合不一定覆盖 X 的情形，补上零系数层：

$$\widetilde{E}_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j, \quad \widetilde{E}_j = E_j \ (j \geq 1), \quad \widetilde{a}_0 = 0, \quad \widetilde{a}_j = a_j,$$

$$\widetilde{F}_0 = X \setminus \bigcup_{\ell=1}^{L} F_\ell, \quad \widetilde{F}_\ell = F_\ell \ (\ell \geq 1), \quad \widetilde{b}_0 = 0, \quad \widetilde{b}_\ell = b_\ell.$$

于是两族集合各自都两两不交并覆盖 X，且补上的零项不改变原来的和。定义共同细分

$$G_{j\ell} = \widetilde{E}_j \cap \widetilde{F}_\ell \qquad (0 \leq j \leq N,\ 0 \leq \ell \leq L).$$

这些集合可测并两两不交。对固定 j，$\widetilde{E}_j = \bigcup_{\ell=0}^{L} G_{j\ell}$ 是有限不交并；对固定 ℓ，$\widetilde{F}_\ell = \bigcup_{j=0}^{N} G_{j\ell}$ 也是有限不交并。由有限可加性，

$$\lambda(\widetilde{E}_j) = \sum_{\ell=0}^{L} \lambda(G_{j\ell}), \qquad \lambda(\widetilde{F}_\ell) = \sum_{j=0}^{N} \lambda(G_{j\ell}).$$

在每个非空 $G_{j\ell}$ 上，两个表示的函数值相等，因此 $\widetilde{a}_j = \widetilde{b}_\ell$；若 $G_{j\ell}$ 为空，则对应测度为零。故

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} \widetilde{a}_j \lambda(\widetilde{E}_j) &= \sum_{j=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{L} \widetilde{a}_j \lambda(G_{j\ell}) \\ &= \sum_{j=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{L} \widetilde{b}_\ell \lambda(G_{j\ell}) = \sum_{\ell=0}^{L} \widetilde{b}_\ell \lambda(\widetilde{F}_\ell),\end{aligned}$$

去掉两边的零系数项，即得到原等式。 □

命题 23.9 (简单函数积分的基本性质)**.** *对非负简单函数 φ, ψ 和 $\alpha \geq 0$，有：*

1. *若 $\varphi \leq \psi$，则 $\int_X \varphi \leq \int_X \psi$；*
2. $$\int_X (\varphi + \psi) = \int_X \varphi + \int_X \psi;$$
3. $$\int_X \alpha\varphi = \alpha \int_X \varphi.$$

证明. 把两种表示分别补上 X 中未覆盖部分的零系数层，再取所有层集的交，即可把 φ, ψ 写成共同细分上的不交表示

$$\varphi = \sum_{k=1}^{M} a_k \mathbf{1}_{A_k}, \qquad \psi = \sum_{k=1}^{M} b_k \mathbf{1}_{A_k}.$$

若 $\varphi \leq \psi$，则 $a_k \leq b_k$，逐项乘以非负的 $\lambda(A_k)$ 并求和得到单调性。共同细分上

$$\varphi + \psi = \sum_{k} (a_k + b_k)\mathbf{1}_{A_k}, \qquad \alpha\varphi = \sum_{k} (\alpha a_k)\mathbf{1}_{A_k},$$

直接计算得到加法性和齐次性。表示无关性由定理 23.8 保证。 □

引理 23.10 (简单函数的下逼近)**.** *设 $f : X \to [0, \infty]$ 可测。则存在非负简单函数列 φ_m，满足*

$$0 \leq \varphi_m \leq \varphi_{m+1} \leq f, \qquad \varphi_m(x) \longrightarrow f(x)$$

对每个 $x \in X$ 成立。

证明. 令

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 2^{-m}\lfloor 2^m f(x) \rfloor, & 0 \leq f(x) < m, \\ m, & f(x) \geq m. \end{cases}$$

更明确地，把 $0 \leq k < m2^m$ 时的层集定义为

$$A_{m,k} = \{x : k2^{-m} \leq f(x) < (k+1)2^{-m}\},$$

并令

$$A_{m,\infty} = \{x : f(x) \ge m\}.$$

这些集合可测且两两不交，覆盖 X，于是

$$\varphi_m = \sum_{k=0}^{m2^m-1} k2^{-m}\mathbf{1}_{A_{m,k}} + m\mathbf{1}_{A_{m,\infty}}$$

是简单函数。显然 $0 \le \varphi_m \le f$。

若 $f(x) < \infty$，当 $m > f(x)$ 时，

$$0 \le f(x) - \varphi_m(x) < 2^{-m}.$$

若 $f(x) = +\infty$，则 $\varphi_m(x) = m \to +\infty$。因此 $\varphi_m(x) \to f(x)$。将 φ_m 替换为 $\max\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$，仍为简单函数，且得到单调递增列。 □

23.3 非负 Lebesgue 积分

定义 23.11 (非负函数的 Lebesgue 积分)**.** 设 $f : X \to [0, \infty]$ 可测。定义

$$\int_X f\, d\lambda = \sup\left\{ \int_X \varphi\, d\lambda : \varphi \text{ 为简单函数且} 0 \le \varphi \le f \right\}.$$

该上确界允许取 $+\infty$。

命题 23.12 (非负积分的保序性与齐次性)**.** *若 $0 \le f \le g$ 可测，则*

$$\int_X f\, d\lambda \le \int_X g\, d\lambda.$$

若 $c \ge 0$，则

$$\int_X (cf)\, d\lambda = c \int_X f\, d\lambda.$$

其中 $c = 0$ 时两边都按约定取为 0。

证明. 若 φ 是满足 $0 \le \varphi \le f$ 的简单函数，则也有 $\varphi \le g$；因此取定义中的上确界立即得到保序性。

设 $c > 0$。若 $\varphi \le f$ 是简单函数，则 $c\varphi \le cf$，从而

$$\int_X (cf)\, d\lambda \ge \sup_{0 \le \varphi \le f} \int_X (c\varphi)\, d\lambda = c \int_X f\, d\lambda.$$

反过来，若 $\eta \le cf$ 是简单函数，则 $c^{-1}\eta \le f$，所以

$$\int_X (cf)\, d\lambda = \sup_{0 \le \eta \le cf} \int_X \eta\, d\lambda \le c \sup_{0 \le \varphi \le f} \int_X \varphi\, d\lambda = c \int_X f\, d\lambda.$$

两边合并即得 $c > 0$ 的情形；$c = 0$ 由定义直接成立。 □

定理 23.13 (单调简单逼近给出的积分极限)**.** *若 φ_m 是引理 23.10 中的递增简单函数列，且 $\varphi_m \uparrow f$，则*

$$\int_X f\, d\lambda = \lim_{m \to \infty} \int_X \varphi_m\, d\lambda.$$

证明. 由 $\varphi_m \le f$，积分定义给出

$$\int_X \varphi_m \le \int_X f.$$

左侧数列单调递增，记其极限为 $L \le \int_X f$。

若 $L = +\infty$, 则 $L \le \int_X f$ 已经说明等式成立。以下设 $L < +\infty$。任取简单函数 $0 \le \psi \le f$, 令

$$Q_R = X \cap [-R, R]^n, \qquad \psi_R = \psi \mathbf{1}_{Q_R}.$$

固定 R 和 $0 < \theta < 1$，定义

$$E_m = \{x : \varphi_m(x) \ge \theta \psi_R(x)\}.$$

由于 φ_m, ψ_R 是简单函数，E_m 可测；又 $\varphi_m \uparrow f$ 且 $\theta\psi_R \le \theta f < f$ 在 $\{\psi_R > 0\}$ 上成立，所以

$$\{\psi_R > 0\} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

把 ψ_R 写成有限层表示

$$\psi_R = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbf{1}_{A_j}.$$

每个正值层集 A_j 包含于 Q_R，故 $\lambda(A_j) < \infty$。集合 $A_j \cap E_m$ 递增并覆盖 A_j，从而

$$\lambda(A_j \setminus E_m) \longrightarrow 0.$$

因此

$$\int_X \psi_R \mathbf{1}_{X \setminus E_m} = \sum_{j : c_j > 0} c_j \lambda(A_j \setminus E_m) \longrightarrow 0.$$

在 E_m 上有 $\psi_R \le \theta^{-1}\varphi_m$，于是由简单函数积分的保序性及有限可加性，

$$\int_X \psi_R \le \theta^{-1} \int_X \varphi_m + \int_X \psi_R \mathbf{1}_{X \setminus E_m}.$$

令 $m \to \infty$，再令余项趋于零，得到

$$\int_X \psi_R \le \theta^{-1} L.$$

最后 $R \to \infty$。由有限层表示和测度的递增连续性，

$$\int_X \psi_R \longrightarrow \int_X \psi,$$

故 $\int_X \psi \le \theta^{-1} L$。令 $\theta \uparrow 1$，得到 $\int_X \psi \le L$。对所有简单下逼近 ψ 取上确界，得到 $\int_X f \le L$。与 $L \le \int_X f$ 合并即得等式。 □

定理 23.14 (非负函数的单调收敛定理)**.** 设 $f_m : X \to [0, \infty]$ 可测，且

$$f_1 \le f_2 \le \cdots, \qquad f_m(x) \longrightarrow f(x).$$

则

$$\int_X f \, d\lambda = \lim_{m \to \infty} \int_X f_m \, d\lambda.$$

证明. 由单调性，

$$\int_X f_m \le \int_X f,$$

所以右侧极限 L 存在且 $L \le \int_X f$。

若 $L = +\infty$，则 $L \le \int_X f$ 已经说明 $\int_X f = +\infty$，等式成立。以下设 $L < +\infty$。

任取简单函数 $0 \le \psi \le f$。由于 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，令

$$Q_R = X \cap [-R, R]^n, \qquad \psi_R = \psi \mathbf{1}_{Q_R}.$$

则 ψ_R 是简单函数，$\psi_R \uparrow \psi$，且 ψ_R 的每个正值层集都具有有限测度。先固定 R，再固定 $0 < \theta < 1$，令

$$E_m = \{x : f_m(x) \ge \theta \psi_R(x)\}.$$

集合 E_m 可测：若 ψ_R 的不同取值为 $c_1, \dots, c_N$，则

$$E_m = \bigcup_{j=1}^{N} \big(\{\psi_R = c_j\} \cap \{f_m \ge \theta c_j\}\big).$$

由 $f_m \le f_{m+1}$，有 $E_m \subseteq E_{m+1}$。若 $x \in \{\psi_R > 0\}$，则 $f(x) \ge \psi_R(x) > \theta \psi_R(x)$；由 $f_m(x) \uparrow f(x)$，存在 m 使 $f_m(x) \ge \theta \psi_R(x)$。因而

$$\{\psi_R > 0\} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

把 ψ_R 写成规范的有限层表示

$$\psi_R = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbf{1}_{A_j}, \qquad c_j \ge 0.$$

对每个 j 且 $c_j > 0$，集合 $A_j \cap E_m$ 递增并覆盖 A_j。由于 $\lambda(A_j) < \infty$，由第二十二章测度对递增集合列的连续性，

$$\lambda(A_j \setminus E_m) \longrightarrow 0.$$

于是，利用有限和以及简单函数积分的定义，

$$\int_X \psi_R \mathbf{1}_{X \setminus E_m} = \sum_{j : c_j > 0} c_j \lambda(A_j \setminus E_m) \longrightarrow 0. \tag{23.2}$$

在 E_m 上有 $\psi_R \le \theta^{-1} f_m$，故由命题 23.12 以及简单函数积分的可加性，

$$\int_X \psi_R \le \theta^{-1} \int_X f_m + \int_X \psi_R \mathbf{1}_{X \setminus E_m}.$$

给定 $\varepsilon > 0$，由 (23.2) 选 m 使余项小于 ε。于是

$$\int_X \psi_R \le \theta^{-1} \int_X f_m + \varepsilon \le \theta^{-1} L + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，再令 $\theta \uparrow 1$，得到

$$\int_X \psi_R \le L. \tag{23.3}$$

最后由 $\psi_R \uparrow \psi$ 以及简单函数层集的有限可加性，

$$\int_X \psi_R = \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(A_j \cap Q_R) \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(A_j) = \int_X \psi.$$

令 $R \to \infty$ 于 (23.3)，得到 $\int_X \psi \le L$。该不等式对每一个简单函数 $0 \le \psi \le f$ 成立；按非负积分的定义取上确界，得到 $\int_X f \le L$。结合前面的 $L \le \int_X f$，即得所需等式。 □

命题 23.15 (积分的零值判据)**.** *若 $f \ge 0$ 可测，则*

$$\int_X f \, d\lambda = 0 \iff f = 0 \quad \text{几乎处处}.$$

证明. 若 $f = 0$ 几乎处处，则存在零测集 N 使 $f\mathbf{1}_{X\setminus N} = 0$。对任意简单函数 $0 \le \varphi \le f$，φ 在 $X \setminus N$ 上为零，故其积分只可能来自 N，而 $\lambda(N) = 0$，所以 $\int \varphi = 0$。取上确界得 $\int f = 0$。

反过来，若 $\int f = 0$，令

$$E_k = \{x : f(x) > 1/k\}.$$

由保序性，

$$0 \le \frac{1}{k}\lambda(E_k) = \int_X \frac{1}{k}\mathbf{1}_{E_k} \le \int_X f = 0,$$

故 $\lambda(E_k) = 0$。而

$$\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

是零测集，因此 $f = 0$ 几乎处处。 □

24 有符号 Lebesgue 积分与收敛定理

第二十三章只处理非负函数，因此可以允许积分取值 $+\infty$。要把积分用于极限、微分和方程，必须先处理符号变化：正部和负部要分别具有有限积分，任何代数运算都必须避免出现 $+\infty-\infty$。本章先证明非负积分的可加性，再定义有符号积分，随后建立 Fatou 引理、控制收敛定理及 L^1 意义下的近似与连续性。

24.1 正部、负部与零测集上的修改

定义 24.1 (几乎处处相等)**.** 设 $f,g:X\to[-\infty,\infty]$ 可测。若存在可测集 $N\subseteq X$，$\lambda(N)=0$，使得

$$f(x)=g(x)\qquad (x\in X\setminus N),$$

则称 $f=g$ 几乎处处，记作 $f=g$ a.e. 若 $f=0$ a.e.，称 f 几乎处处为零。

定义 24.2 (正部、负部与绝对值)**.** 对可测函数 $f:X\to[-\infty,\infty]$，定义

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\qquad f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

以及

$$|f|=f^+ + f^-.$$

这里 f^- 是“负值的大小”，不是带负号的负函数。

命题 24.3 (正部和负部的基本恒等式)**.** *若 f 可测，则 $f^+,f^-,|f|$ 都是非负可测函数，并且逐点成立*

$$f=f^+-f^-,\qquad |f|=f^++f^-,\qquad f^+=\frac{f+|f|}{2},\quad f^-=\frac{|f|-f}{2}.$$

此外

$$\{f^+>t\}=\{f>t\}\quad (t\ge 0),\qquad \{f^->t\}=\{f<-t\}\quad (t\ge 0).$$

证明. 对任意 $t\in\mathbb{R}$，集合 $\{f^+>t\}$ 可按 $t<0$、$t\ge 0$ 分别写成 X 或 $\{f>t\}$，故由水平集判据 f^+ 可测。对 f^- 同理，因为 $\{f^->t\}=X$（当 $t<0$）或 $\{f<-t\}$（当 $t\ge 0$）。

在每个点上，若 $f(x)\ge 0$，则 $f^+(x)=f(x)$、$f^-(x)=0$；若 $f(x)<0$，则 $f^+(x)=0$、$f^-(x)=-f(x)$；若 $f(x)=+\infty$ 或 $f(x)=-\infty$，结论仍按定义成立，而且不会在同一点同时出现 $f^+=f^-=+\infty$。逐点计算即得前两式。把这两式相加、相减，得到最后两式。 □

命题 24.4 (非负 Lebesgue 积分的可加性)**.** *若 $f,g:X\to[0,+\infty]$ 可测，则*

$$\int_X (f+g)\,d\lambda=\int_X f\,d\lambda+\int_X g\,d\lambda.$$

证明. 由简单函数下逼近引理，取递增简单函数列 $\varphi_m\uparrow f$ 与 $\psi_m\uparrow g$。令

$$h_m=\varphi_m+\psi_m.$$

每个 h_m 是简单函数，且 $h_m \le h_{m+1}$。对每个 x，两列分别递增收敛到 $f(x)$、$g(x)$，所以

$$h_m(x) \uparrow f(x)+g(x).$$

由简单函数积分的加法性和第二十三章的单调简单逼近定理，

$$\begin{aligned}\int_X (f+g) &= \lim_{m\to\infty} \int_X h_m \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\int_X \varphi_m + \int_X \psi_m \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_X \varphi_m + \lim_{m\to\infty} \int_X \psi_m \\ &= \int_X f + \int_X g.\end{aligned}$$

最后一个等号允许右侧取 $+\infty$：两个非负递增数列的和的极限等于其极限之和。 □

命题 24.5 (零测集上的非负函数)**.** *若 N 可测且 $\lambda(N)=0$，$h: X \to [0,+\infty]$ 可测，并且 $h=0$ 在 $X\setminus N$ 上成立，则*

$$\int_X h \, d\lambda = 0.$$

证明. 任取简单函数 $0 \le \varphi \le h$，则 $\varphi = 0$ 在 $X\setminus N$ 上成立。把 φ 写成规范分层表示，所有正值层集都包含于 N，因而每个正值层集的测度为零。简单函数积分等于各层系数乘以层集测度之和，故 $\int_X \varphi = 0$。对所有这样的 φ 取上确界，得到 $\int_X h = 0$。 □

命题 24.6 (零测集修改不改变非负积分)**.** *若 $f, g: X \to [0,+\infty]$ 可测且 $f = g$ a.e.，则*

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X g \, d\lambda.$$

证明. 取零测集 N 使 $f=g$ 在 $X\setminus N$ 上成立，定义

$$f_0 = f\mathbf{1}_{X\setminus N}, \quad f_N = f\mathbf{1}_N, \qquad g_0 = g\mathbf{1}_{X\setminus N}, \quad g_N = g\mathbf{1}_N.$$

则 $f_0 = g_0$ 逐点成立。由上一命题，$\int f_N = \int g_N = 0$。由非负积分的可加性，

$$\int f = \int f_0 + \int f_N = \int g_0 + \int g_N = \int g.$$

□

正部和负部可以直观地看成把一条有符号函数图像分别投影到 x 轴的上方和下方。下面的图取 $f(t)=t^2-1$，蓝色曲线是 f，红色曲线是 f^+，绿色曲线是 f^-；绿色曲线画的是负部的正值大小，因此恒在 x 轴上方。

24.2 有符号积分与 L^1 空间

定义 24.7 (可积函数与有符号积分)**.** 可测函数 $f: X \to [-\infty,+\infty]$ 称为 Lebesgue 可积，如果

$$\int_X |f| \, d\lambda < +\infty.$$

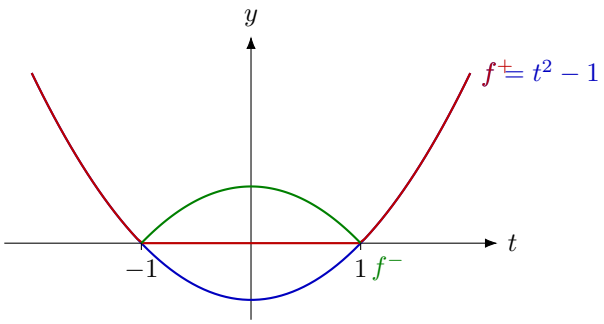


图 24.1: 正部与负部的几何分解：$f = f^+ - f^-$。

所有可积函数组成的集合记为 $L^1(X)$。对 $f \in L^1(X)$，定义

$$\int_X f\,d\lambda = \int_X f^+\,d\lambda - \int_X f^-\,d\lambda.$$

并定义 L^1 范数

$$\|f\|_1 = \int_X |f|\,d\lambda.$$

引理 24.8 (可积函数的正部和负部有限)**.** *若 $f \in L^1(X)$，则*

$$\int_X f^+ < +\infty, qquad \int_X f^- < +\infty,$$

且

$$\int_X |f| = \int_X f^+ + \int_X f^-.$$

因此定义 24.7 中的差不是 $+\infty - (+\infty)$，而是两个有限实数之差。

证明. 由命题 24.3，$|f| = f^+ + f^-$。应用非负积分的可加性，

$$\int_X |f| = \int_X f^+ + \int_X f^-.$$

左侧有限且右侧两项非负，故两项都有限。 □

命题 24.9 (有符号积分的三角不等式)**.** *若 $f \in L^1(X)$，则*

$$\left|\int_X f\,d\lambda\right| \le \int_X |f|\,d\lambda = \|f\|_1.$$

若 $f, g \in L^1(X)$，则 $f + g \in L^1(X)$，且

$$\|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

证明. 记 $A = \int f^+$、$B = \int f^-$。则 $A, B < \infty$，并且

$$\left|\int f\right| = |A - B| \le A + B = \int |f|.$$

另一方面逐点有 $|f + g| \le |f| + |g|$。由非负积分的保序性和可加性，

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \le \int (|f| + |g|) = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

右侧有限，所以 $f + g$ 可积。 □

定理 24.10 (有符号积分的线性性)**.** *若 $f, g \in L^1(X)$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则*

$$\alpha f + \beta g \in L^1(X), \qquad \int_X (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_X f + \beta \int_X g.$$

证明. 由三角不等式和齐次性，

$$|\alpha f + \beta g| \le |\alpha|, |f| + |\beta|, |g|,$$

故右侧积分有限，$\alpha f + \beta g$ 可积。

先证加法性。令 $h = f + g$，并定义非负可测函数

$$q = \frac{|f| + |g| - |h|}{2}.$$

三角不等式保证 $q \ge 0$，且 q 可积。利用 $u^+ = (u + |u|)/2$、$u^- = (|u| - u)/2$，逐点计算得

$$f^+ + g^+ = h^+ + q, \qquad f^- + g^- = h^- + q.$$

对两式积分并使用非负积分的可加性，得到

$$\int f^+ + \int g^+ = \int h^+ + \int q, \qquad \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int q.$$

四个正部/负部积分以及 $\int q$ 都是有限数，逐式相减可消去 $\int q$，从而

$$\int h = \int f + \int g.$$

若 $\alpha \ge 0$, 则 $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$、$(\alpha f)^- = \alpha f^-$, 所以 $\int \alpha f = \alpha \int f$。若 $\alpha < 0$, 则 $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$、$(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$，仍得到 $\int \alpha f = \alpha \int f$。合并加法性即得结论。 □

命题 24.11 (积分对几乎处处相等的函数不变)**.** *若 $f, g \in L^1(X)$ 且 $f = g$ a.e.，则*

$$\int_X f = \int_X g, \qquad \|f - g\|_1 = 0.$$

证明. 由 $f = g$ a.e.，有 $|f| = |g|$ a.e.，故正部积分相同，且 $\int |f| = \int |g| < \infty$。

取零测集 N 使 $f = g$ 在 $X \setminus N$ 上成立。函数 $h = (f - g)\mathbf{1}_N$ 的正部和负部都支撑在 N 上，由命题 24.5 它们的积分都为零。因此 $\int (f - g) = 0$，即 $\int f = \int g$。同理 $|f - g|$ 支撑在 N 上，故 $\|f - g\|_1 = 0$。 □

24.3 Fatou 引理

引理 24.12 (可数下确界的可测性)**.** *若 $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ 可测，则*

$$g_k(x) = \inf_{n \ge k} f_n(x)$$

可测，且 $g_k \le g_{k+1}$。

证明. 对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\{g_k > a\} = \bigcap_{n \ge k} \{f_n > a\},$$

是可测集的可数交, 因此 g_k 可测。由于取下确界的指标集合随 k 增大而缩小，$g_k \le g_{k+1}$。 □

定理 24.13 (Fatou 引理)**.** 设 $f_n : X \to [0, +\infty]$ 可测。则

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda.$$

若 $f_n \to f$ *a.e.*，则左侧可以写成 $\int_X f$。

证明. 令

$$g_k = \inf_{n \ge k} f_n.$$

由引理，g_k 可测且递增，并且 $g_k \uparrow \liminf_n f_n$。由单调收敛定理，

$$\int_X \liminf_n f_n = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k.$$

对每个 k 和每个 $n \ge k$，有 $g_k \le f_n$，故积分保序性给出

$$\int_X g_k \le \inf_{n\ge k} \int_X f_n.$$

令 $k \to \infty$，得到

$$\int_X \liminf_n f_n \le \lim_{k\to\infty} \inf_{n\ge k} \int_X f_n = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n.$$

若收敛只在 $X \setminus N$ 上成立，取零测集 N 后把所有函数乘以 $\mathbf{1}_{X\setminus N}$。由零测集不变性，积分不变，而在新函数上收敛处处成立。 □

推论 24.14 (反向 Fatou 引理的有界形式)**.** 设 $f_n : X \to \mathbb{R}$ 可测，存在可积函数 $g \ge 0$ 使

$$|f_n| \le g \quad a.e.$$

且 $f_n \to f$ *a.e.*。则

$$\int_X f \, d\lambda \ge \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda.$$

证明. 由 $|f_n| \le g$，在去掉一个零测集后 $g - f_n \ge 0$。对非负函数 $g - f_n$ 应用 Fatou 引理，并使用零测集不变性，

$$\int_X (g - f) \le \liminf_n \int_X (g - f_n).$$

所有函数均可积；由有符号积分的线性性，

$$\int g - \int f \le \int g - \limsup_n \int f_n.$$

消去有限的 $\int g$，得到所需不等式。 □

24.4 控制收敛与 L^1 近似

定理 24.15 (Lebesgue 控制收敛定理)**.** 设 $f_n : X \to \mathbb{R}$ 可测，且 $f_n \to f$ *a.e.*。若存在 $g \in L^1(X)$ 满足

$$|f_n| \le g \quad a.e. \text{ 对所有} n,$$

则 $f \in L^1(X)$，并且

$$\int_X f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_X f \, d\lambda, \qquad \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0.$$

证明. 去掉所有控制不等式和点态收敛失败的零测集后，可设这些关系处处成立。取极限得 $|f| \le g$，所以 $f \in L^1(X)$。

函数 $g + f_n$ 和 $g - f_n$ 非负。对它们应用 Fatou 引理，分别得到

$$\int (g+f) \le \liminf_n \int (g+f_n),$$

$$\int (g-f) \le \liminf_n \int (g-f_n).$$

利用有符号积分线性性，第一式给出

$$\int g + \int f \le \int g + \liminf_n \int f_n,$$

即

$$\int f \le \liminf_n \int f_n.$$

第二式给出

$$\int g - \int f \le \int g - \limsup_n \int f_n,$$

即

$$\limsup_n \int f_n \le \int f.$$

上下极限相等，所以积分收敛。

最后令 $u_n = |f_n - f|$。则 $u_n \to 0$ 且 $0 \le u_n \le 2g$。非负函数 $2g - u_n$ 逐点收敛到 $2g$，由 Fatou 引理，

$$2\int g = \int (2g) \le \liminf_n \int (2g - u_n) = 2\int g - \limsup_n \int u_n.$$

因此 $0 \le \limsup_n \int u_n \le 0$，即 $\|f_n - f\|_1 = \int u_n \to 0$。 □

推论 24.16 (有限测度空间上的有界收敛定理)**.** *若 $\lambda(X) < +\infty$，$f_n \to f$ a.e.，且存在 $M < +\infty$ 使 $|f_n| \le M$ a.e.，则*

$$\int_X f_n \to \int_X f, \qquad \|f_n - f\|_1 \to 0.$$

证明. 取 $g = M\mathbf{1}_X$。由于 $\int_X g = M\lambda(X) < +\infty$，故 $g \in L^1(X)$。应用控制收敛定理即可。 □

命题 24.17 (积分的 L^1 连续性)**.** *若 $f, g \in L^1(X)$，则*

$$\left| \int_X f - \int_X g \right| \le \|f - g\|_1.$$

特别地，若 $\|f_n - f\|_1 \to 0$，则 $\int f_n \to \int f$。

证明. 由积分线性性与三角不等式，

$$\left| \int f - \int g \right| = \left| \int (f-g) \right| \le \int |f-g| = \|f-g\|_1.$$

□

定理 24.18 (可积函数的简单函数 L^1 逼近)**.** 对每个 $f \in L^1(X)$，存在有界简单函数列 s_m，使

$$\|s_m - f\|_1 \longrightarrow 0.$$

若 f 有限值，则可以取 s_m 在每一点都有限值，并且 $s_m(x) \to f(x)$ *a.e.*。

证明. 由简单函数下逼近引理，取递增简单函数列 $\varphi_m \uparrow f^+$ 与 $\psi_m \uparrow f^-$。令

$$s_m = \varphi_m - \psi_m.$$

每个 s_m 是有界简单函数。逐点有

$$|f - s_m| = |(f^+ - \varphi_m) - (f^- - \psi_m)| \le (f^+ - \varphi_m) + (f^- - \psi_m).$$

右侧非负，并由单调收敛定理分别满足

$$\int (f^+ - \varphi_m) = \int f^+ - \int \varphi_m \to 0, \qquad \int (f^- - \psi_m) = \int f^- - \int \psi_m \to 0.$$

这里等式由非负积分的可加性应用于 $f^+ = \varphi_m + (f^+ - \varphi_m)$ 得到。于是

$$\|f - s_m\|_1 = \int |f - s_m| \to 0.$$

若 f 有限值，则两列单调逼近逐点收敛，故 $s_m \to f$ 逐点；一般情形至少在 f 为有限值的点上成立。 □

定理 24.19 (积分的绝对连续性)**.** 若 $f \in L^1(X)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对任意可测集 $E \subseteq X$，

$$\lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E |f|\, d\lambda < \varepsilon.$$

证明. 取递增简单函数列 $\varphi_m \uparrow |f|$。由单调收敛定理，$\int (|f| - \varphi_m) \to 0$。选 m 使

$$\int_X (|f| - \varphi_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

写成规范分层表示

$$\varphi_m = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbf{1}_{A_j}, \qquad c_j \ge 0,$$

并令 $C = \max_j c_j$。若 $C = 0$，取任意 $\delta > 0$；否则取 $\delta = \varepsilon/(2C)$。当 $\lambda(E) < \delta$ 时，

$$\int_E \varphi_m = \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(E \cap A_j) \le C\lambda(E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $|f| = \varphi_m + (|f| - \varphi_m)$，由保序性和可加性，

$$\int_E |f| \le \int_E \varphi_m + \int_X (|f| - \varphi_m) < \varepsilon.$$

□

25 乘积测度、Tonelli 定理与 Fubini 定理

前面已经在 $\mathbb{R}^n$ 中构造了 Lebesgue 测度，并把非负函数的积分定义为简单函数下逼近的上确界。本章研究两个变量的积分。关键问题不是把符号 $\int\int f$ 写出来，而是证明两个操作确实可以交换：先固定第二个变量求第一变量的积分，再对第二变量积分，所得结果等于整个乘积空间上的积分。对于非负函数，允许积分为 $+\infty$，结论称为 Tonelli 定理；对于有符号函数，必须先要求绝对可积，结论称为 Fubini 定理。

为避免把低维和高维记号混在一起，固定 $p, q \in \mathbb{N}$，令

$$X = \mathbb{R}^p, \qquad Y = \mathbb{R}^q, qquadZ = X \times Y \cong \mathbb{R}^{p+q}.$$

分别用 $\lambda_p, \lambda_q, \lambda_{p+q}$ 表示三个空间上的 Lebesgue 测度。

25.1 截面与矩形

定义 25.1 (水平截面和竖直截面)**.** 设 $E \subseteq X \times Y$。对 $y \in Y$ 和 $x \in X$，定义

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}, \qquad E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

若 $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$，定义

$$f^y(x) = f(x, y), \qquad f_x(y) = f(x, y).$$

引理 25.2 (矩形的截面)**.** 设 $A \subseteq X$、$B \subseteq Y$ 可测，则对任意 $y \in Y$、$x \in X$，

$$(A \times B)^y = \begin{cases} A, & y \in B, \\ \varnothing, & y \notin B, \end{cases} \qquad (A \times B)_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \varnothing, & x \notin A. \end{cases}$$

若 A, B 测度有限，则

$$\lambda_p(A)\lambda_q(B) = \int_Y \lambda_p((A \times B)^y)\, d\lambda_q(y) = \int_X \lambda_q((A \times B)_x)\, d\lambda_p(x).$$

证明. 由定义，$x \in (A \times B)^y$ 当且仅当 $x \in A$ 且 $y \in B$。这给出第一组截面公式，第二组同理。

记 $a = \lambda_p(A)$、$b = \lambda_q(B)$。函数 $y \mapsto \lambda_p((A \times B)^y)$ 等于 $a\mathbf{1}_B(y)$。若 $a, b < \infty$，它是简单函数，故

$$\int_Y a\mathbf{1}_B(y)\, d\lambda_q(y) = a\lambda_q(B) = ab.$$

另一侧完全相同。若某一测度为 $+\infty$，同一计算在非负积分的扩展意义下仍成立。 □

命题 25.3 (截面运算)**.** 对任意集合列 $E_k \subseteq X \times Y$，以及任意 $y \in Y$，有

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^y = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^y, \qquad \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)^y = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^y, \qquad (E^c)^y = (E^y)^c.$$

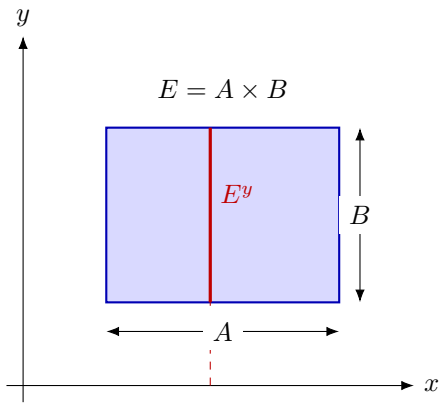


图 25.1: 矩形的截面：固定 $y \in B$ 时，水平截面等于 A。

证明. 例如，对任意 $x \in X$，

$$x \in \left(\bigcup_k E_k\right)^y \iff (x,y) \in \bigcup_k E_k \iff \exists k\ (x,y) \in E_k \iff x \in \bigcup_k E_k^y.$$

交集和补集只需把存在量词分别换成全称量词和否定，得到另外两式。 □

25.2　可测集合的截面定理

定义 25.4 (乘积测度的可测矩形)**.** 令 $\mathcal{R}$ 为所有形如 $A \times B$ 的矩形，其中 $A \subseteq X$、$B \subseteq Y$ Lebesgue 可测。矩形体积定义为

$$m(A \times B) = \lambda_p(A)\lambda_q(B).$$

在 $Z \cong \mathbb{R}^{p+q}$ 上，Lebesgue 测度 λ_{p+q} 是包含这些矩形的标准测度；下面的截面定理说明它与两侧迭代积分相容。

定理 25.5 (可测集合的截面定理)**.** *若 $E \subseteq X \times Y$ 是 λ_{p+q}-可测集，则：*

1. *对几乎处处的 $y \in Y$，截面 E^y 是 λ_p-可测集；对几乎处处的 $x \in X$，截面 E_x 是 λ_q-可测集；*
2. *函数*
$$y \longmapsto \lambda_p(E^y), \qquad x \longmapsto \lambda_q(E_x)$$
在修改于零测集后可测；
3. *允许值为 $+\infty$ 时，*
$$\lambda_{p+q}(E) = \int_Y \lambda_p(E^y)\, d\lambda_q(y) = \int_X \lambda_q(E_x)\, d\lambda_p(x).$$

证明. 证明分为有限盒体和一般集合两步。首先设 $Q = I \times J$，其中 $I \subseteq X$、$J \subseteq Y$ 为闭盒体。由引理，$Q^y = I$（当 $y \in J$），否则为空，所以

$$\int_Y \lambda_p(Q^y)\, d\lambda_q(y) = |I|\,|J| = |Q|.$$

有限个两两不交盒体的结论由截面有限不交并和简单函数积分的有限可加性得到。

令 $\mathcal{C}$ 为所有满足以下性质的集合类：对 $E \in \mathcal{C}$，存在零测集 $N_E \subseteq Y$，使 E^y 对 $y \notin N_E$ 可测，函数 $y \mapsto \lambda_p(E^y)$ 在去掉 N_E 后可测，并且

$$\lambda_{p+q}(E) = \int_Y \lambda_p(E^y)\, d\lambda_q(y).$$

有限盒体并属于 $\mathcal{C}$。若 $E_1, E_2, \ldots$ 两两不交且属于 $\mathcal{C}$，令 $E = \bigcup_k E_k$，取所有对应的零测集并集 $N = \bigcup_k N_{E_k}$，仍为零测集。对 $y \notin N$，截面两两不交且

$$E^y = \bigcup_k E_k^y.$$

由测度的可数可加性，

$$\lambda_p(E^y) = \sum_k \lambda_p(E_k^y).$$

右侧是非负可测函数列的和，因而可测；由非负积分的单调收敛定理，

$$\int_Y \lambda_p(E^y) = \sum_k \int_Y \lambda_p(E_k^y) = \sum_k \lambda_{p+q}(E_k) = \lambda_{p+q}(E).$$

因此 $\mathcal{C}$ 对两两不交可数并封闭。

要处理补集，先在有限盒体 $Q_0 = I_0 \times J_0$ 内工作。若 $E \subseteq Q_0$ 属于 $\mathcal{C}$，则对几乎处处的 $y \in J_0$，

$$(Q_0 \setminus E)^y = I_0 \setminus E^y,$$

而 $E^y \subseteq I_0$，故

$$\lambda_p((Q_0 \setminus E)^y) = |I_0| - \lambda_p(E^y).$$

右侧可测，且

$$\int_{J_0} \lambda_p((Q_0 \setminus E)^y) = |I_0||J_0| - \int_{J_0} \lambda_p(E^y) = |Q_0| - \lambda_{p+q}(E) = \lambda_{p+q}(Q_0 \setminus E).$$

于是 $Q_0 \setminus E \in \mathcal{C}$。将一般 E 与盒体 $[-r, r]^{p+q}$ 截断，并把这些截断按不交层分解，可得 $E \in \mathcal{C}$。

对 x 的截面交换 X, Y 的角色，得到第二个迭代公式。以上证明同时说明可测性只可能在零测集上失败；把失败截面任意定义为零即可得到“修改于零测集后可测”的表述。 □

注 25.6. 截面定理中“几乎处处”不能一般改成“处处”。Lebesgue 可测集可以与一个零测集发生修改；某个特殊参数的截面可能落在未完成的零测异常集合中。积分只看到零测集之外的行为，因此定理的正确形式必须允许删去参数空间中的零测集。

25.3 Tonelli 定理

引理 25.7 (非负简单函数的截面积分)**.** 设

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j}(x, y), qquada_j \geq 0,$$

其中每个 E_j 是可测集。则对几乎处处的 y，φ^y 可测，且

$$\int_X \varphi^y(x)\, d\lambda_p(x)$$

是 y 的可测函数，并且

$$\int_Z \varphi\, d\lambda_{p+q} = \int_Y \left(\int_X \varphi^y(x)\, d\lambda_p(x) \right) d\lambda_q(y).$$

证明. 由截面定理，每个 E_j 的截面性质在某个零测集之外成立。取有限个异常集的并，得到一个仍为零测集的 N，使对 $y \notin N$ 所有 E_j^y 都可测，且 $y \mapsto \lambda_p(E_j^y)$ 可测。于是

$$\varphi^y = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j^y}$$

是简单函数，且

$$\int_X \varphi^y\, d\lambda_p = \sum_{j=1}^{N} a_j \lambda_p(E_j^y).$$

右侧可测。对两边逐项积分并应用截面定理，

$$\int_Y \int_X \varphi^y = \sum_{j=1}^{N} a_j \int_Y \lambda_p(E_j^y) = \sum_{j=1}^{N} a_j \lambda_{p+q}(E_j) = \int_Z \varphi.$$

□

定理 25.8 (Tonelli 定理). 若 $f : Z \to [0, +\infty]$ 为 *Lebesgue* 可测函数，则对几乎处处的 $y \in Y$，f^y 可测，并且函数

$$y \longmapsto \int_X f^y\, d\lambda_p$$

可测；同时

$$\int_Z f(x,y)\, d\lambda_{p+q}(x,y) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\lambda_p(x) \right) d\lambda_q(y).$$

交换 X, Y 的角色还得到

$$\int_Z f = \int_X \left(\int_Y f_x(y)\, d\lambda_q(y) \right) d\lambda_p(x).$$

证明. 由简单函数下逼近引理，存在非负简单函数列 $\varphi_m \uparrow f$。对每个 m，由上一引理，除了一个零测集外，φ_m^y 可测且

$$F_m(y) = \int_X \varphi_m^y\, d\lambda_p$$

可测。取所有异常集的可数并，仍是零测集。对其外的每个 y，有

$$\varphi_m^y(x) \uparrow f^y(x).$$

由非负函数的单调收敛定理，

$$F_m(y) \uparrow F(y) := \int_X f^y\, d\lambda_p.$$

因此 F 是可测函数。再次应用单调收敛定理和简单函数截面积分公式，

$$\begin{aligned}\int_Y F(y)\,d\lambda_q(y) &= \lim_{m\to\infty}\int_Y F_m(y)\,d\lambda_q(y)\\ &= \lim_{m\to\infty}\int_Z \varphi_m\,d\lambda_{p+q}\\ &= \int_Z f\,d\lambda_{p+q}.\end{aligned}$$

交换变量次序得到第二个公式。 □

例 25.9 (指示函数的迭代积分)**.** 令 $D=\{(x,y):0<x<1,\ 0<y<x\}$。则

$$\int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_D(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^x 1\,dy\right)dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

反向积分给出

$$\int_0^1\left(\int_y^1 1\,dx\right)dy=\int_0^1(1-y)\,dy=\frac{1}{2}.$$

两个次序给出同一个面积，但每一个内层积分的区间来自截面的几何形状，而不是形式上的交换符号。

25.4 Fubini 定理

定理 25.10 (Fubini 定理)**.** 设 $f:Z\to\mathbb{R}$ 可测且绝对可积：

$$\int_Z |f|\,d\lambda_{p+q}<+\infty.$$

则：

1. 对几乎处处的 y，$f^y\in L^1(X)$，并且 $y\mapsto\int_X f^y\,d\lambda_p$ 可积；
2. 对几乎处处的 x，$f_x\in L^1(Y)$，并且 $x\mapsto\int_Y f_x\,d\lambda_q$ 可积；
3. $$\int_Z f\,d\lambda_{p+q}=\int_Y\left(\int_X f^y\,d\lambda_p\right)d\lambda_q=\int_X\left(\int_Y f_x\,d\lambda_q\right)d\lambda_p.$$

证明. 对非负函数 $|f|$ 应用 Tonelli 定理，得到

$$\int_Y\left(\int_X |f^y|\,d\lambda_p\right)d\lambda_q(y)=\int_Z|f|\,d\lambda_{p+q}<\infty.$$

一个非负可测函数积分有限，意味着它有限于几乎处处；因此对几乎处处的 y，$\int_X|f^y|<\infty$，即 $f^y\in L^1(X)$。同理得到竖直截面结论。

在这些好参数上，正部与负部满足

$$f^y=(f^+)^y-(f^-)^y,\qquad |f^y|=(|f|)^y.$$

所以截面积分有定义，并且

$$\left|\int_X f^y\right|\le\int_X|f^y|.$$

右侧作为 y 的函数可积，故内层积分函数可积。由 Tonelli 分别作用于 f^+ 和 f^-，

$$\int_Y \int_X f^y = \int_Y \int_X (f^+)^y - \int_Y \int_X (f^-)^y = \int_Z f^+ - \int_Z f^- = \int_Z f.$$

交换 X, Y 得第二个等式。 □

推论 25.11 (积分次序交换的充分条件)**.** *若 f 可测且存在非负可积函数 g 使 $|f| \le g$ a.e.，则 f 满足 Fubini 定理的全部结论。*

证明. 由保序性，$\int_Z |f| \le \int_Z g < \infty$，故应用 Fubini 定理。 □

例 25.12 (绝对可积性的必要性)**.** 在 $[-1,1]^2$ 上定义

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

在极坐标中，$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|$ 的量级为 r^{-2}，乘以面积因子 $r\,dr\,d\theta$ 后产生 dr/r，故绝对积分在原点发散。这个例子说明：没有绝对可积性时，不能仅凭形式操作交换无穷积分次序；Fubini 的假设正是排除这种条件收敛病态的条件。

26 L^p 空间：Hölder、Minkowski 与完备性

第二十四章把绝对可积函数组成的 L^1 空间，并证明了积分对 L^1 距离的连续性。本章把这一结构推广到任意指数 $p \in [1, +\infty]$。核心不等式不是凭经验写出的估计，而是由标量函数的凸性逐层推出的：先证明 Young 不等式，再用归一化把它变成 Hölder 不等式，最后由 Hölder 不等式得到 Minkowski 三角不等式。随后证明 L^p 是完备的，说明 Cauchy 列确实在同一个函数空间内收敛。

本章固定 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集，并把 λ_n 在 X 上的限制仍记为 λ。所有函数都定义在 X 上；“几乎处处”均指相对于该限制测度。

26.1 凸性与 Young 不等式

定义 26.1 (共轭指数)**.** 设 $p, q \in (1, +\infty)$。若

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

则称 p, q 为共轭指数，记作 $q = p'$。当 $p = 1$ 时，把共轭指数记作 $q = +\infty$；当 $p = +\infty$ 时，把共轭指数记作 $q = 1$。

引理 26.2 (对数函数的切线不等式)**.** *对任意 $t > 0$，有*

$$\log t \le t - 1,$$

等号当且仅当 $t = 1$。

证明. 令 $h(t) = t - 1 - \log t$。则

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}.$$

当 $0 < t < 1$ 时，$h'(t) < 0$；当 $t > 1$ 时，$h'(t) > 0$。因此 h 在 $t = 1$ 处取得全局最小值。又 $h(1) = 0$，所以 $h(t) \ge 0$，且等号只在 $t = 1$ 成立。 □

定理 26.3 (Young 不等式)**.** *设 $p, q \in (1, +\infty)$ 为共轭指数，则对任意 $a, b \ge 0$，*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

等号当且仅当 $a^p = b^q$。

证明. 若 $a = 0$ 或 $b = 0$，不等式立即成立；等号条件也直接验证。以下设 $a, b > 0$。在引理中取

$$t = a^p b^{-q}.$$

于是

$$\log(a^p b^{-q}) \le a^p b^{-q} - 1.$$

更直接地，将引理分别应用于 a^p/b^q 和 b^q/a^p，或令 $u=a^p$、$v=b^q$，可得到加权形式

$$\frac{u^{1/p}v^{1/q}}{1}\le \frac{u}{p}+\frac{v}{q}.$$

代回 $u=a^p$、$v=b^q$，并注意 $u^{1/p}v^{1/q}=ab$，得到结论。

为了明确等号条件，考虑函数

$$\Phi(a)=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}-ab$$

对 $a>0$ 的导数：

$$\Phi'(a)=a^{p-1}-b.$$

由于 $p-1=1/(q-1)>0$，Φ' 在唯一点 $a^{p-1}=b$，即 $a^p=b^q$ 处由负变正；该点给出唯一最小值。代入该关系，最小值为零，所以等号条件正是 $a^p=b^q$。 □

命题 26.4 (端点 Hölder 估计的独立形式)**.** *若 $a,b\ge 0$，且 $b\le B<+\infty$，则*

$$ab\le aB.$$

因此若 $|g|\le B$ 几乎处处，便有

$$|fg|\le B|f| \quad \text{几乎处处}.$$

这就是 $p=1,q=+\infty$ 时 Hölder 不等式的标量基础；不能把 $q=+\infty$ 形式地代入 Young 不等式中的有限指数公式。

证明. 由 $0\le b\le B$ 和 $a\ge 0$，乘法保序给出 $ab\le aB$。将 $a=|f(x)|$、$b=|g(x)|$ 逐点代入即可得到函数形式。 □

26.2 Hölder 不等式

定义 26.5 (L^p 范数)**.** 设 $1\le p<+\infty$，可测函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 称为 p-次可积，如果

$$\int_X |f|^p\,d\lambda<+\infty.$$

定义

$$\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p}.$$

当 $p=+\infty$ 时，定义本性上确界

$$\|f\|_\infty=\inf\{M\ge 0:|f|\le M \text{ 几乎处处}\}.$$

记所有满足 $\|f\|_p<+\infty$ 的可测函数为 $L^p(X)$。

引理 26.6 (本性上确界的基本刻画)**.** *设 f 可测且 $\|f\|_\infty<+\infty$。则*

$$|f|\le \|f\|_\infty \quad \text{几乎处处}.$$

反之，若 $|f|\le M$ 几乎处处，则 $\|f\|_\infty\le M$。

证明. 记 $a=\|f\|_\infty$。对每个 $k\in\mathbb{N}$，由下确界定义可取 $M_k<a+1/k$，使 $|f|\le M_k$ 几乎处处。令 N_k 为对应的零测异常集，并令 $N=\bigcup_k N_k$。则 $\lambda(N)=0$，且对 $x\notin N$，

$$|f(x)|\le M_k<a+\frac{1}{k}\qquad(k\in\mathbb{N}).$$

令 $k\to\infty$，得到 $|f(x)|\le a$。反向不等式直接由定义的下确界性质得到。 □

定理 26.7 (Hölder 不等式)**.** *设 $p,q\in(1,+\infty)$ 为共轭指数，且 $f\in L^p(X)$、$g\in L^q(X)$。则 $fg\in L^1(X)$，并且*

$$\int_X |fg|\,d\lambda\le\|f\|_p\|g\|_q.$$

当 $\|f\|_p\|g\|_q=0$ 时等号显然成立；若两范数均非零，则等号当且仅当存在 $c\ge0$ 使

$$|f|^p=c|g|^q\quad\text{几乎处处}.$$

证明. 若某一范数为零，则由第二十三章的零值判据，函数几乎处处为零，结论成立。以下设 $A=\|f\|_p>0$、$B=\|g\|_q>0$。对几乎处处的 x，将 Young 不等式应用于

$$a=\frac{|f(x)|}{A},\qquad b=\frac{|g(x)|}{B},$$

得到

$$\frac{|f(x)g(x)|}{AB}\le\frac{|f(x)|^p}{pA^p}+\frac{|g(x)|^q}{qB^q}.$$

两侧均为非负可测函数，可以积分。由定义 $A^p=\int|f|^p$、$B^q=\int|g|^q$，

$$\frac{1}{AB}\int|fg|\le\frac{1}{p}\frac{1}{A^p}\int|f|^p+\frac{1}{q}\frac{1}{B^q}\int|g|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

乘以 AB 得到不等式，并同时说明 $\int|fg|<\infty$。

Young 不等式的等号在几乎处处成立，当且仅当

$$\frac{|f|^p}{A^p}=\frac{|g|^q}{B^q}$$

几乎处处成立。这等价于 $|f|^p=(A^p/B^q)|g|^q$ 几乎处处成立，故可取 $c=A^p/B^q$。反向显然。 □

命题 26.8 (端点 Hölder 不等式)**.** *若 $f\in L^1(X)$、$g\in L^\infty(X)$，则 $fg\in L^1(X)$，且*

$$\int_X|fg|\,d\lambda\le\|f\|_1\|g\|_\infty.$$

证明. 由本性上确界刻画，$|g|\le\|g\|_\infty$ 几乎处处。因此

$$0\le|fg|\le\|g\|_\infty|f|\quad\text{几乎处处}.$$

积分保序性和齐次性给出结论。 □

推论 26.9 (积分平均的估计)**.** *若 E 可测且 $0<\lambda(E)<+\infty$，$f\in L^p(E)$，则*

$$\left|\int_E f\,d\lambda\right|\le\lambda(E)^{1-1/p}\|f\|_{L^p(E)}.$$

证明. 在 Hölder 不等式中取 $g=\mathbf{1}_E$，其共轭范数为

$$\|\mathbf{1}_E\|_q=\lambda(E)^{1/q}=\lambda(E)^{1-1/p}.$$

再用 $|\int_E f|\le\int_E|f|$，得到结论。 □

26.3 Minkowski 不等式

定理 26.10 (Minkowski 不等式)**.** 设 $1 \le p < +\infty$，且 $f, g \in L^p(X)$。则 $f+g \in L^p(X)$，并且

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证明. 当 $p=1$ 时，这是逐点三角不等式、积分保序性和积分可加性的直接结果。以下设 $p>1$，令 $q = p/(p-1)$。若 $\|f+g\|_p = 0$，结论成立；以下设 $C = \|f+g\|_p > 0$。逐点有

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \le (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}.$$

积分后得到

$$C^p \le \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\lambda + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\lambda.$$

对第一项使用 Hölder，指数为 p, q。因为

$$(p-1)q = p,$$

所以

$$\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q = \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\lambda\right)^{1/q} = C^{p/q} = C^{p-1}.$$

因此

$$\int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\lambda \le \|f\|_p C^{p-1},$$

同理第二项不超过 $\|g\|_p C^{p-1}$。于是

$$C^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p) C^{p-1}.$$

因 $C>0$，除以 C^{p-1} 得结论。右侧有限也说明 $C<\infty$，即 $f+g \in L^p(X)$。 □

命题 26.11 (L^p 距离是伪距离)**.** 对 $f, g \in L^p(X)$，定义

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p.$$

则 d_p 满足非负性、对称性和三角不等式；并且

$$d_p(f,g) = 0 \iff f = g \quad \text{几乎处处}.$$

因此在几乎处处相等的等价类上，d_p 是真正的度量。

证明. 非负性和对称性来自绝对值。三角不等式是 Minkowski 不等式应用于 $f-h$ 与 $h-g$。若 $d_p(f,g)=0$，则 $\int |f-g|^p = 0$，由非负积分零值判据，$|f-g|^p = 0$ 几乎处处，故 $f=g$ 几乎处处。反向若几乎处处相等，显然距离为零。 □

26.4 L^p 的完备性

引理 26.12 (从可和范数增量构造点态收敛子列)**.** 设 (f_n) 是 $L^p(X)$ 中的 *Cauchy* 列，其中 $1 \le p < +\infty$。则存在严格递增的整数列 $n_1 < n_2 < \cdots$，使

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le 2^{-k}.$$

令

$$h_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, \qquad H_N = \sum_{k=1}^{N} |h_k|.$$

则 H_N 递增，且存在可测 $H \in L^p(X)$ 使 $H_N \uparrow H$ *a.e.*，并且

$$\|H\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

证明. 由 Cauchy 性，对每个 k 可选 $n_{k+1} > n_k$，使上述增量估计成立。由 Minkowski 不等式，对每个 N，

$$\|H_N\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{N} |h_k| \right\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \||h_k|\|_p = \sum_{k=1}^{N} \|h_k\|_p \le 1.$$

因为 $H_N^p \uparrow H^p$，由单调收敛定理，

$$\int H^p = \lim_{N\to\infty} \int H_N^p = \lim_{N\to\infty} \|H_N\|_p^p \le 1.$$

因此 $H < +\infty$ 几乎处处，并且 $H \in L^p(X)$。 □

定理 26.13 (L^p 的完备性)**.** 对任意 $1 \le p < +\infty$，商空间 $L^p(X)$（按几乎处处相等取等价类）是 *Banach* 空间：每个 L^p*-Cauchy* 列都收敛于某个 $f \in L^p(X)$。

证明. 设 (f_n) 是 Cauchy 列。按引理取子列 f_{n_k}，并令

$$h_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, \qquad H = \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| \in L^p(X)$$

其中等式在几乎处处成立。对满足 $H(x) < \infty$ 的每个 x，级数 $\sum_k h_k(x)$ 绝对收敛；定义

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x),$$

在异常零测集上令 $f(x) = 0$。则

$$f - f_{n_m} = \sum_{k=m}^{\infty} h_k, \qquad |f - f_{n_m}| \le \sum_{k=m}^{\infty} |h_k| =: R_m.$$

由 $R_m \le H$ 且 $R_m \downarrow 0$ a.e.，并且

$$\|R_m\|_p \le \sum_{k=m}^{\infty} \|h_k\|_p \le 2^{1-m},$$

得到 $\|f - f_{n_m}\|_p \to 0$。特别地，取某个 m 使右侧有限，再由 Minkowski 得 $f \in L^p(X)$。

最后证明原列收敛。给定 $\varepsilon > 0$，先取 m 使 $\|f_{n_m} - f\|_p < \varepsilon/2$。由 (f_n) 的 Cauchy 性，存在 N 使当 $n \geq N$ 时 $\|f_n - f_{n_m}\|_p < \varepsilon/2$。于是

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p < \varepsilon.$$

□

定理 26.14 (简单函数在 L^p 中稠密)**.** 设 $1 \leq p < +\infty$。对任意 $f \in L^p(X)$，存在有界简单函数列 s_m，使

$$\|s_m - f\|_p \longrightarrow 0.$$

证明. 先取可测集合 $Q_m = X \cap [-m, m]^n$，并令

$$f_m = f\mathbf{1}_{Q_m}\mathbf{1}_{\{|f|\leq m\}}.$$

则 $f_m \to f$ 几乎处处。并且

$$|f - f_m|^p \leq |f|^p\mathbf{1}_{X\setminus Q_m} + |f|^p\mathbf{1}_{\{|f|>m\}}.$$

由于 Q_m 递增并覆盖 X，非负函数 $|f|^p\mathbf{1}_{Q_m}$ 递增到 $|f|^p$。由单调收敛定理，

$$\int_X |f|^p\mathbf{1}_{Q_m} \longrightarrow \int_X |f|^p.$$

同理，$|f|^p\mathbf{1}_{\{|f|\leq m\}}$ 递增到 $|f|^p$，故

$$\int_X |f|^p\mathbf{1}_{\{|f|\leq m\}} \longrightarrow \int_X |f|^p.$$

把两式分别从 $\int_X |f|^p$ 中相减，得到

$$\int_X |f|^p\mathbf{1}_{X\setminus Q_m} \to 0, \qquad \int_X |f|^p\mathbf{1}_{\{|f|>m\}} \to 0.$$

因此 $\|f - f_m\|_p^p \to 0$，从而 $\|f - f_m\|_p \to 0$。

固定 m。函数 f_m 有界且支撑在有限测度集 Q_m 内。把实值函数的正部和负部分别在区间 $[-m, m]$ 上以网格步长 2^{-k} 向下取整，并在 Q_m^c 上置零，得到有界简单函数 $s_{m,k}$，满足

$$|s_{m,k} - f_m| \leq 2^{-k}\mathbf{1}_{Q_m}.$$

故

$$\|s_{m,k} - f_m\|_p^p \leq 2^{-kp}\lambda_n(Q_m) \longrightarrow 0.$$

选取 $k = k(m)$ 使该范数小于 2^{-m}，令 $s_m = s_{m,k(m)}$。于是

$$\|s_m - f\|_p \leq \|s_m - f_m\|_p + \|f_m - f\|_p \longrightarrow 0.$$

□

27 Lebesgue 微分定理与积分的局部结构

前面已经证明了 Fubini–Tonelli 定理与 L^p 的基本性质，但还没有回答一个更细的问题：如果把一个可积函数在越来越小的邻域上取平均，这些平均是否在几乎处处回到函数本身？这个问题是“积分能够恢复微分”的严格核心。结论不是对每一点都成立；可积函数可以在一个零测集上任意修改，而积分完全看不见这种修改。因此正确的结论必然是几乎处处的。

本章先在 $\mathbb{R}^n$ 中证明立方体的 Vitali 覆盖引理和 Hardy–Littlewood 弱型估计，再用 C_c 函数的 L^1 稠密性证明 Lebesgue 微分定理。最后把定理应用于一维的变上限积分，得到第一册中积分与微分之间的第一个完整闭环。

固定 $n \in \mathbb{N}$。对 $x \in \mathbb{R}^n$ 与 $r > 0$，记

$$Q(x,r) = x + [-r,r]^n, \qquad |Q(x,r)| = (2r)^n.$$

若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，令

$$A_r f(x) = \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(y)\,dy.$$

这里的 L^1_{loc} 意味着 f 在每一个有界盒体上的绝对值积分有限。

27.1 外正则性与连续函数逼近

引理 27.1 (Lebesgue 测度的外正则性)**.** *若 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测且 $\lambda(E) < +\infty$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supseteq E$，使*

$$\lambda(G \setminus E) < \varepsilon.$$

若 E 的测度可能为无穷，则对每个 $R > 0$ 都可对 $E \cap [-R,R]^n$ 作同样的逼近。

证明. 由外测度的定义，存在可数个盒体 R_j 覆盖 E，满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| < \lambda(E) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

把每个 R_j 的每一条边向外延长一个足够小的量，得到开盒体 $U_j \supset R_j$，并使

$$|U_j| \le |R_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}.$$

这是因为盒体体积是各边长的乘积，关于边长连续。令 $G = \bigcup_j U_j$，则 G 是开集且包含 E。由可数次次可加性，

$$\lambda(G) \le \sum_j |U_j| < \lambda(E) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因 $E \subseteq G$ 且 E 可测，

$$\lambda(G \setminus E) = \lambda(G) - \lambda(E) < \varepsilon.$$

若 E 测度无穷，先将 E 与有限盒体相交；该交集测度有限，故上面的论证仍然适用。 $\square$

引理 27.2 (内正则性)**.** *若 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测且 $\lambda(E) < +\infty$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $K \subseteq E$，使*

$$\lambda(E \setminus K) < \varepsilon.$$

证明. 先取 $R > 0$，使 $\lambda(E \setminus [-R, R]^n) < \varepsilon/3$。这是测度连续性应用于递增的集合列 $E \cap [-R, R]^n$。令 $E_R = E \cap [-R, R]^n$。在大盒体

$$B = [-R - 1, R + 1]^n$$

中，对可测集 $B \setminus E_R$ 应用外正则性，取得开集 $U \supseteq B \setminus E_R$，使

$$\lambda(U \setminus (B \setminus E_R)) < \varepsilon/3.$$

令

$$K = [-R, R]^n \setminus U.$$

因为 U 开，K 是紧集；又 $B \setminus E_R \subseteq U$，故 $K \subseteq E_R \subseteq E$。此外

$$E_R \setminus K = E_R \cap U \subseteq U \setminus (B \setminus E_R),$$

因为 $E_R \subseteq B$。于是

$$\lambda(E \setminus K) \leq \lambda(E \setminus E_R) + \lambda(E_R \setminus K) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

□

引理 27.3 (紧支集连续逼近)**.** *对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使*

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

证明. 先取 $R > 0$，使

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus [-R,R]^n} |f| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

再令

$$f_R = f \mathbf{1}_{[-R,R]^n} \mathbf{1}_{\{|f| \leq M\}}.$$

当 $M \to \infty$ 时，$|f| \mathbf{1}_{[-R,R]^n} \mathbf{1}_{\{|f| \leq M\}} \uparrow |f| \mathbf{1}_{[-R,R]^n}$，由单调收敛定理可以选取 M，使

$$\|f - f_R\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 f_R 有界并支撑在有限测度集 $E = [-R, R]^n \cap \{|f| \leq M\}$ 上。

由简单函数在 L^1 中稠密性，存在实值简单函数

$$s = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j},$$

其中 E_j 可测；把每个层集替换为与 $[-R, R]^n$ 的交，并把盒外层的系数置为零后，可设 $E_j \subseteq [-R, R]^n$，且

$$\|f_R - s\|_1 < \frac{\varepsilon}{8}.$$

把所有 E_j 拆成正交的层集后，仍可假设它们两两不交。对每个非零层集 E_j，由内正则性选紧集 $K_j \subseteq E_j$，由外正则性先选开集 $G_j' \supseteq E_j$，再令 $G_j = G_j' \cap (-R-1, R+1)^n$，于是 G_j 有界且仍包含 E_j，并使

$$\lambda(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{8N(1+\max_i |a_i|)}.$$

定义

$$\phi_j(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, G_j^c)}{\operatorname{dist}(x, G_j^c) + \operatorname{dist}(x, K_j)}$$

，并约定在分母为零处取 0。这里 $\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} |x-y|$。距离函数满足

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \le |x-y|,$$

所以 ϕ_j 连续；在 K_j 上等于 1，在 G_j^c 上等于 0，且 $0 \le \phi_j \le 1$。由于 G_j 有界，$\phi_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$。

令 $g = \sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j$。对每一个 j，

$$|\phi_j - \mathbf{1}_{E_j}| \le \mathbf{1}_{G_j \setminus K_j}.$$

因此不需要假设各个 G_j 不交，也有

$$\|g - s\|_1 \le \sum_{j=1}^{N} |a_j| \lambda(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

于是

$$\|f - g\|_1 \le \|f - f_R\|_1 + \|f_R - s\|_1 + \|s - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon.$$

□

27.2 Vitali 覆盖与弱型最大不等式

定义 27.4 (局部平均与最大函数)**.** 对 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，定义中心立方体最大函数

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

若只取 $0 < r < \rho$，则记相应的局部最大函数为 $M_\rho f(x)$。

引理 27.5 (有限立方体的 $5r$ 选择引理)**.** *设 $\mathcal{F}$ 是有限个闭立方体的族。存在两两内部不交的子族 $\{Q_1, \dots, Q_m\} \subseteq \mathcal{F}$，使得每个 $Q \in \mathcal{F}$ 都包含于某个 $5Q_j$ 中；这里 $5Q_j$ 表示与 Q_j 同中心、边长为五倍的立方体。*

证明. 若族为空，结论显然。否则先取边长最大的立方体 Q_1。删除所有与 Q_1 相交的立方体，再从剩余族中取边长最大的 Q_2，如此继续，直到没有立方体剩下。所取立方体的内部两两不交：若 Q_i 与 Q_j 的内部相交且 $i < j$，则 Q_j 在选取 Q_i 时已经被删除。

任取被删除的 Q。它在某一步与先前选出的 Q_j 相交，且由选取顺序 $\ell(Q) \le \ell(Q_j)$，其中 ℓ 表示边长。对任意坐标，两个中心的距离至多为

$$\frac{1}{2}\ell(Q) + \frac{1}{2}\ell(Q_j) \le \ell(Q_j).$$

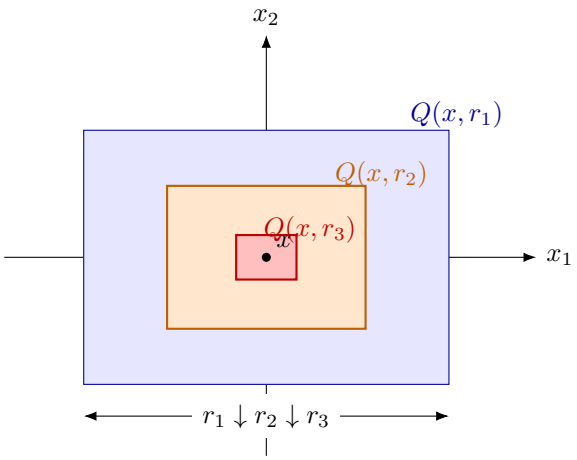


图 27.1: 局部平均在嵌套立方体上收缩到点 x。

于是 Q 的任一点到 Q_j 中心的坐标距离至多

$$\ell(Q_j) + \frac{1}{2}\ell(Q) \le \frac{3}{2}\ell(Q_j) < \frac{5}{2}\ell(Q_j),$$

故 $Q \subset 5Q_j$。 □

引理 27.6 (Vitali 覆盖引理（紧集形式）)**.** *设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 紧，并给每个 $x \in K$ 指定一个以 x 为中心的闭立方体 Q_x。则从族 $\{Q_x : x \in K\}$ 中可以选出有限个两两内部不交的立方体 $Q_1, \dots, Q_m$，满足*

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} 5Q_j.$$

证明. 因为 x 是 Q_x 的中心，内部 Q_x° 构成 K 的开覆盖。由紧性，存在有限个 $Q^{(1)}, \dots, Q^{(N)}$ 使

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (Q^{(i)})^\circ.$$

对这有限族应用引理 27.5，选出两两内部不交的子族 $Q_1, \dots, Q_m$。每一个 $Q^{(i)}$ 都包含于某个 $5Q_j$，而 K 被这些 $Q^{(i)}$ 的内部覆盖，故

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} Q^{(i)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} 5Q_j.$$

□

引理 27.7 (最大函数的可测性与弱型估计)**.** *若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 Mf 可测，并且对每个 $\alpha > 0$，*

$$\lambda\big(\{x : Mf(x) > \alpha\}\big) \le \frac{5^n}{\alpha}\|f\|_1.$$

证明. 对固定 $r > 0$，函数

$$x \longmapsto \int_{Q(x,r)} |f(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \mathbf{1}_{Q(0,r)}(y - x)\,dy$$

是两个 L^1 函数的卷积，因而可测。取半径 $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ 的上确界得到可测函数。任意实半径的平均可由有理半径从下方逼近：对固定 x，$r \mapsto \int_{Q(x,r)} |f|$ 连续，而 $r \mapsto (2r)^n$ 连续，故上确界不变。

令 $E_\alpha = \{Mf > \alpha\}$。先固定 $m \in \mathbb{N}$，并取任意紧集 $K \subset E_\alpha \cap [-m,m]^n$。对每个 $x \in K$，可选 $r_x > 0$，使

$$\int_{Q(x,r_x)} |f| > \alpha |Q(x,r_x)|.$$

由于 $\int |f| < \infty$，当 $r \to \infty$ 时

$$\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f| \le \frac{\|f\|_1}{(2r)^n} \longrightarrow 0.$$

因此可把满足严格不等式的半径选在有限范围内。对每个 $x \in K$，取满足严格不等式的闭立方体 $Q_x = Q(x,r_x)$；它以 x 为中心。由于 K 有界且所有 r_x 有统一上界，所有 $5Q_x$ 都包含于某个固定有界开集。应用引理 27.6，得到两两内部不交的 Q_j，并有 $K \subseteq \bigcup_j 5Q_j$。

$$\lambda(K) \le \sum_j |5Q_j| = 5^n \sum_j |Q_j| < \frac{5^n}{\alpha} \sum_j \int_{Q_j} |f| \le \frac{5^n}{\alpha}\|f\|_1.$$

由于 $E_\alpha \cap [-m,m]^n$ 测度有限，内正则性说明其测度是其中紧集测度的上确界，故

$$\lambda(E_\alpha \cap [-m,m]^n) \le \frac{5^n}{\alpha}\|f\|_1.$$

令 $m \to \infty$，再由测度的递增连续性得到所需估计。 □

注 27.8. 常数 5^n 只来自覆盖引理，并非定理的本质。若使用球和更精细的覆盖选择，可以得到不同的维数常数；本章只需要一个明确且有限的常数。

27.3 Lebesgue 微分定理

定理 27.9 (连续函数的局部平均收敛)**.** *若 $g \in C(\mathbb{R}^n)$，则对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，*

$$\lim_{r \downarrow 0} A_r g(x) = g(x).$$

若 g 仅在 x 附近连续，结论仍在该点成立。

证明. 给定 $\varepsilon > 0$。由 g 在 x 连续，存在 $\delta > 0$，使当 $|y-x|_\infty < \delta$ 时 $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$。若 $0 < r < \delta$，则 $Q(x,r)$ 中每一点都满足该不等式，从而

$$|A_r g(x) - g(x)| \le \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |g(y)-g(x)|\,dy < \varepsilon.$$

令 $r \downarrow 0$ 即得结论。 □

定理 27.10 (Lebesgue 微分定理)**.** *若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，*

$$\lim_{r \downarrow 0} A_r f(x) = f(x).$$

事实上，对几乎处处的 x 还有更强的振荡结论

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0.$$

满足这一条件的点称为 f 的 Lebesgue 点。

证明. 先设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$。令

$$Df(x) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy.$$

对 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$，三角不等式给出逐点估计

$$Df(x) \le \limsup_{r \downarrow 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y) - g(y)|\, dy + Dg(x) + |f(x) - g(x)|.$$

由连续函数的局部平均收敛，$Dg(x) = 0$，而第一项不超过 $M(f-g)(x)$。因此

$$Df(x) \le M(f-g)(x) + |f(x) - g(x)|.$$

所以对任意 $\alpha > 0$，

$$\{Df > \alpha\} \subseteq \left\{ M(f-g) > \frac{\alpha}{2} \right\} \cup \left\{ |f-g| > \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

第一项由弱型估计控制，第二项由 Chebyshev 不等式控制，故

$$\lambda(\{Df > \alpha\}) \le \frac{2 \cdot 5^n}{\alpha} \|f - g\|_1 + \frac{2}{\alpha} \|f - g\|_1.$$

由连续函数逼近引理，可以让 $\|f-g\|_1$ 任意小，于是 $\lambda(\{Df > \alpha\}) = 0$。取 $\alpha = 1/k$ 并作可数并，得到 $Df = 0$ 几乎处处。

若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$，对每个 m 将 $f\mathbf{1}_{[-m,m]^n}$ 延拓为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数。对固定的 m，在内盒体 $(-m+1, m-1)^n$ 上，小立方体平均只看见该延拓与原函数相同的值。因此定理在每个这样的内盒体上成立。令 $m \to \infty$，取可数个零测异常集的并，得到全空间的结论。 □

推论 27.11 (任意有限区间趋于一点的平均). *设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，且 x 是 f 的 Lebesgue 点。若区间 $I_k ix$ 的长度趋于零，且每个 I_k 都包含于 $[x - r_k, x + r_k]$，其中 $r_k \downarrow 0$，并满足 $|I_k| \ge c r_k$（固定 $c > 0$），则*

$$\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f(t) - f(x)|\, dt \longrightarrow 0.$$

证明. 由 $I_k \subseteq [x - r_k, x + r_k]$ 和 $|I_k| \ge c r_k$，

$$\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f - f(x)| \le \frac{1}{c r_k} \int_{x - r_k}^{x + r_k} |f - f(x)| = \frac{2}{c} \frac{1}{2 r_k} \int_{x - r_k}^{x + r_k} |f - f(x)|.$$

右侧趋于零，因为一维情形的立方体就是区间。 □

27.4 变上限积分与一阶基本定理

定义 27.12 (绝对连续函数). 设 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$。称 F 绝对连续，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使任意有限个两两不交的开区间 $(a_j, b_j) \subset [a,b]$ 只要

$$\sum_j (b_j - a_j) < \delta,$$

就有

$$\sum_j |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

定理 27.13 (变上限积分的绝对连续性与几乎处处可导)**.** 设 $f \in L^1([a,b])$，定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

则 F 绝对连续，并且对几乎处处的 $x \in [a,b]$，

$$F'(x) = f(x).$$

证明. 先证绝对连续性。由积分的绝对连续性，对给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使任意可测集 $E \subset [a,b]$ 满足 $\lambda(E) < \delta$ 时

$$\int_E |f| < \varepsilon.$$

对两两不交区间 (a_j, b_j)，令 $E = \bigcup_j (a_j, b_j)$。则

$$\lambda(E) = \sum_j (b_j - a_j) < \delta,$$

并且

$$\sum_j |F(b_j) - F(a_j)| = \sum_j \left| \int_{a_j}^{b_j} f \right| \le \sum_j \int_{a_j}^{b_j} |f| = \int_E |f| < \varepsilon.$$

设 x 是 f 的 Lebesgue 点。对 $h > 0$ 且 $x + h \le b$，

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt.$$

由推论 27.11，右侧绝对值趋于零。对 $h < 0$，写成

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^{x} (f(t) - f(x))\,dt,$$

同理趋于零。因此 $F'(x) = f(x)$。Lebesgue 微分定理说明这样的 x 除去一个零测集外全部存在。 □

推论 27.14 (积分的局部误差估计)**.** 在上述条件下，对几乎处处的 x，

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(x) + o(|h|) \qquad (h \to 0),$$

其中 $x + h \in [a,b]$。

证明. 由定理中的差商公式，

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt - hf(x) = h\left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x) \right).$$

括号内的量趋于零，故整个表达式是 h 乘以一个趋于零的量。 □

例 27.15 (连续性不能替代几乎处处结论)**.** 令 $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$。由于有理数集是零测集，$f = 0$ 几乎处处，故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = 0$$

对所有 x 成立。然而 $f(q) = 1$ 对每个有理数 q，所以 $F'(q) = 0 \neq f(q)$。这说明积分只能恢复 f 的几乎处处等价类；若想在每一点得到 $F' = f$，必须另加连续性等条件。

28 Radon–Nikodym 定理与测度的分解

Lebesgue 微分定理说明了“局部平均恢复函数”；本章从另一个方向说明“一个测度何时可以写成对另一个测度的积分”。这一步把密度的概念从函数提升到测度，并为下一章的有界变差函数和绝对连续函数提供严格工具。

在本章中，$(X,\mathcal{A})$ 是一个可测空间，μ,ν 是其上的非负测度。先处理 $\mu(X),\nu(X)<+\infty$ 的情形，再说明 σ-有限推广。记

$$\nu \ll \mu \quad\Longleftrightarrow\quad \mu(E)=0 \Longrightarrow \nu(E)=0,$$

称为 ν 对 μ 绝对连续；若存在可测集 S，使

$$\mu(S)=0, \qquad \nu(X\setminus S)=0,$$

则称 μ,ν 互相奇异，记作 $\nu\perp\mu$。

28.1 有限测度上的 L^2 表示

引理 28.1 (L^2 的完备性)**.** 对任意测度 λ，$L^2(\lambda)$ 按几乎处处相等取等价类后是完备的。

证明. 设 (f_m) 是 $L^2(\lambda)$ 中的 Cauchy 列。递归选取 $m_1<m_2<\cdots$，使

$$\|f_{m_{k+1}}-f_{m_k}\|_2 \le 2^{-k}.$$

令 $h_k=f_{m_{k+1}}-f_{m_k}$，并令

$$H_N=\sum_{k=1}^{N}|h_k|.$$

由 Minkowski 不等式，

$$\|H_N\|_2 \le \sum_{k=1}^{N}\|h_k\|_2 \le 1.$$

因 $H_N^2\uparrow H^2$，单调收敛定理给出 $\int H^2\le 1$，所以 $H=\sum_k|h_k|<+\infty$ 几乎处处。定义

$$f=f_{m_1}+\sum_{k=1}^{\infty}h_k$$

(在异常零测集上任意定义)。余项 $R_j=\sum_{k=j}^{\infty}|h_k|$ 满足

$$\|f-f_{m_j}\|_2 \le \|R_j\|_2 \le \sum_{k=j}^{\infty}2^{-k}=2^{1-j}\longrightarrow 0.$$

给定 $\varepsilon>0$，先取 j 使 $\|f-f_{m_j}\|_2<\varepsilon/2$，再用原列的 Cauchy 性控制 $\|f_m-f_{m_j}\|_2$，即可得到 $f_m\to f$。 $\square$

引理 28.2 (有限测度下的 L^2 控制)**.** 设 λ 是有限测度，$f \in L^2(\lambda)$。则 $f \in L^1(\lambda)$，并且

$$\|f\|_{L^1(\lambda)} \le \lambda(X)^{1/2} \|f\|_{L^2(\lambda)}.$$

证明. 把 Hölder 不等式应用于 $|f|$ 与恒等于 1 的函数，得到

$$\int_X |f| \, d\lambda \le \left(\int_X |f|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_X 1^2 \, d\lambda \right)^{1/2} = \lambda(X)^{1/2} \|f\|_2.$$

□

引理 28.3 (Hilbert 空间中的闭凸集投影)**.** 设 H 是完备内积空间，$C \subset H$ 非空、闭且凸。则对每个 $u \in H$，存在唯一 $v \in C$，使

$$\|u - v\| = \inf_{w \in C} \|u - w\|.$$

证明. 令 $d = \inf_{w \in C} \|u - w\|$，取 $w_k \in C$ 使 $\|u - w_k\|^2 < d^2 + 1/k$。由平行四边形恒等式，

$$\|w_k - w_\ell\|^2 = 2\|u - w_k\|^2 + 2\|u - w_\ell\|^2 - 4 \left\| u - \frac{w_k + w_\ell}{2} \right\|^2.$$

由于 C 凸，中点属于 C，故最后一项至少为 $4d^2$。于是

$$\|w_k - w_\ell\|^2 \le 2(d^2 + 1/k) + 2(d^2 + 1/\ell) - 4d^2 = \frac{2}{k} + \frac{2}{\ell}.$$

所以 (w_k) 是 Cauchy 列。完备性给出 $w_k \to v \in H$，闭性给出 $v \in C$。范数连续，故 $\|u - v\| = d$。

若 v_1, v_2 都达到最小值，则把上面的平行四边形恒等式应用于 v_1, v_2，中点仍在 C，得到

$$\|v_1 - v_2\|^2 = 2\|u - v_1\|^2 + 2\|u - v_2\|^2 - 4 \left\| u - \frac{v_1 + v_2}{2} \right\|^2 \le 0.$$

因此 $v_1 = v_2$。 □

定理 28.4 (L^2 中的 Riesz 表示)**.** 设 $\lambda(X) < +\infty$，$T : L^2(\lambda) \to \mathbb{R}$ 是有界线性泛函，即存在 C 使

$$|T(f)| \le C \|f\|_2 \qquad (f \in L^2(\lambda)).$$

则存在唯一 $h \in L^2(\lambda)$，使

$$T(f) = \int_X f h \, d\lambda \qquad (f \in L^2(\lambda)).$$

证明. 若 $T = 0$，取 $h = 0$ 即可。以下设 $T \neq 0$，并令 $N = \ker T$。N 是闭子空间：若 $f_k \in N$ 且 $f_k \to f$ 于 L^2，则 $|T(f)| \le |T(f - f_k)| \le C\|f - f_k\|_2 \to 0$，故 $f \in N$。

取 $u \in L^2$ 使 $T(u) = 1$，并用投影引理将 u 投影到 N，记投影为 v。令 $w = u - v$。对任意 $z \in N$ 和任意实数 t，$v + tz \in N$，函数

$$\varphi(t) = \|u - (v + tz)\|_2^2 = \|w - tz\|_2^2$$

在 $t = 0$ 处取最小值，故

$$0 = \varphi'(0) = -2\langle w, z \rangle.$$

所以 $w \perp N$。对任意 f，取

$$z = f - T(f)u.$$

则 $T(z) = 0$，故 $z \in N$，从而

$$\langle w, f\rangle = T(f)\langle w, u\rangle.$$

又

$$\langle w, u\rangle = \langle w, v + w\rangle = \|w\|_2^2.$$

$w \neq 0$，因为 $T(u) = 1$，故 $\|w\|_2^2 > 0$。令

$$h = \frac{w}{\|w\|_2^2},$$

得到 $T(f) = \langle f, h\rangle = \int f h \, d\lambda$。

若 h_1, h_2 都表示 T，则 $\int f(h_1 - h_2)\, d\lambda = 0$ 对所有 $f \in L^2$ 成立。取 $f = h_1 - h_2$，得到 $\|h_1 - h_2\|_2^2 = 0$，故两者几乎处处相等。 □

28.2 有限测度的分解

定理 28.5 (Lebesgue 分解定理)**.** 设 μ, ν 是 X 上的有限测度。则存在非负可测函数 $g \in L^1(\mu)$ 与测度 ν_s，使

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu + \nu_s(E) \qquad (E \in \mathcal{A}),$$

并且

$$\nu_s \perp \mu.$$

函数 g 与测度 ν_s 在几乎处处意义下唯一。特别地，若 $\nu \ll \mu$，则 $\nu_s = 0$，从而

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu.$$

证明. 令 $\lambda = \mu + \nu$。则 λ 是有限测度，且

$$0 \le \nu(E) \le \lambda(E).$$

在 $L^2(\lambda)$ 上定义

$$T(f) = \int_X f \, d\nu.$$

由引理 28.2 和 $\nu \le \lambda$，

$$|T(f)| \le \int_X |f| \, d\nu \le \int_X |f| \, d\lambda \le \lambda(X)^{1/2} \|f\|_{L^2(\lambda)}.$$

故 T 是有界线性泛函。Riesz 表示给出 $h \in L^2(\lambda)$，使

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f h \, d\lambda \qquad (f \in L^2(\lambda)).$$

取 $f = \mathbf{1}_E$，得到

$$\nu(E) = \int_E h \, d\lambda.$$

先证明 $0 \le h \le 1$ 几乎处处。若 $A_k = \{h \le -1/k\}$ 有正测度，则

$$0 \le \nu(A_k) = \int_{A_k} h \, d\lambda \le -\frac{1}{k}\lambda(A_k) < 0,$$

矛盾。故 $\lambda(\{h < 0\}) = 0$。另一方面，由 $\nu(E) \le \lambda(E)$，若 $B_k = \{h \ge 1 + 1/k\}$ 有正测度，则

$$\lambda(B_k) \ge \nu(B_k) = \int_{B_k} h \, d\lambda \ge \left(1 + \frac{1}{k}\right) \lambda(B_k) > \lambda(B_k),$$

矛盾。故 $h \le 1$ 几乎处处。

令

$$S = \{h = 1\}, \qquad A = X \setminus S.$$

在 S 上，

$$\nu(S) = \int_S h \, d\lambda = \lambda(S),$$

所以

$$\mu(S) = \lambda(S) - \nu(S) = 0.$$

定义

$$\nu_s(E) = \nu(E \cap S).$$

则 $\nu_s \perp \mu$，由 S 承载。以下在 A 上构造绝对连续部分。令

$$A_k = \{x \in A : h(x) \le 1 - 1/k\}.$$

除去一个 λ-零集后，$A = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k$。在 A_k 上，$(1-h)^{-1}$ 有界。对任意 $E \subseteq A_k$，函数

$$\phi = \frac{\mathbf{1}_E}{1 - h}$$

满足 $0 \le \phi \le k$，因而属于 $L^2(\lambda)$。由表示等式以及 $\lambda = \mu + \nu$，

$$\int \phi \, d\nu = \int \phi h \, d\lambda = \int \phi h \, d\mu + \int \phi h \, d\nu.$$

移项后得到

$$\int \phi (1 - h) \, d\nu = \int \phi h \, d\mu.$$

代入 $\phi = \mathbf{1}_E/(1-h)$，便有

$$\nu(E) = \int_E \frac{h}{1-h} \, d\mu.$$

令

$$g = \frac{h}{1-h} \mathbf{1}_A.$$

对 A_k 逐层应用上式，并用单调收敛定理，得到

$$\nu(E \cap A) = \int_E g \, d\mu.$$

所以

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu + \nu_s(E).$$

因为 $\nu(X) < +\infty$，有

$$\int_X g\,d\mu = \nu(A) \le \nu(X) < +\infty,$$

故 $g \in L^1(\mu)$。

最后证明唯一性。若

$$\nu = g_1\mu + \sigma_1 = g_2\mu + \sigma_2, \qquad \sigma_1 \perp \mu,\ \sigma_2 \perp \mu,$$

取可测集 S 承载 σ_1，T 承载 σ_2，则在 $X \setminus (S \cup T)$ 上

$$\int_E (g_1 - g_2)\,d\mu = 0$$

对所有 $E \subseteq X \setminus (S \cup T)$ 成立。分别取 $E = \{g_1 > g_2 + 1/k\}$ 与 $E = \{g_2 > g_1 + 1/k\}$，得到 $g_1 = g_2$ μ-几乎处处。再把等式代回，即得 $\sigma_1 = \sigma_2$。 □

定理 28.6 (Radon–Nikodym 定理（有限情形）)**.** *若 ν, μ 是有限测度且 $\nu \ll \mu$，则存在唯一的 $g \in L^1(\mu)$，使*

$$\nu(E) = \int_E g\,d\mu \qquad (E \in \mathcal{A}).$$

并且

$$\int_X g\,d\mu = \nu(X), \qquad g \ge 0 \quad \mu\text{-几乎处处}.$$

证明. 应用定理 28.5。因为 $\nu \ll \mu$，而奇异部分集中于 μ-零集，所以 $\nu_s(X) = 0$。唯一性已在该定理末尾证明。取 $E = X$ 得积分等式；若 $\{g < 0\}$ 有正测度，则在该集合上积分为负而 ν 非负，故 $g \ge 0$ 几乎处处。 □

命题 28.7 (密度的唯一性与积分换写)**.** *设 $g, h \in L^1(\mu)$，且*

$$\int_E g\,d\mu = \int_E h\,d\mu \qquad (E \in \mathcal{A}).$$

则 $g = h$ μ-几乎处处。因而对任意有界可测 ϕ，

$$\int_X \phi g\,d\mu = \int_X \phi h\,d\mu.$$

证明. 令 $u = g - h$。若 $E_k = \{u \ge 1/k\}$ 有正测度，则

$$0 = \int_{E_k} u\,d\mu \ge \frac{1}{k}\mu(E_k) > 0,$$

矛盾；对 $\{u \le -1/k\}$ 同理。故 $u = 0$ 几乎处处。第二式先对简单函数成立，再由有界可测函数的简单逼近和控制收敛定理得到。 □

28.3 σ-有限推广与测度密度的例子

定理 28.8 (Radon–Nikodym 定理（σ-有限情形）)**.** 设 $X=\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$，其中 X_m 可测且递增，且

$$\mu(X_m)<+\infty, \qquad \nu(X_m)<+\infty.$$

若 $\nu \ll \mu$，则存在非负可测函数 g，使

$$\nu(E)=\int_E g\,d\mu \qquad (E\in\mathcal{A}).$$

g 在 μ-几乎处处意义下唯一。

证明. 令 $Y_1=X_1, Y_m=X_m\backslash X_{m-1}(m\geq 2)$。这些集合两两不交并覆盖 X，且 $\mu(Y_m),\nu(Y_m)<+\infty$。把有限情形应用于 $\mu_m(E)=\mu(E\cap Y_m)$、$\nu_m(E)=\nu(E\cap Y_m)$，得到 $g_m\geq 0$，使

$$\nu(E\cap Y_m)=\int_{E\cap Y_m} g_m\,d\mu.$$

定义

$$g=\sum_{m=1}^{\infty} g_m \mathbf{1}_{Y_m}.$$

由于 Y_m 不交，g 可测。对任意 E，用可数可加性和非负积分的可数可加性，

$$\nu(E)=\sum_m \nu(E\cap Y_m)=\sum_m \int_{E\cap Y_m} g_m\,d\mu=\int_E g\,d\mu.$$

唯一性由有限情形的唯一性逐层得到。 □

例 28.9 (带密度的测度)**.** 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，$w\geq 0$ 可测。定义

$$\nu(E)=\int_E w\,d\mu.$$

则 ν 是测度；若 $w\in L^1_{\mathrm{loc}}$，它在每个有界盒体上有限，并且

$$\frac{d\nu}{d\mu}=w$$

几乎处处。若 $w>0$ 几乎处处，则 ν 与 μ 具有相同的零测集。

证明. 对两两不交的 E_j，由非负积分的可数可加性，

$$\nu\left(\bigcup_j E_j\right)=\int_{\bigcup_j E_j} w\,d\mu=\sum_j \int_{E_j} w\,d\mu=\sum_j \nu(E_j).$$

密度等式由定义成立。若 $w>0$ 几乎处处且 $\nu(E)=0$，则 $\int_E w\,d\mu=0$。对 $E_k=E\cap\{w\geq 1/k\}$，有 $\mu(E_k)\leq k\nu(E)=0$，而 $E\setminus\bigcup_k E_k\subseteq\{w=0\}$ 是零测集，故 $\mu(E)=0$。 □

注 28.10. 在有限测度空间中，Radon–Nikodym 密度是“测度相对于参考测度的导数”。下一章将把绝对连续函数的增量看成一种测度；届时 dF/dx 就是这个测度的 Radon–Nikodym 密度，并由本册上一章的微分定理识别为经典导数。

29　有界变差、绝对连续与 Newton–Leibniz 公式

上一章的 Radon–Nikodym 定理给出了测度密度。本章把它用于函数：一个单调函数的增量天然定义一个测度；当这个测度对 Lebesgue 测度绝对连续时，它就有一个可积密度。Lebesgue 微分定理再把这个密度识别为函数的经典导数。

这里必须区分三个层次。可导函数不一定导数可积；导数可积也不保证原函数由导数积分恢复；真正等价于积分表示的条件是绝对连续性。Cantor 函数将在本章末尾说明，单纯的“几乎处处导数”不能替代绝对连续性。

29.1　总变差与 Jordan 分解

定义 29.1 (总变差)**.** 设 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$。对分割

$$\mathcal{P}:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$$

定义

$$V(F,\mathcal{P})=\sum_{j=1}^{m}|F(x_j)-F(x_{j-1})|.$$

称

$$V_a^b(F)=\sup_{\mathcal{P}}V(F,\mathcal{P})$$

为 F 在 $[a,b]$ 上的总变差。若 $V_a^b(F)<+\infty$，称 F 有界变差，记 $F\in BV([a,b])$。

引理 29.2 (变差的基本不等式)**.** *对 $F\in BV([a,b])$ 和 $a\le x<y\le b$，有*

$$|F(y)-F(x)|\le V_x^y(F).$$

若 $a\le x<y<z\le b$，则

$$V_x^z(F)=V_x^y(F)+V_y^z(F).$$

证明. 第一式取只含 x,y 的分割即可。对第二式，先任取 $[x,y]$ 和 $[y,z]$ 的分割，把两者在 y 处拼接，得到 $[x,z]$ 的分割，因此

$$V_x^z(F)\ge V_x^y(F)+V_y^z(F).$$

反向地，任取 $[x,z]$ 的分割。若分割中没有 y，把 y 插入；插入点只会把一个增量拆成两个增量，而

$$|F(t)-F(s)|\le|F(t)-F(y)|+|F(y)-F(s)|.$$

所以该分割的变差不超过 $V_x^y(F)+V_y^z(F)$。取所有分割的上确界，得到反向不等式。　□

定理 29.3 (Jordan 分解)**.** *若 $F \in BV([a,b])$，令*

$$P(x) = V_a^x(F), \qquad N(x) = P(x) - F(x) + F(a).$$

则 P, N 都是非减函数，并且

$$F(x) - F(a) = P(x) - N(x).$$

证明. 若 $x < y$，由变差的可加性，

$$P(y) - P(x) = V_x^y(F) \geq 0.$$

另一方面，

$$N(y) - N(x) = V_x^y(F) - \big(F(y) - F(x)\big).$$

由 $V_x^y(F) \geq |F(y) - F(x)|$，右侧不小于 $V_x^y(F) - |F(y) - F(x)| \geq 0$。所以 N 也非减。最后的分解式只是 N 的定义重新整理。 □

推论 29.4 (有界变差函数的有界性)**.** *若 $F \in BV([a,b])$，则*

$$|F(x) - F(a)| \leq V_a^b(F) \qquad (x \in [a,b]).$$

证明. 把 a, x 看作 $[a,b]$ 的一个分割，变差至少包含该增量的绝对值。 □

29.2 绝对连续性与变差

命题 29.5 (绝对连续函数的基本性质)**.** *绝对连续函数 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ 一致连续，且属于 $BV([a,b])$。*

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，取绝对连续性定义中的 δ。对任意 $x, y \in [a,b]$，若 $|x - y| < \delta$，只取一个区间即可得到 $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$，所以 F 一致连续。

要证有界变差，取整数 M 使 $(b-a)/M < \delta$，并令

$$t_k = a + k(b-a)/M \quad (0 \leq k \leq M).$$

任取分割 $\mathcal{P}$，把所有 t_k 加入其中得到细化分割 $\mathcal{P}'$。三角不等式说明 $V(F, \mathcal{P}) \leq V(F, \mathcal{P}')$。对每个 k，把 $\mathcal{P}'$ 中完全落在 $[t_{k-1}, t_k]$ 内的相邻小区间列出来；它们两两不交，总长度不超过 $(b-a)/M < \delta$，所以绝对连续性的定义给出这些增量绝对值之和小于 ε。端点 t_k 的增量已经在相邻两组中各出现至多一次，因而

$$V(F, \mathcal{P}') \leq \sum_{k=1}^{M} \varepsilon = M\varepsilon.$$

M 固定且有限，故对所有 $\mathcal{P}$ 取上确界得到 $V_a^b(F) \leq M\varepsilon < +\infty$。 □

引理 29.6 (绝对连续函数的变差仍绝对连续)**.** *若 F 绝对连续，令 $P(x) = V_a^x(F)$，则 P 绝对连续。*

证明. 给定 $\varepsilon>0$。取绝对连续性定义中的 $\delta>0$。设 (α_j,β_j) 两两不交且 $\sum_j(\beta_j-\alpha_j)<\delta$。固定 j，任取 $[\alpha_j,\beta_j]$ 的分割

$$\alpha_j=t_{j,0}<\cdots<t_{j,m_j}=\beta_j.$$

这些小区间在所有 j 中仍两两不交，故绝对连续性给出

$$\sum_j\sum_{k=1}^{m_j}|F(t_{j,k})-F(t_{j,k-1})|<\varepsilon.$$

对每个 j 取分割的上确界，并注意各项非负，得到

$$\sum_j\big(P(\beta_j)-P(\alpha_j)\big)\le\varepsilon.$$

这正是 P 的绝对连续性。 □

29.3 连续单调函数的 Stieltjes 测度

定理 29.7 (连续单调函数产生的测度). 设 $P:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且非减。则存在唯一的有限 *Borel* 测度 ν_P，使对所有 $a\le s<t\le b$，

$$\nu_P((s,t])=P(t)-P(s),\qquad \nu_P([a,t])=P(t)-P(a).$$

将其补全后，ν_P 也定义在 *Lebesgue* 可测集上。

证明. 先在半开区间的半环上定义内容

$$\rho((s,t])=P(t)-P(s),\qquad \rho([a,t])=P(t)-P(a).$$

若一个半开区间被有限个两两不交半开区间分割，端点按从左到右排列，则望远镜求和给出 ρ 的有限可加性。

对任意 $E\subseteq[a,b]$，定义外测度

$$\nu_P^*(E)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\rho(I_j):E\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j,\ I_j\text{ 为上述半开区间}\right\}.$$

空覆盖约定为 $+\infty$。空集的空覆盖给出 $\nu_P^*(\varnothing)=0$；包含关系给出单调性；若 $E=\bigcup_k E_k$，对每个 k 取覆盖 $I_{k,j}$ 使其总内容不超过 $\nu_P^*(E_k)+\varepsilon2^{-k}$，合并所有覆盖便得

$$\nu_P^*(E)\le\sum_k\nu_P^*(E_k)+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\downarrow0$，得到可数次次可加性。还需验证半开区间 $I=(s,t]$ 可测。给定任意覆盖 I_j 和任意 $A\subseteq[a,b]$，把每个 I_j 在端点 s,t 处切开；半环的有限可加性给出

$$\rho(I_j)=\rho(I_j\cap I)+\rho(I_j\setminus I)$$

(空集项记为零)。这些切片分别覆盖 $A\cap I$ 与 $A\setminus I$，故取下确界得到

$$\nu_P^*(A)\ge\nu_P^*(A\cap I)+\nu_P^*(A\setminus I).$$

反向不等式是外测度次可加性，故等号成立。Carathéodory 判据于是给出一个测度 ν_P，并且所有半开区间可测。

还需证明它在区间上的值没有改变。显然用区间自身覆盖得到

$$\nu_P^*((s,t]) \le P(t) - P(s).$$

反向地，设 $(s,t] \subseteq \bigcup_j I_j$。固定 $\eta > 0$，由 P 的连续性可取 $u \in (s,t)$，使 $P(u) - P(s) < \eta$。紧集 $[u,t]$ 被这些覆盖区间的内部略微扩大后覆盖，故有有限子覆盖 $I_{j_1}, \dots, I_{j_m}$。把这些区间的端点按顺序排列，并删去重叠部分后，有限可加性与单调性给出

$$P(t) - P(u) \le \sum_{\ell=1}^{m} \rho(I_{j_\ell}).$$

于是

$$P(t) - P(s) \le \eta + \sum_{\ell=1}^{m} \rho(I_{j_\ell}) \le \eta + \sum_{j} \rho(I_j).$$

取所有覆盖的下确界，再令 $\eta \downarrow 0$，得到反向不等式。对 $[a,t]$ 同理。

半开区间生成 $[a,b]$ 的 Borel σ-代数，测度唯一性由 π-λ 定理给出。最后，Lebesgue 测度是完备的；把 ν_P 在其零测集上补全即可定义于 Lebesgue 可测集。连续性保证单点的边界质量为零，所以开闭端点的选择不影响后续公式。 □

引理 29.8 (绝对连续性给出测度的绝对连续性)**.** *设 P 绝对连续且非减，ν_P 为上一定理的测度。若 $E \subseteq [a,b]$ 是 Lebesgue 零测集，则*

$$\nu_P(E) = 0.$$

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，取绝对连续性定义中的 $\delta > 0$。由零测集定义，存在可数个开区间 $I_j = (u_j, v_j)$ 覆盖 E，且 $\sum_j (v_j - u_j) < \delta$。连续性和区间公式给出

$$\nu_P(I_j) = \nu_P((u_j, v_j]) = P(v_j) - P(u_j).$$

（开端点与半开端点之差是单点，而连续性使单点测度为零。）由可数次次可加性，

$$\nu_P(E) \le \sum_j \nu_P(I_j) = \sum_j \big(P(v_j) - P(u_j)\big) < \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，得到结论。 □

29.4 绝对连续函数的微分与积分表示

定理 29.9 (绝对连续函数的导数存在且可积)**.** *若 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ 绝对连续，则 F' 在几乎处处存在，$F' \in L^1([a,b])$，并且*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt \qquad (a \le x \le b).$$

证明. 由命题 29.5，$F \in BV$。令

$$P(x) = V_a^x(F), \qquad N(x) = P(x) - F(x) + F(a).$$

由引理 29.6，P 绝对连续；而

$$N(y)-N(x)=\big(P(y)-P(x)\big)-\big(F(y)-F(x)\big)$$

说明 N 也是绝对连续。两者都连续、非减，因此分别产生 Stieltjes 测度 ν_P,ν_N。引理 29.8 说明 $\nu_P,\nu_N\ll\lambda$。由 Radon–Nikodym 定理，存在 $p,n\in L^1([a,b])$、$p,n\ge 0$，使

$$P(x)-P(a)=\int_a^x p(t)\,dt,\qquad N(x)-N(a)=\int_a^x n(t)\,dt.$$

这里先对区间 $[a,x]$ 应用密度公式，再用 $\nu_P([a,x])=P(x)-P(a)$。

因为

$$F(x)-F(a)=\big(P(x)-P(a)\big)-\big(N(x)-N(a)\big),$$

有

$$F(x)-F(a)=\int_a^x (p-n)(t)\,dt.$$

令 $g=p-n\in L^1$。由变上限积分的 Lebesgue 微分定理 27.13，上式右端的导数在几乎处处等于 g。因此 $F'=g$ 几乎处处，且 $F'\in L^1$，并得到所需积分表示。 □

定理 29.10 (Lebesgue 版微积分基本定理)**.** *设 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$。以下两条等价：*

1. *F 绝对连续；*
2. *存在 $f\in L^1([a,b])$，使*

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt\qquad (a\le x\le b).$$

在这两种情形下 $f=F'$ 几乎处处，且

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)\,dt.$$

证明. 若 F 绝对连续，应用定理 29.9，取 $f=F'$ 即得 (2)。

反过来，若 $F(x)=F(a)+\int_a^x f$，则定理 27.13 已证明该变上限积分绝对连续，常数 $F(a)$ 不改变绝对连续性，故 F 绝对连续。导数与积分公式分别由两个定理得到。 □

推论 29.11 (绝对连续函数的积分分部公式)**.** *若 F,G 绝对连续，则 FG 绝对连续，且*

$$\int_a^b F'(x)G(x)\,dx+\int_a^b F(x)G'(x)\,dx=F(b)G(b)-F(a)G(a).$$

证明. 绝对连续函数在紧区间上有界。若 (u_j,v_j) 两两不交，则

$$|F(v_j)G(v_j)-F(u_j)G(u_j)|\le\|G\|_\infty|F(v_j)-F(u_j)|+\|F\|_\infty|G(v_j)-G(u_j)|.$$

给定 ε，分别对 F,G 选择绝对连续性的 δ，取较小者并求和，得到 FG 绝对连续。对几乎处处的 x，两者都可导且乘积求导法则成立：

$$(FG)'=F'G+FG'.$$

对 FG 应用定理 29.9，并把两端值相减，得到公式。 □

推论 29.12 (Lipschitz 函数的积分表示)**.** *若 F 满足*

$$|F(x)-F(y)| \le L|x-y| \qquad (x,y\in[a,b]),$$

则 F 绝对连续，F' 几乎处处存在且 $|F'|\le L$ 几乎处处，并且

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\,dt.$$

证明. 若 $\sum_j (v_j-u_j)<\delta=\varepsilon/L$，则

$$\sum_j |F(v_j)-F(u_j)| \le L\sum_j (v_j-u_j) < \varepsilon.$$

故 F 绝对连续。应用定理 29.9 得到积分表示。对差商

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| \le L$$

取 $h\to 0$，在导数存在的点得到 $|F'(x)|\le L$。 □

29.5　Cantor 函数与奇异部分

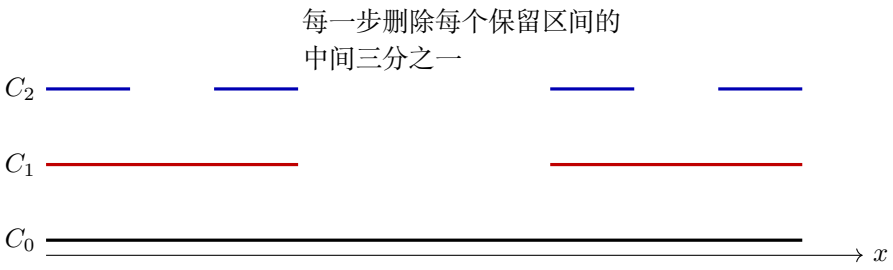


图 29.1: Cantor 集构造的前三个阶段。

定义 29.13 (Cantor 集)**.** 令 $C_0=[0,1]$。递归地，从 C_{m-1} 的每个闭区间中删除其开中间三分之一，所得闭集记为 C_m。定义

$$C=\bigcap_{m=0}^{\infty} C_m.$$

命题 29.14 (Cantor 集是零测集)**.** *Cantor 集 C 闭且*

$$\lambda(C)=0.$$

证明. C_m 是 2^m 个长度 3^{-m} 的闭区间之并，故

$$\lambda(C_m)=\left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

集合列递减且 C_0 测度有限，测度的连续性给出

$$\lambda(C)=\lim_{m\to\infty}\lambda(C_m)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m=0.$$

闭性来自闭集的可数交。 □

定义 29.15 (Cantor 函数)**.** 若 $x \in C$，取其三进展开

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k}, \qquad \xi_k \in \{0, 2\},$$

并定义

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k/2}{2^k}.$$

若 $x \notin C$，则它落在某个被删除的中间区间 (u, v) 中，定义 $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$；端点的两个展开给出同一个值。令 $\mathcal{C}(0) = 0, \mathcal{C}(1) = 1$。

命题 29.16 (Cantor 函数的基本性质)**.** *Cantor 函数 $\mathcal{C} : [0,1] \to [0,1]$ 连续、非减，且在 $[0,1] \setminus C$ 的每一点都有导数 0。但是*

$$\mathcal{C}(1) - \mathcal{C}(0) = 1.$$

证明. 在每个被删除的中间区间上，$\mathcal{C}$ 按定义为常数，故在这些区间内部导数为零。补集 $[0,1] \setminus C$ 是所有这些区间的可数并，因此其每一点都有导数零。

对连续性，先在 C 上考虑三进展开。若 $x, y \in C$ 的前 m 位三进数字相同，则

$$|x - y| \le \sum_{k>m} \frac{2}{3^k} = 3^{-m},$$

而

$$|\mathcal{C}(x) - \mathcal{C}(y)| \le \sum_{k>m} \frac{1}{2^k} = 2^{-m}.$$

故在 C 上连续。若 x 在被删去区间内部，函数在其邻域内常数；在端点处，从两侧取 C 中的点，以上估计给出相同极限。因此全区间连续。

单调性可由三进数字的字典序验证：若 $x < y$，在第一个不同数字处，x 的数字为 0，y 的数字为 2，二进表示中对应数字也满足 $0 < 1$，尾项的最大可能差不足以改变顺序。最后 $\mathcal{C}(0) = 0, \mathcal{C}(1) = 1$ 是定义。 □

定理 29.17 (Cantor 函数不是绝对连续函数)**.** *Cantor 函数 $\mathcal{C}$ 连续、非减，且 $\mathcal{C}' = 0$ 几乎处处，但 $\mathcal{C}$ 不绝对连续。*

证明. 由上一命题，导数在 $[0,1] \setminus C$ 上为零；而 C 是零测集，所以 $\mathcal{C}' = 0$ 几乎处处。若 $\mathcal{C}$ 绝对连续，则定理 29.9 给出

$$\mathcal{C}(1) - \mathcal{C}(0) = \int_0^1 \mathcal{C}'(x)\, dx = 0,$$

但左侧等于 1，矛盾。 □

注 29.18. Cantor 函数对应的 Stieltjes 测度集中在零测集 C 上，因此它正是上一章 Lebesgue 分解中的奇异部分。这个例子解释了为什么“导数几乎处处为零”不能推出函数为常数：缺少的部分由奇异测度承载，而不是由一个 L^1 密度承载。

参考文献

[1] Jiří Lebl, *Basic Analysis I: Introduction to Real Analysis, Volume I*, version 6.3, May 15, 2026. 本阶段核读第 23–36 页（第 1.1–1.2 节与第 1.3 节开头），用于有序集合、有序域、确界、Archimedes 性及绝对值的基础对照。第五章另核读第 264–270 页（第 7.2 节相关定义与命题）和第 280–285 页（第 7.4.2 节及相关例子），用于相对开闭集、连通性、有限覆盖与序列紧性的对照。`https://www.jirka.org/ra/realanal.pdf`

[2] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, 1987. 用于 Lebesgue 积分、L^p 空间、微分定理和绝对连续函数的经典理论对照。

[3] Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed., Wiley, 1999. 用于乘积测度、Radon–Nikodym 定理、Lebesgue 分解及微分理论的测度论框架对照。

[4] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005. 用于最大函数、覆盖引理、L^p 与 Hilbert 空间论证的讲述层次对照。