代数学综合高阶习题集

集合、映射与有限结构

本集独立于代数学正文，采用全书连续题号。当前收入题 001–008：从不相交平移、双射与共同代表，进入反链、交叉集合对、奇偶交与关联矩阵。每题给出完整解答，核读题源和改编说明集中列在书末。
本次为首批八题校订稿，后续按证明审校结果逐题增补。

中文题集　2026 年 10 月 27 日

目录

记号与阅读约定 **ii**

集合、映射与有限结构 **1**

题 001　一百个互不相交的平移 1
题 002　由两个单射拼出一个双射 2
题 003　两种划分的共同代表与逐层分解 3
题 004　反链的加权界与全部极值情形 4
题 005　交叉相交的集合对 6
题 006　奇偶交：线性界与指数界 7
题 007　相同交数强迫的线性独立 9
题 008　把全部二元关系分成完全交叉块 11

题源与改编说明 **13**

记号与阅读约定

$[n]=\{1,\dots,n\}$，$\mathcal{P}(X)$ 为 X 的全部子集组成的集合。集合族不重复计入同一个子集。$|X|$ 表示有限集合的元素个数；$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为对称差。映射复合从右向左：$(g\circ f)(a)=g(f(a))$。$\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$。

$\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ 的加法和乘法模二计算。后半部分在需要处定义指标向量、内积和正交补；只使用有限维线性代数的基、维数与秩–零度公式。所有计数均写明计数对象，涉及无限集合时另给显式映射。来源表说明所据版本及题目是原题重述、定理改编还是习题改编；正文解答均在本集中重新组织推导。

本集不按代数学正文分册，也不预先把每个领域填满二十道。当前八题属于集合与映射这一领域的起始选题，未表示该领域已覆盖完毕。

集合、映射与有限结构

题 001　一百个互不相交的平移

题目　设

$$S=\{1,2,\dots,1000000\},\qquad A\subseteq S,\quad |A|=101.$$

证明存在 S 中一百个互不相同的整数 $x_1,\dots,x_{100}$，使集合

$$A+x_i=\{a+x_i : a\in A\}\qquad (1\le i\le 100)$$

两两不相交。这里不要求这些平移后的集合仍包含在 S 中。

解答　先找出两个平移相交的充要条件。对任意整数 x,y，

$$\begin{aligned}(A+x)\cap(A+y)\neq\varnothing &\iff \text{存在}a,b\in A,\ \text{使}a+x=b+y\\ &\iff x-y=b-a\ \text{对某些}a,b\in A\ \text{成立}\\ &\iff x-y\in D,\end{aligned}$$

其中

$$D=A-A=\{b-a : a,b\in A\}.$$

D 包含零。非零差只能由不同的有序对 (a,b) 给出；这样的有序对有 $101\cdot 100$ 个。不同有序对可能给出相同差，故这里得到的是上界

$$|D|\le 1+101\cdot 100=10101.$$

现在递归选择平移量。令 $x_1=1$。假设已选出 $1\le r\le 99$ 个平移量，且其平移集两两不交。对每个已选 x_i，会与 $A+x_i$ 相交的候选整数构成集合 x_i+D。因此所有禁用的候选量都落在

$$F_r=S\cap\bigcup_{i=1}^{r}(x_i+D)$$

内。有限并集的大小至多为各集合大小之和，所以

$$|F_r|\le\sum_{i=1}^{r}|x_i+D|=r|D|\le 99\cdot 10101=999999<|S|.$$

于是 $S\setminus F_r$ 非空，从中取 x_{r+1}。对每个 $i\le r$，有 $x_{r+1}-x_i\notin D$，由开始的充要条件，$A+x_{r+1}$ 与 $A+x_i$ 不相交。又因 $0\in D$，每个已选 x_i 都属于 F_r，故新选的 x_{r+1} 不等于任何旧平移量。

从 $r=1$ 逐次做到 $r=99$，便得到所需的一百个平移量。选择过程只在 S 内进行；平移后的元素可大于 1000000，不影响上述相交判据。　□

题 002　由两个单射拼出一个双射

题目　设 A, B 是任意集合，已给定单射

$$f : A \longrightarrow B, \qquad g : B \longrightarrow A.$$

不使用基数比较定理，构造一个双射 $h : A \to B$，并证明它的公式在每个元素上都有定义、保持单射且满射。不得预先假设 A 与 B 不相交。

解答　从没有 g 前驱的 A 中元素开始，定义

$$A_0 = A \setminus g(B), \qquad A_{r+1} = g(f(A_r))\ (r \in \mathbb{N}_0), \qquad C = \bigcup_{r=0}^{\infty} A_r.$$

这是由已给映射逐次取像的构造，没有从无限多个非空集合中任意选点。

先验证不同的 A_r 两两不交。A_0 与所有 A_r（$r \geq 1$）不交，因为后者包含在 $g(B)$ 中。若 $0 < r < s$ 且 $z \in A_r \cap A_s$，则存在 $u \in A_{r-1}$、$v \in A_{s-1}$ 使

$$z = g(f(u)) = g(f(v)).$$

依次使用 g, f 的单射性，得 $u = v$，所以 $A_{r-1} \cap A_{s-1}$ 非空。重复 r 次会推出 $A_0 \cap A_{s-r}$ 非空，与 $s - r \geq 1$ 矛盾。因此这些集合确实不交。

图中只画出从 A_0 出发的递归层；右向上的箭头使用 g，左侧向下的箭头使用 f。

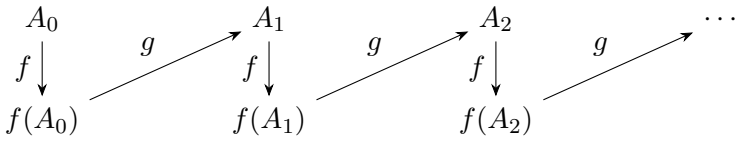


图 1: 递归层满足 $A_{r+1} = g(f(A_r))$；A_0 可以为空。

单射 g 在其像 $g(B)$ 上有逆映射：若 $a \in g(B)$，唯一的 $b \in B$ 满足 $g(b) = a$，记为 $g^{-1}(a)$。现在定义

$$h(a) = \begin{cases} f(a), & a \in C, \\ g^{-1}(a), & a \in A \setminus C. \end{cases}$$

两个分支互不重叠并覆盖 A。第二分支中，$A_0 \subseteq C$ 保证 $a \notin A \setminus g(B)$，即 $a \in g(B)$，所以逆像存在且唯一。因此 h 是确有定义的映射 $A \to B$。

证明单射。在 C 上，h 等于单射 f，所以此分支内没有重复像。在 $A \setminus C$ 上，若 $h(a) = h(a')$，则对两边作用 g 得 $a = a'$。还须排除两个分支的像相遇：若 $a \in C$、$a' \notin C$ 且 $h(a) = h(a')$，则

$$f(a) = g^{-1}(a'), \qquad a' = g(f(a)).$$

a 属于某个 A_r，故 $a' \in A_{r+1} \subseteq C$，与 $a' \notin C$ 矛盾。因此 h 单射。

证明满射。任取 $b \in B$。若 $b \in f(C)$，取 $a \in C$ 使 $f(a) = b$，便有 $h(a) = b$。否则 $b \notin f(C)$。令 $a = g(b)$，断言 $a \notin C$。事实上，a 不属于 A_0，因为 $a \in g(B)$；若 $a \in A_{r+1}$，则存在 $c \in A_r$ 使

$$g(b) = a = g(f(c)).$$

g 单射给出 $b=f(c)\in f(C)$，矛盾。因此 $a\notin C$，第二分支给出 $h(a)=g^{-1}(g(b))=b$。这覆盖任意 b，故 h 满射。

上述构造没有对 A,B 取并后再辨认顶点，因此它们有公共元素也不造成歧义。若某个集合为空，由两个给定单射可知另一集合也为空；同一公式给出空集到空集的双射。 □

题 003　两种划分的共同代表与逐层分解

题目　设 X 是有限集合，r,k 为正整数，且 X 同时有两种划分

$$X=\bigsqcup_{i=1}^{r}P_i=\bigsqcup_{j=1}^{r}Q_j,\qquad |P_i|=|Q_j|=k.$$

证明 X 可以分成 k 个两两不交的集合 $T_1,\dots,T_k$，使对任意 ℓ,i,j，

$$|T_\ell\cap P_i|=|T_\ell\cap Q_j|=1.$$

解答中须自行证明所用的代表元存在定理。

解答　先证明一个有限集合族的代表元判据。给定有限集合 $R_1,\dots,R_s$，存在互不相同的 $y_1,\dots,y_s$，且 $y_i\in R_i$，当且仅当

$$\left|\bigcup_{i\in I}R_i\right|\ge |I|\qquad \text{对每个}I\subseteq[s]\text{ 成立。}\tag{1}$$

必要性来自 $\{y_i:i\in I\}\subseteq\bigcup_{i\in I}R_i$，而互不相同保证左侧至少有 $|I|$ 个元素。

对充分性，按 s 作强归纳。$s=0$ 时取空代表组；$s=1$ 时，条件使 R_1 非空，选一个元素即可。设 $s\ge 2$，并假定少于 s 个集合时结论成立。

第一种情况：存在非空真子集 $I\subsetneq[s]$，使

$$U=\bigcup_{i\in I}R_i,\qquad |U|=|I|.$$

对下标在 I 中的子族，条件 (1) 仍成立；因 $|I|<s$，归纳假设给它们选出 $|I|$ 个不同代表，全部位于 U。

对 $j\notin I$ 定义 $R_j'=R_j\setminus U$。任取 $J\subseteq[s]\setminus I$，由于 I,J 不交，原条件给出

$$\begin{aligned}|I|+|J|&\le\left|\bigcup_{t\in I\cup J}R_t\right|\\&=\left|U\cup\bigcup_{j\in J}R_j\right|\\&=|U|+\left|\left(\bigcup_{j\in J}R_j\right)\setminus U\right|\\&=|I|+\left|\bigcup_{j\in J}R_j'\right|.\end{aligned}$$

消去 $|I|$，可知剩余子族也满足条件。其集合数 $s-|I|$ 小于 s，所以归纳假设给出它们的不同代表，且均在 U 外。拼接两组代表不会相撞，便覆盖原来的全部下标。

第二种情况：每个非空真子集 $I\subsetneq[s]$ 都满足严格不等式

$$\left|\bigcup_{i\in I}R_i\right|\geq|I|+1.$$

由单下标条件，R_s 非空，取 $y_s\in R_s$。对 $i<s$ 令 $R_i'=R_i\setminus\{y_s\}$。若 $I\subseteq[s-1]$ 非空，则它是 $[s]$ 的真子集，故

$$\left|\bigcup_{i\in I}R_i'\right|\geq\left|\bigcup_{i\in I}R_i\right|-1\geq|I|.$$

空下标集也满足条件。归纳假设给出前 $s-1$ 个集合的不同代表，全部避开 y_s；再加上 y_s 就得到所需代表。两种情况穷尽，所以判据得证。

现在回到两种划分。对每个 $i\in[r]$ 定义可用的第二类块下标

$$R_i=\{j\in[r]:P_i\cap Q_j\neq\varnothing\}.$$

固定 $I\subseteq[r]$，置 $J=\bigcup_{i\in I}R_i$。$\bigcup_{i\in I}P_i$ 的每个元素都位于某个与该并集相交的 Q_j，所以

$$\bigcup_{i\in I}P_i\subseteq\bigcup_{j\in J}Q_j.$$

两边分别是不交的等大块的并，因而

$$k|I|\leq k|J|.$$

$k>0$ 给出 $|J|\geq|I|$。由刚证明的判据，存在互不相同的 $j_1,\dots,j_r$，满足 $P_i\cap Q_{j_i}\neq\varnothing$。它们是 $[r]$ 中 r 个不同元素，所以恰好遍历全部下标。

逐个在非空交集 $P_i\cap Q_{j_i}$ 内取 t_i。这是有限次选取。不同 i 的 t_i 属于不同的 P_i，因此互不相同。令

$$T_1=\{t_1,\dots,t_r\}.$$

它在每个 P_i 中恰有一个元素；因 j_i 遍历 $[r]$，它在每个 Q_j 中也恰有一个元素。

最后按块大小 k 作归纳。$k=1$ 时每个块都是单点集，取 $T_1=X$。若 $k\geq2$，先按上一步选出 T_1。在 $X'=X\setminus T_1$ 中，集合 $P_i\setminus T_1$ 和 $Q_j\setminus T_1$ 仍分别构成划分，且每块大小为 $k-1$。归纳假设把 X' 分成 $k-1$ 个所需共同代表集，记为 $T_2,\dots,T_k$。它们位于 X' 中，所以与 T_1 不交，彼此也不交；并集连同 T_1 为全 X，结论成立。 □

题 004　反链的加权界与全部极值情形

题目　设 $n\geq1$，$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}([n])$，且不同的 $A,B\in\mathcal{A}$ 总满足 $A\not\subseteq B$、$B\not\subseteq A$。这样的集合族称为反链。

1. 证明

$$\sum_{A\in\mathcal{A}}\binom{n}{|A|}^{-1}\leq1,\qquad|\mathcal{A}|\leq\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

2. 证明第二个不等式取等当且仅当 $\mathcal{A}$ 是一个完整的中间层：n 偶数时为全部 $n/2$ 元子集；n 奇数时为全部 $(n-1)/2$ 元子集或全部 $(n+1)/2$ 元子集。

解答 一个排列 $\pi = (x_1, \dots, x_n)$ 唯一确定一条极大链

$$\varnothing \subset \{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \cdots \subset [n].$$

反过来，链上每一步新增的唯一元素恢复这个排列，所以这样的极大链恰有 $n!$ 条。任一链内的集合彼此包含，因此它与反链 $\mathcal{A}$ 至多相交一次。

固定 $A \in \mathcal{A}$，令 $|A| = a$。相应链包含 A，当且仅当前 a 个排列位置恰由 A 的元素占据。内部顺序有 $a!$ 种，剩下 $n-a$ 个元素有 $(n-a)!$ 种顺序。故包含 A 的链数为 $a!(n-a)!$。分别对 $\mathcal{A}$ 中所有集合计数，同一条链不会重复计入，得到

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \le n!.$$

除以 $n!$ 即得第一个不等式；$a = 0, n$ 时使用 $0! = 1$，公式仍有效。

记 $M = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$。利用相邻项之比

$$\frac{\binom{n}{a+1}}{\binom{n}{a}} = \frac{n-a}{a+1} \qquad (0 \le a < n),$$

可知二项式系数在中间之前严格增大，中间之后严格减小；当 n 为奇数时，仅两个中间项相等。因此 $\binom{n}{a} \le M$，于是

$$\frac{|\mathcal{A}|}{M} \le \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \le 1. \tag{2}$$

这证明所需的基数界。

下面分析 $|\mathcal{A}| = M$ 的全部可能。式 (2) 两处都必须取等。第一处等号使每个 $A \in \mathcal{A}$ 都处在系数最大的层；否则某一项严格大于 $1/M$，其余项至少为 $1/M$，总和就严格大于一。第二处等号表示每条极大链都恰好经过 $\mathcal{A}$ 中一个集合：总计数为全部链数，且没有一条链能重复计入。

若 $n = 2k$，最大层只有 k 元层。$\mathcal{A}$ 的 M 个元素已在总共 M 个 k 元子集中，故必须包含该层全部集合。

若 $n = 2k+1$，只知 $\mathcal{A}$ 包含在 k 元层与 $(k+1)$ 元层的并内。还须排除把两层混在一起的极值族。建立一个二部图：左边是全部 k 元子集，右边是全部 $(k+1)$ 元子集；仅在 $U \subset V$ 时连边。

对任一边 $U \subset V$，存在一条极大链同时包含它们：先排列 U 中元素，再放 $V \setminus U$ 的唯一元素，最后排列其余元素。此链上可能属于 $\mathcal{A}$ 的层只有这两层。因此 “每链恰好命中一次” 给出

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(U) + \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(V) = 1 \qquad (U \subset V). \tag{3}$$

证明该图连通。任取两个左边集合 U, W。若 $U \ne W$，则从 $U \setminus W$ 取 u，从 $W \setminus U$ 取 w，令

$$U' = (U \setminus \{u\}) \cup \{w\}, \qquad V = U \cup \{w\}.$$

U 和 U' 都包含于 V，故通过路径 U, V, U' 连通，而且 $|U' \setminus W| = |U \setminus W| - 1$。有限次重复即到 W，所以所有左边顶点连通。每个右边顶点都含一个 k 元子集，因此也连到左边。$k = 0$ 时图只有 $\varnothing$ 和 $\{1\}$ 两个顶点，同样连通。

由式 (3)，共享一个右边邻点的两个左边顶点有相同的指标值。沿上面的连通路径，所有左边指标值相同，记为 $c \in \{0,1\}$；所有右边指标值遂为 $1-c$。所以 $\mathcal{A}$ 恰为整个左层或整个右层。

最后，任一完整中间层都是反链：相同基数的两个不同集合不能互相包含。其大小等于 M，因此所列极值族确实全部取等。 □

题 005　交叉相交的集合对

题目　设 $m \geq 1$，$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ 为有限集合，满足

$$A_i \cap B_i = \varnothing, \qquad A_i \cap B_j \neq \varnothing \quad (i \neq j).$$

置 $a_i = |A_i|, b_i = |B_i|$。

1. 证明 Bollobás 集合对不等式
$$\sum_{i=1}^{m} \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1.$$

2. 若 $a_i = a, b_i = b$ 对所有 i 成立，证明 $m \leq \binom{a+b}{a}$，并对任意给定非负整数 a, b 构造达到此界的集合对。

3. 不引用题 004，直接由本题推出反链的加权不等式。

解答　令 $X = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cup B_i)$，$N = |X|$。记 E_i 为 X 的全部排列中满足以下条件的排列族：A_i 的每个元素都排在 B_i 的每个元素之前。若 A_i 或 B_i 为空，这个条件按全称量词解释，自动成立。

计算 $|E_i|$。先从 N 个位置中选出 $a_i + b_i$ 个位置放置 $A_i \cup B_i$，共有 $\binom{N}{a_i+b_i}$ 种。所选位置中最前 a_i 个必须由 A_i 占据，其内部顺序有 $a_i!$ 种；后 b_i 个位置由 B_i 占据，有 $b_i!$ 种顺序。余下元素可任意排列，有 $(N - a_i - b_i)!$ 种。因此

$$\begin{aligned} |E_i| &= \binom{N}{a_i + b_i} a_i! b_i! (N - a_i - b_i)! \\ &= \frac{N!}{(a_i + b_i)!(N - a_i - b_i)!} a_i! b_i! (N - a_i - b_i)! \\ &= \frac{N!}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}. \end{aligned}$$

关键是证明不同的 E_i 不相交。设 $i \neq j$。题设在两个交叉方向都成立，所以可取

$$x \in A_i \cap B_j, \qquad y \in A_j \cap B_i.$$

$x \neq y$；否则这个元素既在 A_i 又在 B_i 中，违反 $A_i \cap B_i = \varnothing$。若某排列属于 E_i，由于 $x \in A_i, y \in B_i$，它要求 x 在 y 前。若同时属于 E_j，由 $y \in A_j, x \in B_j$ 又要求 y 在 x 前。两个不同元素不可能同时满足这两个顺序，所以 $E_i \cap E_j = \varnothing$。

各 E_i 是全体 $N!$ 个排列中的不交子族，因而

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{N!}{\binom{a_i+b_i}{a_i}} \leq N!.$$

即使 $N=0$，也有唯一的空排列并且 $N!=1$，所以可在所有情况下除以 $N!$，得出第一问。

当所有 $a_i=a, b_i=b$ 时，第一问左侧为 $m/\binom{a+b}{a}$，故得所述上界。为证明上界可达，取一个 $a+b$ 元集合 Y，对它的每个 a 元子集 C，取一对

$$(A_C, B_C) = (C, Y\setminus C).$$

同一对交为空。若 $C\neq D$ 且 $|C|=|D|=a$，则 $C\setminus D$ 非空：若为空，则 $C\subseteq D$，有限且同基数会迫使 $C=D$。因此

$$A_C\cap B_D = C\cap (Y\setminus D) = C\setminus D \neq \varnothing.$$

这证明所有交叉条件。集合对总数为 $\binom{a+b}{a}$，达到上界。$a=0$ 或 $b=0$ 时只有一对，交叉条件没有不同下标需要检查，构造仍成立。

最后设 $\mathcal{A}$ 是 n 元集合 Y 上的反链。对每个 $C\in\mathcal{A}$ 取集合对 $(C, Y\setminus C)$。当 $C\neq D$ 时，反链条件 $C\not\subseteq D$ 给出 $C\setminus D\neq\varnothing$；所以本题假设全部满足。又 $|C|+|Y\setminus C|=n$，代入第一问得到

$$\sum_{C\in\mathcal{A}} \binom{n}{|C|}^{-1} \le 1.$$

空反链的和为零，也满足结论。 □

题 006　奇偶交：线性界与指数界

题目　设 $X=[n]$，$n\ge 0$。集合族均不重复计数同一个子集。

1. 若 $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{P}(X)$ 中每个集合大小为奇数，任意两个不同集合的交大小为偶数，证明 $|\mathcal{O}|\le n$，并给出取等构造。若 $|\mathcal{O}|=n$，写出任意 $B\subseteq X$ 作为这些集合的对称差的唯一公式。
2. 若 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ 中每个集合大小为偶数，任意两个不同集合的交大小仍为偶数，证明

$$|\mathcal{E}| \le 2^{\lfloor n/2\rfloor},$$

并对每个 n 给出取等构造。这里允许空集属于 $\mathcal{E}$。

解答　对每个 $A\subseteq[n]$，定义它的指标向量

$$v_A = (\mathbf{1}_A(1),\dots,\mathbf{1}_A(n))\in\mathbb{F}_2^n, \qquad \mathbf{1}_A(t)=\begin{cases}1, & t\in A,\\ 0, & t\notin A.\end{cases}$$

不同集合给出不同向量，因为有某个元素只属于两者中的一个，对应坐标便不同。对 $u,v\in\mathbb{F}_2^n$ 定义

$$\langle u, v\rangle = \sum_{t=1}^{n} u_t v_t \quad \text{在}\mathbb{F}_2\text{ 中计算.}$$

因此

$$\langle v_A, v_B\rangle = |A\cap B| \pmod 2. \tag{4}$$

特别地，$\langle v_A, v_A\rangle = |A| \pmod 2$。

先证第一问。把 $\mathcal{O}$ 中集合列为 $A_1,\dots,A_m$，置 $v_i=v_{A_i}$。由条件，

$$\langle v_i,v_i\rangle=1,\qquad \langle v_i,v_j\rangle=0\quad (i\neq j).$$

设 $\sum_{i=1}^m c_iv_i=0$，其中 $c_i\in\mathbb{F}_2$。固定 j，与 v_j 作内积，由双线性性得到

$$0=\left\langle\sum_{i=1}^m c_iv_i,v_j\right\rangle=\sum_{i=1}^m c_i\langle v_i,v_j\rangle=c_j.$$

j 任意，故所有系数为零，$v_1,\dots,v_m$ 线性无关。$\mathbb{F}_2^n$ 的维数为 n，所以 $m\le n$。取全部单点集 $\{1\},\dots,\{n\}$，每个大小为奇数，不同者交为空，故取等。

若 $m=n$，则这 n 个无关向量构成一组基。给定 $B\subseteq[n]$，存在唯一 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\mathbb{F}_2$ 使

$$v_B=\sum_{i=1}^n\varepsilon_iv_i.$$

与 v_j 作内积，得到

$$\varepsilon_j=\langle v_B,v_j\rangle=|B\cap A_j|\pmod 2.$$

逐坐标看，加法模二意味着一个元素出现在所选集合中的次数为奇数时，才出现在结果中。因此向量等式等价于集合公式

$$B=\bigtriangleup_{\substack{1\le j\le n\\ |B\cap A_j|\text{ 为奇数}}}A_j.$$

空指标族的对称差定义为空集。基表示的唯一性又保证这也是唯一的选取方式。

现在证第二问。令

$$U=\operatorname{span}_{\mathbb{F}_2}\{v_A:A\in\mathcal{E}\}\subseteq\mathbb{F}_2^n,\qquad d=\dim U.$$

由于自身大小也为偶数，式 (4) 对任意 $A,B\in\mathcal{E}$，包括 $A=B$，均给出 $\langle v_A,v_B\rangle=0$。对任意有限线性组合

$$u=\sum_i c_iv_{A_i},\qquad v=\sum_j e_jv_{B_j},$$

双线性性给出

$$\langle u,v\rangle=\sum_i\sum_j c_ie_j\langle v_{A_i},v_{B_j}\rangle=0.$$

定义正交补

$$U^\perp=\{z\in\mathbb{F}_2^n:\langle u,z\rangle=0\text{ 对每个}u\in U\}.$$

刚才的计算证明 $U\subseteq U^\perp$。

为计算正交补的维数，取 U 的基 $u_1,\dots,u_d$，把它们作为 $d\times n$ 矩阵 M 的行。对列向量 z，

$$z\in U^\perp\quad\Longleftrightarrow\quad Mz=0.$$

从右到左，是因为与每个基向量内积为零，便与其任意线性组合内积为零；从左到右，则在正交补定义中分别取 $u=u_1,\dots,u_d$。所以 $U^\perp$ 是线性映射

$$\Phi:\mathbb{F}_2^n\to\mathbb{F}_2^d,\qquad z\mapsto Mz$$

的核。矩阵的 d 行无关，行秩为 d；有限矩阵的行秩等于列秩，故 $\operatorname{rank}\Phi = d$。秩–零度公式于是给出

$$\dim U^{\perp} = n - d.$$

由 $U \subseteq U^{\perp}$，有 $d \le n - d$，从而 $d \le \lfloor n/2 \rfloor$。

每个 U 中向量由 d 个基系数唯一确定，而每个系数有 $0, 1$ 两种选择，所以 $|U| = 2^d$。指标向量互不相同且都落在 U 中，故

$$|\mathcal{E}| = |\{v_A : A \in \mathcal{E}\}| \le |U| = 2^d \le 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

为达到此界，令 $q = \lfloor n/2 \rfloor$，取不相交二元块

$$P_1 = \{1, 2\},\ P_2 = \{3, 4\},\ \ldots,\ P_q = \{2q-1, 2q\}.$$

$\mathcal{E}$ 取这些块的全部并：

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{i \in I} P_i : I \subseteq [q] \right\}.$$

不同 I 的并不同，因为若某个块只在一侧选取，该块的两个元素也只出现在这一侧。故族大小为 2^q。每个集合大小为 $2|I|$，任意两个集合的交恰为共同选取块的并，大小为 $2|I \cap J|$，全部为偶数。n 为奇数时最后一个元素始终不选；$n = 0$ 时该构造是 $\{\varnothing\}$，大小为一，而第一问的奇数大小集合族只能为空，两个结论均包含这个边界。 □

题 007　相同交数强迫的线性独立

题目　设 X 有 $n \ge 1$ 个元素，$A_1, \ldots, A_m$ 是 X 的互不相同的子集，$m \ge 1$。设某个整数 λ 满足

$$1 \le \lambda < n, \qquad |A_i \cap A_j| = \lambda \quad (i \ne j).$$

1. 不假设各 $|A_i|$ 相等，证明 $m \le n$。
2. 若把条件改为 $\lambda = 0$ 并仍允许空集，求此时的最佳上界。
3. 在 $n = 7, \lambda = 1$ 时构造 $m = n$ 的例子，并核实任意两集合交恰有一个元素。

解答　$m = 1$ 时，由 $n \ge 1$ 已得 $m \le n$。以下先设 $m \ge 2$。每个 A_i 都与另一个集合有 λ 个公共元素，故 $|A_i| \ge \lambda$。

第一种情况：存在 $|A_s| = \lambda$。对任意 $i \ne s$，$A_i \cap A_s$ 是 A_s 的一个 λ 元子集，所以就是 A_s，即 $A_s \subseteq A_i$。定义

$$D_i = A_i \setminus A_s \qquad (i \ne s).$$

集合互不相同保证 $D_i \ne \varnothing$。若 $i, j \ne s$ 且 $i \ne j$，则

$$A_i \cap A_j = A_s \sqcup (D_i \cap D_j).$$

左侧大小为 $\lambda = |A_s|$，因此 $D_i \cap D_j = \varnothing$。这些 $m-1$ 个非空不交集合全部位于 $X \setminus A_s$，所以

$$m - 1 \le \sum_{i \ne s} |D_i| \le n - \lambda.$$

于是 $m \le n-\lambda+1 \le n$，最后一步使用 $\lambda \ge 1$。

第二种情况：每个 $|A_i| > \lambda$。将 X 枚举为 $x_1, \dots, x_n$，在实数空间中定义指标向量

$$v_i = (\mathbf{1}_{A_i}(x_1), \dots, \mathbf{1}_{A_i}(x_n)) \in \mathbb{R}^n.$$

对实系数 $c_1, \dots, c_m$，展开平方范数：

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{m} c_i v_i \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \langle v_i, v_i \rangle + 2 \sum_{1 \le i < j \le m} c_i c_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} |A_i| c_i^2 + 2\lambda \sum_{i<j} c_i c_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} (|A_i| - \lambda) c_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \right)^2 .\end{aligned}$$

最后一步来自

$$\left(\sum_i c_i \right)^2 = \sum_i c_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_i c_j.$$

每个 $|A_i| - \lambda > 0$，$\lambda > 0$。如果某个 $c_i \neq 0$，上式右侧至少一个第一类项严格为正，其余项非负，因此整个平方范数严格为正。这说明 $\sum_i c_i v_i = 0$ 只能在所有 $c_i = 0$ 时成立。所以 m 个向量线性无关，全部属于 $\mathbb{R}^n$，遂有 $m \le n$。两种情况穷尽第一问。

对第二问，$\lambda = 0$ 意味着不同集合两两不交。所有非空集合各至少消耗 X 的一个元素，故非空集合最多 n 个；空集最多出现一次，因为集合不重复。因此

$$m \le n + 1.$$

取 $\varnothing, \{x_1\}, \dots, \{x_n\}$ 可达到 $n+1$。所以正交数条件中的 $\lambda \ge 1$ 不能在允许空集时无声删除。

对第三问，取 $V = \mathbb{F}_2^3$，令 $X = V \setminus \{0\}$。V 有八个向量，所以 $|X| = 7$。对每个非零向量 $a \in V$，定义

$$A_a = \{x \in V \setminus \{0\} : \langle a, x \rangle = 0\}.$$

a 有一个非零坐标，设为第 t 个。对其余两个坐标任意指定后，方程 $\langle a, x \rangle = 0$ 唯一决定第 t 个坐标。因此该方程在 V 中有四个解；去掉零向量后，$|A_a| = 3$。

若 a, b 是不同的非零向量，则它们在 $\mathbb{F}_2$ 上线性无关：唯一非零标量是一，若相关就只能有 $a = b$。于是两行矩阵

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

秩为二，它的齐次解空间维数为 $3 - 2 = 1$，恰有两个向量，其中一个是零向量。去掉零向量后，剩下唯一非零解，所以

$$|A_a \cap A_b| = 1.$$

又因每个 A_a 大小为三，若 $A_a = A_b$，交的大小便为三而非一，故这七个集合互不相同。它们确实给出 $m = n = 7, \lambda = 1$ 的构造。 □

题 008　把全部二元关系分成完全交叉块

题目　设 $n \geq 2$。对每个 $i = 1, \ldots, m$，取非空集合 $U_i, V_i \subseteq [n]$，且 $U_i \cap V_i = \varnothing$。令

$$E_i = \{\{u, v\} : u \in U_i,\ v \in V_i\}.$$

假设这些 E_i 两两不交，且它们的并是 $[n]$ 的全部二元子集。证明 $m \geq n - 1$，并构造恰好使用 $n - 1$ 个块的分解。不同的块允许共享元素，但不允许共享二元子集。

解答　在实数域中考虑未知数 $z_1, \ldots, z_n$。由每个二元子集恰属于一个 E_i，任意这些实数都满足恒等式

$$\sum_{1 \leq s < t \leq n} z_s z_t = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{u \in U_i} z_u \right) \left(\sum_{v \in V_i} z_v \right). \tag{5}$$

解释右侧的每个单项式：展开第 i 个乘积得到所有 $u \in U_i, v \in V_i$ 的 $z_u z_v$。$U_i \cap V_i = \varnothing$ 排除了平方项 z_u^2；同一块内一对元素不能以相反方向重复出现，否则两个元素都会同时属于 U_i, V_i。不同块之间也没有相同二元子集。覆盖假设又保证每个 $z_s z_t$（$s < t$）恰出现一次，所以恒等式成立。

反设 $m \leq n - 2$。考虑齐次线性方程组

$$\sum_{s=1}^{n} z_s = 0, \qquad \sum_{u \in U_i} z_u = 0 \quad (1 \leq i \leq m). \tag{6}$$

它有 n 个未知数，只有 $m + 1 \leq n - 1$ 个方程。对应线性映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ 的秩至多 $m + 1$；由秩–零度公式，它的核维数至少

$$n - (m + 1) \geq 1.$$

故存在非零实向量 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ 满足全部方程。

把这个解代入式 (5)，右侧每个乘积的第一个因子为零，故

$$\sum_{s<t} z_s z_t = 0.$$

另一方面，第一个方程使

$$0 = \left(\sum_{s=1}^{n} z_s \right)^2 = \sum_{s=1}^{n} z_s^2 + 2 \sum_{s<t} z_s z_t = \sum_{s=1}^{n} z_s^2.$$

每个实数平方都非负；和为零迫使每个 $z_s^2 = 0$，即全部 $z_s = 0$，与所选向量非零矛盾。因此 $m \leq n - 2$ 不可能，得 $m \geq n - 1$。

下面构造取等分解。对 $i = 1, \dots, n-1$，令

$$U_i = \{i\}, \qquad V_i = \{i+1, i+2, \dots, n\}.$$

两集合非空且不交。任意二元子集可唯一写成 $\{s, t\}$，其中 $s < t$。它属于 E_s；若还属于 E_i，则该块中的最小元素必为 i，所以 $i = s$。因此所有二元子集恰被覆盖一次，分解使用 $n-1$ 个块，达到下界。

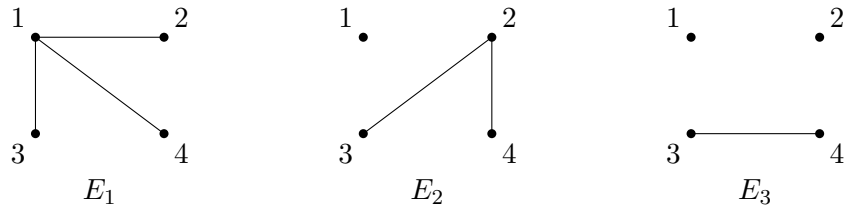


图 2: $n = 4$ 的取等分解：三个块分别含三条、两条和一条边，六个二元子集各出现一次。

□

题源与改编说明

本表列出实际核读的公开文本。纸本页码与 PDF 文件中的物理页分别标出；作者草稿的编号仅对应所链接版本。正文中的附加问均列明，不把定理改编标成入学、资格考试或竞赛原题。核读日期为 2026 年 10 月 27 日。

题 001 IMO 2003，第 1 题。据 IMO 官方英文题单，第 1 页，独立中文重述，数学条件与数值不变。本题附加的“平移后不必仍在 S 中”只是显明原题中 $\{a + x_i : a \in A\}$ 的值域，并未加上或放宽原题条件。来源为参考文献 [1]。

题 002 Schröder–Bernstein 构造，习题改编。Lehman、Leighton、Meyer，*Mathematics for Computer Science*，2018 年 6 月 6 日修订版，题 8.14，印刷页 320–321，PDF 物理页 328–329。本题保留从两个给定单射构造双射的核心要求；解答改用递归层与分段公式，补查集合不相交假设、空集情形及逆映射的定义域。来源为参考文献 [2]。

题 003 Hall 判据的应用改编。同上，§12.5.2，定理 12.5.2，印刷页 511–512，PDF 物理页 519–520；形式化表述见定理 12.5.4，印刷页 513。原文给出匹配条件与归纳证明。本题把它重组为“两种等大划分分解为共同代表集”，并要求自行证明判据；共同代表集的逐层分解是本集附加的应用，不标成该教材的原练习。

题 004 Sperner 与 LYM 不等式，定理改编。Stanley，*Topics in Algebraic Combinatorics*，2013 年 2 月 1 日版，第 4 章，推论 4.8 及其后的 Lubell 证明，印刷页 53–54，PDF 物理页 42–43。第一问改编自该段。第二问要求分类全部达到基数上界的反链，是本集补充的证明要求；解答用两中间层的包含图连通性完成。

题 005 Bollobás 集合对不等式，定理及习题改编。Jukna，*Extremal Combinatorics*，作者公开草稿，第 8 章 §4，定理 8.7、8.8 及紧随其后的反链应用，印刷页 80–82，PDF 物理页 88–90。第二问的取等构造和第三问对应同段的可达性与推论，均重新写成待证明的问题。来源为参考文献 [4]。

题 006 Oddtown 与 Eventown，习题改编。Jukna 同一草稿，第 13 章习题 13.3、13.4、13.5，印刷页 139，PDF 物理页 147。奇交部分亦核读 Stanley 同一版本 §12.2，定理 12.2，印刷页 233–234，PDF 物理页 190–191。取等时的对称差唯一公式为本集附加问。没有把这一附加问声称为原书题面。

题 007 非等大 Fisher 不等式，定理改编。Stanley 同一版本 §12.4，定理 12.4，印刷页 237，PDF 物理页 194。原文区分存在 $|A_i| = \lambda$ 的情形与所有大小严格大于 λ 的情形，本集保留并展开两支。$\lambda = 0$ 的边界与 $\mathbb{F}_2^3$ 的七集合构造为附加问；不标成原书题面的一部分。

题 008 Graham–Pollak 定理，定理改编。Stanley 同一版本 §12.3，定理 12.3，印刷页 235–236，PDF 物理页 192–193。原文研究完全图边集的完全二部图分划。本题改用二元子集与交叉块的语言；解答直接设齐次方程并展开二次式，构造给出最优性。

核读文献

[1] International Mathematical Olympiad. *44th IMO 2003: Problems*. 官方英文题单。https://www.imo-official.org/assets/documents/problems/2003/2003_eng.pdf

[2] Eric Lehman, F. Thomson Leighton, Albert R. Meyer. *Mathematics for Computer Science*. Revised 6 June 2018. MIT 公开课程文本。https://courses.csail.mit.edu/6.042/spring18/mcs.pdf

[3] Richard P. Stanley. *Topics in Algebraic Combinatorics*. Version of 1 February 2013. 作者 MIT 主页所载文本。https://math.mit.edu/~rstan/algcomb/algcomb.pdf

[4] Stasys Jukna. *Extremal Combinatorics*. 作者公开草稿，封面标有 “Draft”，未注明发布日期。本文的题号和页码仅据此草稿，不与任何纸本版次混同。https://web.vu.lt/mif/s.jukna/EC_Book_2nd/draft.pdf